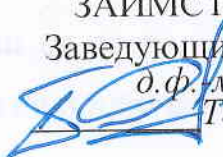


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой

д.ф.м.н., доцент

 Татосов А.В.

2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
ОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу
Студент 2 курса
Очной формы обучения



Пунигов
Александр
Леонидович

Руководитель работы
Доцент, к.ф.-м.н.



Басинский
Константин
Юрьевич

Рецензент
Руководитель группы прогнозных расчетов
НПО «Фундаментстройаркос»



Кондрахина
Полина
Николаевна

Тюмень 2018

Оглавление

Введение	2
Постановка задачи	3
Линейная задача.....	5
Графические выводы.....	9
Заключение.....	11
Список литературы.....	12

Введение

Задача обтекания подводного кругового цилиндра, ограниченным снизу непроницаемой поверхностью в потоке несжимаемой жидкости относится к классическим задачам гидромеханики. Первые ее решения были получены Л.Н. Сретенским [1] для модели диполя и М.Д. Хаскиндом [2], применивший метод Н.Е. Кочина [3]. Современные подходы к исследованию данной задачи связаны в основном с уточнением выполнения граничных условий.

Постановка задачи

Пусть дан поток идеальной несжимаемой весомой жидкости плотности ρ , в котором находится круговой цилиндр S радиуса a . Поток имеет свободную поверхность и снизу ограничен горизонтальным дном, находящийся на глубине H . Центр цилиндра находится на глубине h , $h+a < H$. В системе координат (рис.1), связанной с контуром, течение плоскопараллельное, установившееся и потенциальное. Скорость потока на бесконечности равна u_0 .

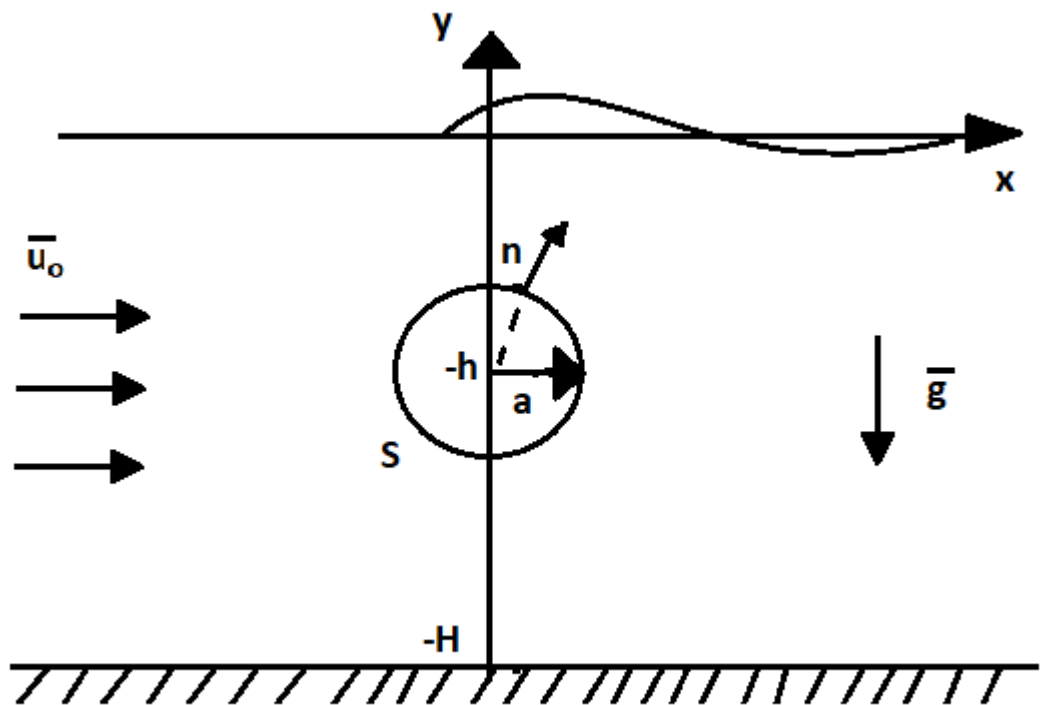


Рис. 1. Схема течения.

Запишем уравнения движения идеальной жидкости или уравнения Эйлера и уравнение неразрывности.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Запишем граничные условия на дне

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, y = -H, \quad (2)$$

условия не протекания через поверхность тела

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, (x, y) \in S, \quad (3)$$

так же надо удовлетворить кинематическому и динамическому условиям на свободной поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \frac{\partial \eta}{\partial x}, y = \eta(x, t), \quad (4)$$

вдоль свободной поверхности давление p сохраняет постоянное значение, равное значению атмосферного давления:

$$p = p_a, y = \eta(x, t). \quad (5)$$

Из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (6)$$

так как движение безвихревое, то

$$v = \operatorname{grad} \varphi, \quad (7)$$

где φ потенциал скорости.

Так как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi, \quad (8)$$

то в силу уравнения не разрывности

$$\Delta \varphi = 0. \quad (9)$$

Так как движение установившееся, тогда компоненты вектора скорости возмущенного движения жидкости можно представить в виде

$$u = u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (10)$$

где функция $\varphi(x, y)$ – это потенциал скорости возмущения основного потока, удовлетворяющий уравнению $\Delta \varphi = 0$.

Запишем векторной форме уравнения движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{v}(\bar{v}, \bar{\nabla}) = -\frac{1}{\rho} \Delta p, \quad (11)$$

при потенциальных массовых силах, из (11) получаем

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (13)$$

Отсюда из (13) интеграл Бернули-Коши запишется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho} = F(t). \quad (14)$$

Так как движение установившееся безвихревое уравнение (14) запишется

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho} = C.$$

Для точек свободной поверхности интеграл Бернули запишется в виде

$$\frac{\left(u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}{2} + g\eta = C. \quad (15)$$

Исключив из условий (10) и (15) функцию η , продифференцировав второе условие по переменной x и подставив в него вместо производной функции η ее выражение из первого условия. Получим

$$\left(u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, y = \eta. \quad (16)$$

Линейная задача

Решим задачу в линейном приближении, когда условия (10) и (16) примут вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = u \frac{d\eta}{dx}, u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, y = 0. \quad (17)$$

на дне

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, y = -H \quad (18)$$

Действие цилиндра заменим диполя, который заменил бы собой цилиндр при его обтекании неограниченным потоком [2]. Отсюда следует, что вблизи центра цилиндра потенциал φ примет, следующий вид [3]:

$$\varphi \approx \frac{a^2 ux}{x^2 + (y + h)^2}$$

Представим функцию φ в следующем виде:

$$\varphi = \Phi(x, y) + \frac{a^2 ux}{x^2 + (y + h)^2} - \frac{a^2 ux}{x^2 + (y - h)^2}.$$

Здесь функция $\Phi(x, y)$ является потенциальной и удовлетворяет согласно второму условию (17) следующему граничному условию:

$$u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{4a^2 uxgh}{(x^2 + h^2)^2}, y = 0. \quad (19)$$

Функцию $\Phi(x, y)$ будем искать в виде:

$$\Phi = \int_0^{\infty} \left((Ach(ky) + Bsh(ky)) \cdot \sin(kx) \right) dk, \quad (20)$$

соответствующим установившимся волновым движением. Подставляем (20) в условия (19) получим равенство для определения функции A и B .

$$\int_0^{\infty} \left(A \left(k - \frac{g}{u^2} \right) \cdot k \sin(kx) - B \left(k - \frac{g}{u^2} \right) \cdot k \sin(kx) \right) dk = -\frac{4a^2 uxgh}{(x^2+h^2)^2}. \quad (21)$$

Применим к (21) обратное преобразование Фурье:

$$Ak^2 - \frac{gk}{u^2}B = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{4a^2 ghx}{u(x^2+h^2)^2} \sin(kx) dx = \frac{2a^2 gk}{u} e^{-kh}$$

Отсюда выражаем A .

$$A = \frac{2a^2 g}{ku} e^{-kh} + \frac{g}{ku^2} B. \quad (22)$$

Согласно условиям (18) граничные условия на дне примут вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2a^2 ux(h-H)}{((h-H)^2+x^2)} - \frac{2a^2 ux(h-H)}{((h-H)^2+x^2)}, y = -H, \quad (23)$$

подставляем (20) в (23) получим

$$\int_0^{\infty} k(Ash(kH) - Bch(kH)) \sin(kx) dk = \frac{2a^2 ux(H+h)}{((H+h)^2+x^2)^2} - \frac{2a^2 ux(H-h)}{((H-h)^2+x^2)^2},$$

аналогично применим обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} kAsh(kH) - kBch(kH) &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{2a^2 ux(H+h)}{((H+h)^2+x^2)^2} - \frac{2a^2 ux(H-h)}{((H-h)^2+x^2)^2} \right) \sin(kx) dx = \\ &= -2a^2 uke^{-kH} sh(kh). \end{aligned}$$

Выражаем B и подставляем (22) получим:

$$B = \frac{2a^2 ue^{(-kH)}(u^2 sh(kh) + g sh(kH))}{u^2 kch(kH) - gsh(kH)}.$$

Отсюда A будет:

$$A = \frac{2a^2 gue^{(-kH)}(ch(kH) + sh(kh))}{u^2 kch(kH) - gsh(kH)},$$

подставляя в интеграл (20) позволяет определить выражение для потенциала Φ :

$$\Phi = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{2a^2 g u e^{-kH} (ch(kH) + sh(kh))}{u^2 k ch(kH) - g sh(kH)} \right) ch(ky) + \left(\frac{2a^2 u e^{-kH} (u^2 sh(kh) + g sh(kH))}{u^2 k ch(kH) - g sh(kH)} \right) sh(ky) \right] \sin(kx) dk. \quad (24)$$

Отсюда выражение для искомой функции φ примет вид

$$\varphi = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{2a^2 g u e^{-kH} (ch(kH) + sh(kh))}{u^2 k ch(kH) - g sh(kH)} \right) ch(ky) + \left(\frac{2a^2 u e^{-kH} (u^2 sh(kh) + g sh(kH))}{u^2 k ch(kH) - g sh(kH)} \right) sh(ky) \right] \sin(kx) dk + \frac{a^2 u x}{x^2 + (y+h)^2} - \frac{a^2 u x}{x^2 + (y-h)^2}.$$

Подставив его в первое условие (17), вычисляя и преобразовывая, получим выражение для ординаты свободной поверхности

$$\eta = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{chk(H-h)}{ch(kH) - \frac{g}{u^2 k} sh(kH)} \cos(kx) dk. \quad (25)$$

Возьмем в качестве пути интегрирования Γ_1 , состоящий из отрезка абсцисс $[0, k_0 - \varepsilon]$, полуокружности γ_1 с центром в точке k_0 и радиуса ε и бесконечной полупрямой $(k + \varepsilon, \infty)$, полуокружности γ_1 лежит выше оси абсцисс. Возьмем наряду с этим путем путь Γ'_1 , симметричный пути Γ_1 . Наш потенциалу $\Phi_1(x, y)$ построенному для пути Γ_1 , будет отвечать функция η_1 , определяемая по формуле:

$$\eta_1 = a^2 \int_{\Gamma'_1 + \Gamma_1} \frac{chk(H-h)}{ch(kH) - \frac{g}{u^2 k} sh(kH)} \cos(kx) dk.$$

Аналогичной возьмем путь интегрирования Γ_2 , симметричный пути Γ_1 относительно оси абсцисс. Тогда η_2

$$\eta_2 = a^2 \int_{\Gamma'_2 + \Gamma_2} \frac{chk(H-h)}{ch(kH) - \frac{g}{u^2 k} sh(kH)} \cos(kx) dk$$

Возьмем теперь полсуммы потенциалов Φ_1 и Φ_2 , потенциалу $\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$ будет отвечать поверхность жидкости, определяемая уравнением

$$\eta = \frac{1}{2} a^2 \int_{\Gamma'_1 + \Gamma_1} \frac{chk(H-h)}{ch(kH) - \frac{g}{u^2 k} sh(kH)} \cos(kx) dk +$$

$$+ \frac{1}{2} a^2 \int_{\Gamma'_2 + \Gamma_2} \frac{ch(k(H-h))}{ch(kH) - \frac{g}{u^2 k} sh(kH)} \cos(kx) dk.$$

Преобразуя эти интегралы в бесконечные ряды, расположенный по вычетам подынтегральной функции, выполняя необходимые подсчеты и замены получим:

$$\eta = \pm \frac{2\pi a^2}{H} \frac{\xi ch(b\xi) ch\xi}{ch^2 \xi - \frac{gH}{u^2}} \sin k_0 x + \frac{2\pi a^2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\mu_n \frac{|x|}{H}},$$

где $\xi = k_0 H, b = \frac{H-h}{H}, \beta_n = \frac{\cos(b\mu_n)}{\sin \mu_n \left[1 - \frac{gH}{u^2 \mu_n^2} \left(1 - \frac{gH}{u^2} \right) \right]}, \mu$ – корень уравнения

$$tg \mu = \frac{c^2}{gH} \mu.$$

В этой формуле знак «-» у первого члена берется для $x > 0$, знак «+» берется для $x < 0$.

Графические выводы.

Для наглядности на рис. 2 - 5 приведем графики формы свободной поверхности при различных значениях глубине расположения цилиндра радиуса цилиндра, глубины дна, скорости набегающего потока.

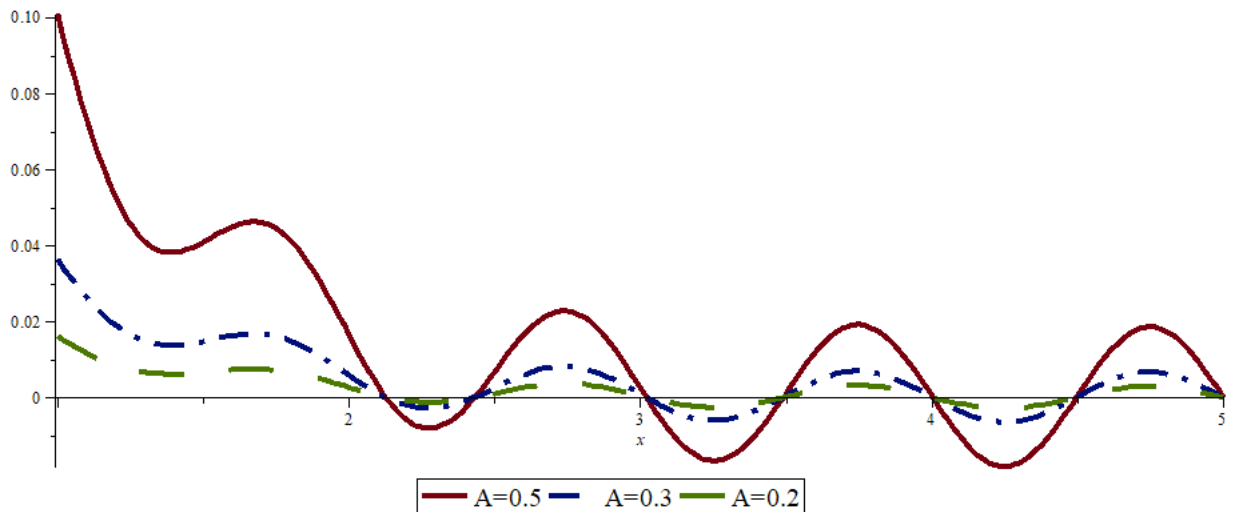


Рис. 2. Форма свободной поверхности при разном радиусе цилиндра ($u=5$ м/с, $h=1$ м, $H=3$ м)

На рис. 2 видим что при увеличении радиуса цилиндра приводит к волновым возмущениям большей амплитуды.

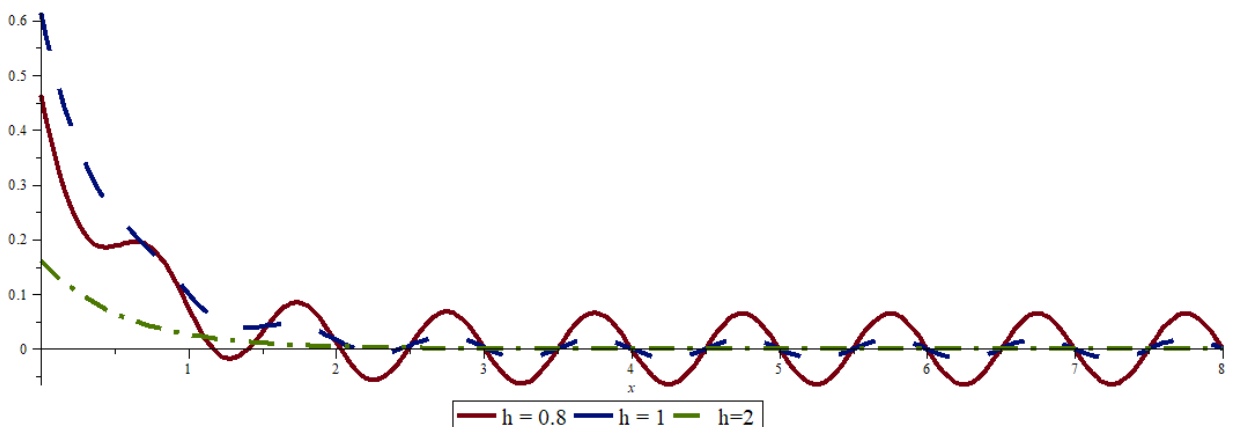


Рис. 3. Форма свободной поверхности при разной глубине расположения цилиндра ($a=0.5$ м, $u=5$ м/с, $H=3$ м)

На рис.3. при приближении цилиндра к дну приводит к уменьшению амплитуды колебания.

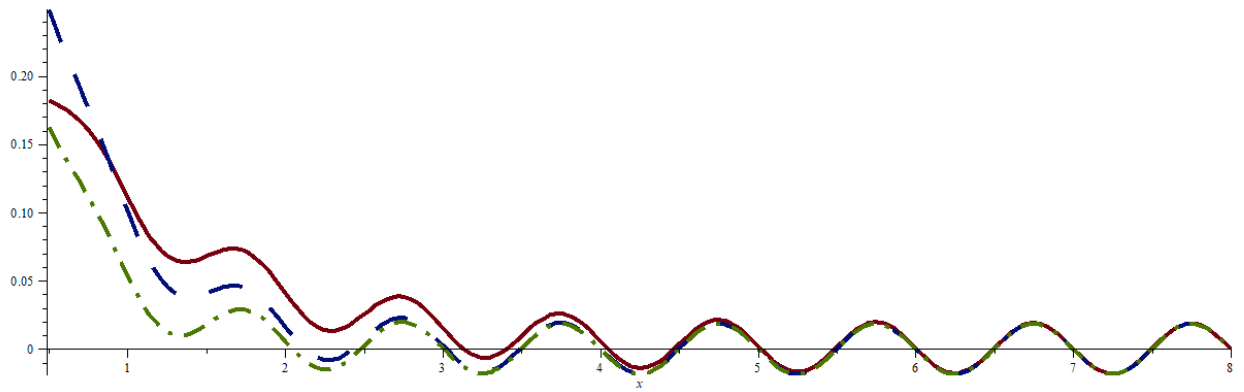


Рис.4. Форма свободной поверхности при разном глубине дна ($a= 0.5$ м, $h=1$ м, $u= 5$ м/с)

На рис. 4. при уменьшении глубины дна почти никак не сказывается на волны и в конце приводит одинаковой волне.

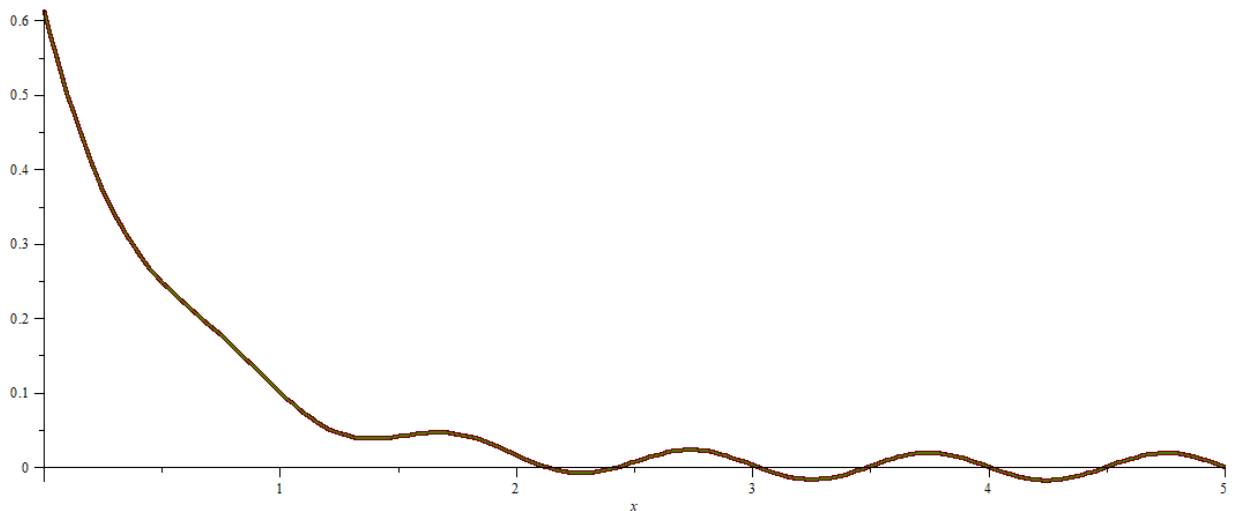


Рис.5. Форма свободной поверхности при разной скорости потока ($a= 0.5$ м, $h=1$ м, $H=3$ м)

На рис. 5 Изменение скорости потока не приводит к изменениям формы свободной поверхности.

Из рис. 2-5 видим что в начале после столкновения с цилиндром происходит затухание, потом восстановления колебания, но не во всех случаях.

Заключение

Получено выражение для ординаты свободной поверхности далеко за обтекаемым цилиндром. Проиллюстрировано влияние различных параметров задачи на форму свободной поверхности.

Список литературы

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости., гл. ред. ф.-м. лит. изд. «Наука», М., 1977, 816 стр.
2. Хаскинд М.Д. О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины// Прикл. мат. и мех. – 1945. – Т. 9, № 1. – С. 67-68.
3. Кочин Н.Е. Теоритическая гидромеханика// Часть 1 изд. 6 ФИЗМАТЛИТ. М., 1963, - 585 с.
4. Давыдова М.А. Лекции по гидродинамике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. -216 с.
5. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости: Учеб. пособие. – Л: Изд. Ленингр. унив. , 1981, 196 с.