МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
_____ Татосов А.В.
2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН НА СЛОЕ ТЕКУЩЕЙ ЖИДКОСТИ

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу Студент 2 курса очной формы обучения	Федоровых Юрий Юрьевич
Руководитель работы к.ф-м.н, доцент	Баринов Василий Александрович
Рецензент к.ф.-м.н, профессор	Латфуллин Тагир Гумерович

Тюмень, 2018

Содержание

Введение 3

Постановка задачи 4

Решение задачи 6

Анализ дисперсионного уравнения 8

Численный эксперимент 12

Заключение 15

Приложение 16

Список литературы 17

Введение

Волны на поверхности слоя жидкости являются одним из распространённых видов волнового движения в природе, которые доступны для визуального наблюдения. Характеристики волн зависят от свойств и параметров среды, в которой они распространяются. Трудности исследования задач теории поверхностных волн заключаются в существенной нелинейности граничных условий на свободной поверхности, которая также является неизвестной функцией.

Важную роль в развитии теории нелинейных волн сыграла задача о стационарных волнах на поверхности идеальной жидкости, рассмотренная Стоксом и предложившим два метода решения.

Нелинейные волновые явления были предметом исследования таких выдающихся ученых, как Пуассон, Эйри, Рэлей, Буссинеск, Риман. Однако, как единая наука теория нелинейных волн сложилась в конце 1960- х–начале 1970-х годов, которые стали годами ее бурного развития. Прежде всего, причина этого — в развитии вычислительной техники, позволившей приблизиться к непосредственному численному решению задач распространение волн в различных средах, описываемые уравнениями в частных производных.

Характерными движениями жидкости являются волны и течение, а совместное проявление этого процесса – волны на течении.

Целью данной работы является решение задачи о взаимодействии волнового движения жидкости с течением линейного профиля.

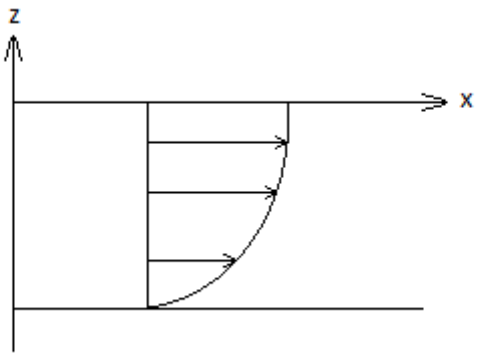
Постановка задачи

Построим математическую модель взаимодействия течения жидкости с волной, распространяющейся по свободной поверхности. Жидкость, будем считать, идеальной и несжимаемой.

Введем систему координат. Плоскость x, y параллельна поверхности недеформированного дня. Ось z перпендикулярна плоскости дна. Толщина слоя жидкости равна $H = -l$.

Слой жидкости движется в положительном направлении оси OX с произвольным профилем течения U(z). Вектор скорости, при плоскопараллельном движении, имеет вид:

$$\bar{v} = (u(x, y, z) + U(z), 0, v(x, y, z))$$



Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \bar{v}_t + (\bar{v}\nabla)\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - g\bar{e}_z \\ div\ \bar{v} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Граничные условия:

При $z = \xi(t, x)$

Кинематическое условие:

$$\xi = \xi_t + u\xi_x + U\xi_x$$

Динамическое условие:

$$p = p_0$$

При $z = -l$

$$v = 0$$

Пологая что $u \sim \varepsilon \ll 1$, обезразмерим и линеаризуем систему (1) с граничными условиями.

$$t^* = \frac{t}{c_0 k}, x^* = \frac{x}{k}, z^* = \frac{z}{k}, P^* = \rho c_0^2 P, \bar{v}^* = c_0 \bar{v}, U^* = U_0 U, \frac{g}{c_0^2 k} = \frac{1}{\nu^2}, \nabla^* = k\nabla$$

Где параметры со знаком * - размерные величины.

Получим:

$$\begin{cases} u_t + \varkappa U u_x + v \varkappa U_z = -P_x \\ v_t + \varkappa U v_x = -P_z \\ u_x + v_z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где $\varkappa = \frac{U_0}{c_0}$.

Граничные условия:

При $z = 0$

$$\begin{cases} v = (\varkappa U(0) - 1)\xi_x \\ P = \frac{1}{\nu^2}\xi \end{cases} \quad (3)$$

При $z = -l$

$$v = 0 \quad (4)$$

Система уравнений (2) с граничными условиями (3) и (4) образуют линейную задачу о волнах на течении.

Безразмерный профиль линейного течения имеет вид:

$$U = 1 + bz$$

где $b = \frac{\Delta U}{k l U_0}$.

Решение задачи

Продифференцировав первое уравнение системы (2) по z, а второе уравнение системы (2) по x.

$$u_{tz} + \varkappa U_z u_x + \varkappa U u_{xz} + \varkappa U_z v_z + \varkappa U_{zz} v = -P_{xz}$$

$$v_{tx} + \varkappa U v_{xx} = -P_{xz}$$

Вычтем из первого второе, получим:

$$\omega_t + \varkappa U \omega_x + v \varkappa U_{zz} = 0 \tag{5}$$

где $\omega = u_z - v_x$.

Далее будем искать решение в виде:

$$v = A(z)\cos(x-t) + B(z)\sin(x-t) \tag{6}$$

В силу третьего уравнения системы (2)

$$u = -A'\sin(x-t) + B'\cos(x-t) + C(z) \tag{7}$$

$$\omega = Asin(x-t) - Bcos(x-t) - A''\sin(x-t) + B''\cos(x-t) + C'(z) \tag{8}$$

Подставив (8) в (5) и сравнив коэффициенты при $\sin(x-t)$ и $\cos(x-t)$ определим $A(z)$ и $B(z)$:

$$\begin{cases} A'' + \left(\dfrac{\varkappa U_{zz}}{1-\varkappa U} - 1\right) A = 0 \\ B'' + \left(\dfrac{\varkappa U_{zz}}{1-\varkappa U} - 1\right) B = 0 \end{cases}$$

$$A(z) = \frac{D}{ch(l)}\big(sh(z+l)\big)$$

$$B = CA$$

где $C, D = const$.

Получаем выражения для компонент скорости:

$$v = \frac{D}{ch(l)}\sin(x-t)\, sh(z+l) \tag{9}$$

$$u = \frac{D}{ch(l)}\cos(x-t)\, ch(z+l) \tag{10}$$

Подставив уравнения (9) и (10) в систему (2) определим P:

$$P = \frac{D}{ch(l)}\cos(x-t)(ch(z+l)(1-\varkappa U) + sh(z+l)\varkappa U_z) \qquad (11)$$

Далее определим ξ из первого уравнения системы (3) подставив в него уравнения (9):

$$\frac{\frac{D}{ch(l)}\sin(x-t)\,sh(z+l)}{(\varkappa U(0)-1)} = \xi_x$$

$$\xi = -\frac{D}{ch(l)}\frac{\cos(x-t)sh(z+l)}{\varkappa U-1} \qquad (12)$$

Теперь подставим (11) и (12) во второе уравнение системы (3):

$$\frac{D}{ch(l)}\cos(x-t)(ch(z+l)(1-\varkappa U) + sh(z+l)\varkappa U_z)$$
$$= \frac{1}{\nu^2} - \frac{D}{ch(l)}\frac{\cos(x-t)\,sh(z+l)}{\varkappa U-1}$$

И получим дисперсионное уравнение для c_0:

$$c_0^2 + c_0(th(kl)bU_0 - 2U_0) - th(kl)\left(bU_0^2 + \frac{g}{k}\right) + U_0^2 = 0 \qquad (13)$$

где $b = \frac{\Delta U}{klU_0}$.

Анализ дисперсионного уравнения

Преобразуем уравнение (13):

$$c_0^2 + c_0 p + q = 0 \tag{14}$$

где

$$p = th(kl)bU_0 - 2U_0$$

$$q = U_0^2 - th(kl)\left(bU_0^2 + \frac{g}{k}\right)$$

Уравнение (14) имеет общее решения вида:

$$\mathrm{c}_0 = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

Данные решения должны удовлетворять условиям:

1) $p^2 - 4q \geq 0$

2) $-p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \geq 0$

Проверим первое условие:

$$(th(kl)bU_0 - 2U_0)^2 - 4\left(U_0^2 - th(kl)\left(bU_0^2 + \frac{g}{k}\right)\right) \geq 0$$

$$4U_0^2 - 4U_0^2 th(kl)b + th^2(kl)b^2U_0^2 - 4U_0^2 + 4U_0^2 th(kl)b + \frac{4th(kl)g}{k} \geq 0$$

$$b^2 \geq -4\frac{g/k}{th(kl)U_0^2}$$

Данное условие всегда выполнено, так как b^2 квадрат всегда больше отрицательного числа

Выполнение второго условия зависит от вспомогательных параметров p и q.

Далее проведем анализ и определим условия при которых возможно существования c_0.

Для того что бы

$$c_{01} = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) > 0 \tag{15}$$

Необходимо что бы выполнялось условие при котором $p < 0$:

$$th(kl)\frac{\Delta U}{kl} - 2U_0 < 0$$

$$th(kl)\frac{U_0 - U_l}{kl} - 2U_0 < 0$$

$$U_0 - U_l < \frac{2U_0 kl}{th(kl)}$$

$$0 < \left(\frac{2kl}{th(kl)} - 1\right)U_0 + U_l$$

$$\frac{U_l}{U_0} > 1 - \frac{2kl}{th(kl)} \tag{16}$$

Условие (16) всегда выполнимо, так как $\frac{2kl}{th(kl)} > 1$.

Решение имеет вид:

$$c_{01} = \left(th(kl)\frac{\Delta U}{2kl} - U_0\right)\left(-1 + \sqrt{1 - 4\frac{U_0^2 - th(kl)\left(\frac{\Delta U}{kl}U_0 + \frac{g}{k}\right)}{\left(\frac{1}{2}th(kl)\frac{\Delta U}{kl} - 2U_0\right)^2}}\right)$$

В случае мелкой воды $l \ll \lambda$ условие (16) примет вид:

$$U_0 > -U_l$$

которое выполняется всегда.

Тогда c_{01} примет вид:

$$c_{01} = \frac{1}{2}\left(U_0 + U_l + \sqrt{(-U_0 - U_l)^2 - 4(U_l U_0 - gl)}\right)$$

В случае глубокой воды $l \gg \lambda$ условие (16) примет вид:

$$\frac{U_l}{U_0} < 1 - 2kl < 0$$

Тогда c_{01} примет вид:

$$c_{01} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\Delta U}{kl} + 2U_0 + \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{kl} - 2U_0\right)^2 - 4\left(U_0^2 - \frac{\Delta U}{kl}U_0 - \frac{g}{k}\right)}\right)$$

Для того что бы

$$\mathrm{c}_{02} = \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) > 0 \qquad (17)$$

Необходимо что бы выполнялось условие при котором $p < 0$ и $q > 0$:

$$\frac{U_l}{U_0} > 1 - \frac{2kl}{th(kl)} \qquad (18)$$

как было доказано выше, данное условие выполнимо всегда.

Проверим условие $q > 0$:

$$U_0^2 - th(kl)\left(\frac{U_0 - U_l}{kl}U_0 + \frac{g}{k}\right) > 0$$

$$U_0^2 + U_0\frac{U_l th(kl)}{kl - th(kl)} - \frac{th(kl)gl}{kl - th(kl)} > 0$$

Данное уравнение имеет два корня:

$$U_{01} = \frac{1}{2}\frac{th(kl)U_l}{kl - th(kl)}\left(-1 - \sqrt{1 + 4\frac{kl - th(kl)gl}{th(kl)U_l^2}}\right)$$

$$U_{02} = \frac{1}{2}\frac{th(kl)U_l}{kl - th(kl)}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\frac{kl - th(kl)gl}{th(kl)U_l^2}}\right)$$

Так как выражение

$$\frac{kl - th(kl)gl}{th(kl)U_l^2} > 0$$

То корень $U_{01} < 0$, а значит не подходит для нашей задачи.

Следовательно имеем условие для $q > 0$:

$$U_0 > \frac{1}{2}\frac{th(kl)U_l}{kl-th(kl)}\left(-1+\sqrt{1+4\frac{kl-th(kl)gl}{th(kl)U_l^2}}\right) \tag{19}$$

Решение имеет вид:

$$c_{02} = \left(th(kl)\frac{\Delta U}{2kl} - U_0\right)\left(-1-\sqrt{1-4\frac{U_0^2 - th(kl)\left(\frac{\Delta U}{kl}U_0+\frac{g}{k}\right)}{\left(\frac{1}{2}th(kl)\frac{\Delta U}{kl}-2U_0\right)^2}}\right)$$

В случае мелкой воды $l \ll \lambda$ условия (18) и (19) примут вид:

$$U_0 > -U_l$$

$$U_0 > \infty$$

Так как $U_0 > \infty$ не может быть выполнено, значит c_{02} при условии мелкой воды не существует.

В случае глубокой воды $l \gg \lambda$ условия (18) и (19) примут вид:

$$\frac{U_l}{U_0} > 1 - 2kl$$

$$U_0 > \frac{1}{2}\left(-\frac{U_l}{kl-1}+\sqrt{\left(\frac{U_l}{kl-1}\right)^2+4\frac{gl}{kl-1}}\right)$$

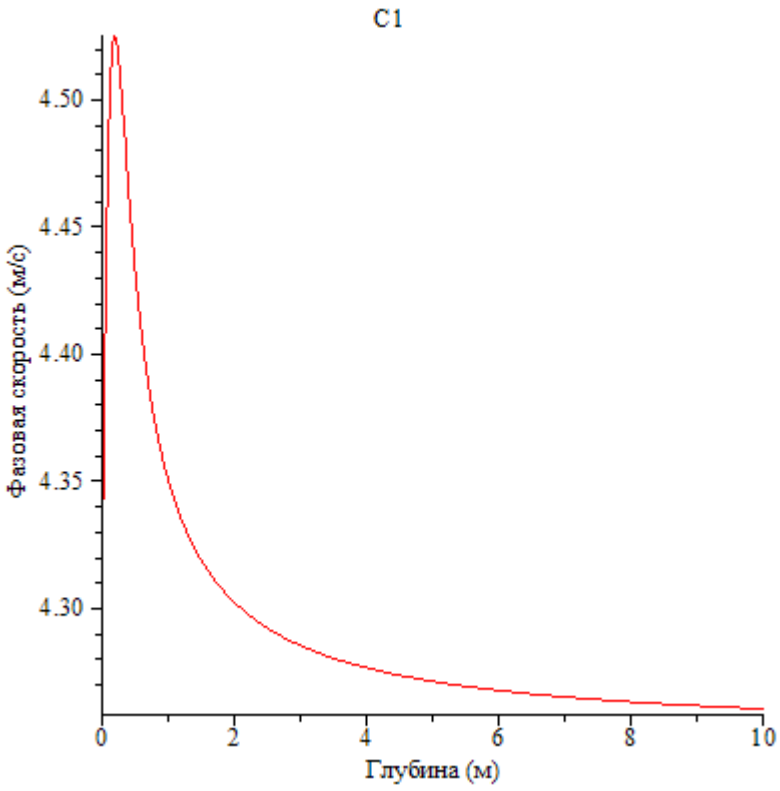
Тогда c_{02} примет вид:

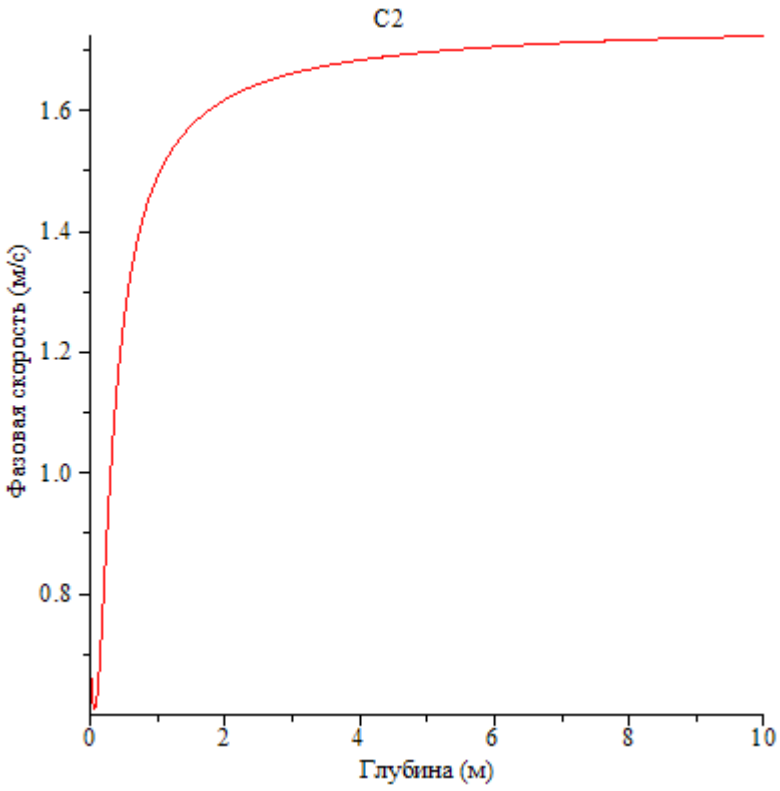
$$c_{02} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\Delta U}{kl}+2U_0-\sqrt{\left(\frac{\Delta U}{kl}-2U_0\right)^2-4\left(U_0^2-\left(\frac{\Delta U}{kl}U_0+\frac{g}{k}\right)\right)}\right)$$

Численный эксперимент

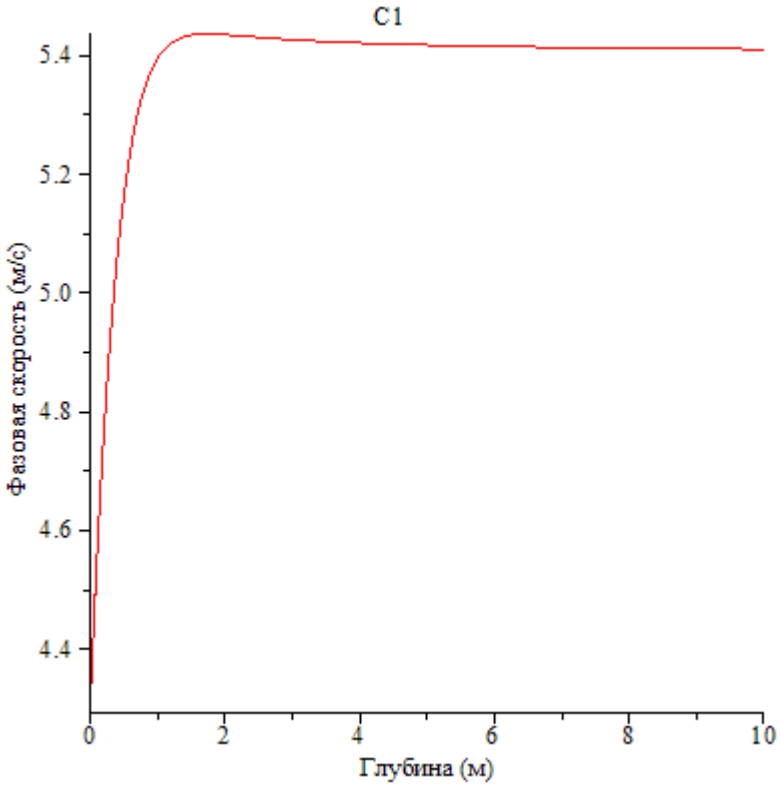
Построим графики зависимости фазовой скорости от глубины.

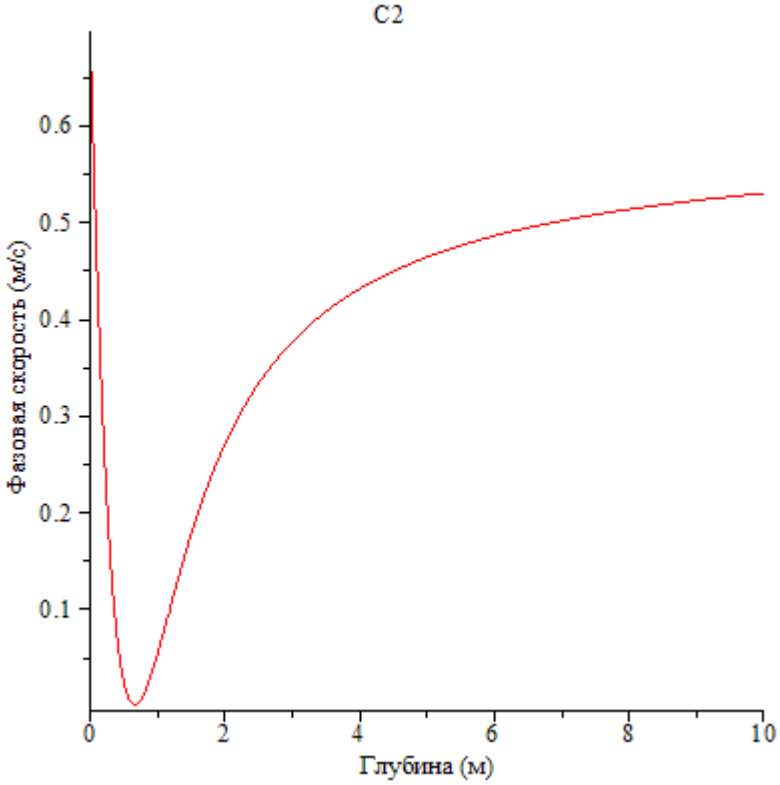
$$U_0 = 3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, U_l = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}, \lambda = 1, k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



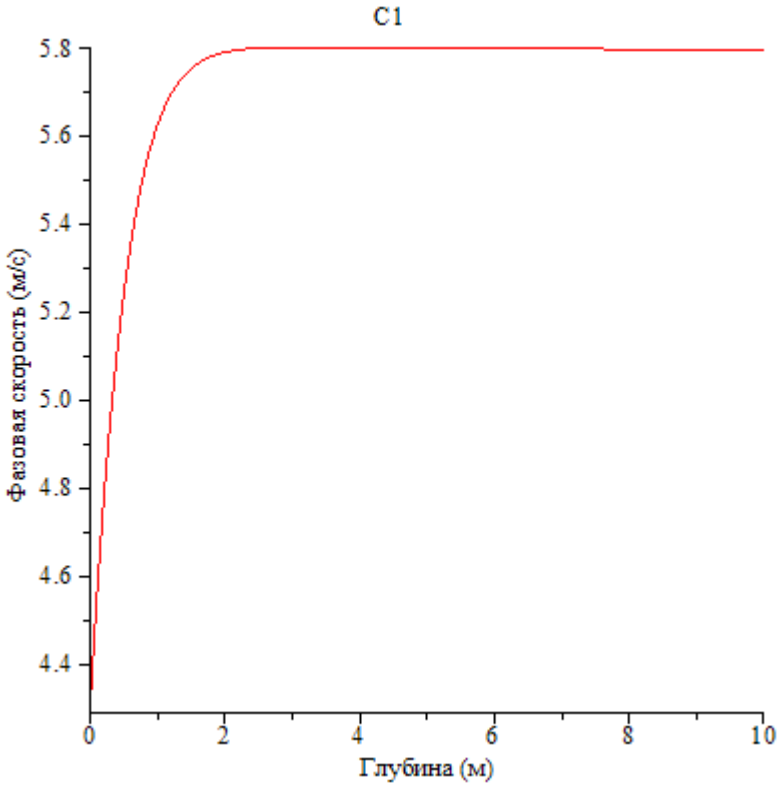


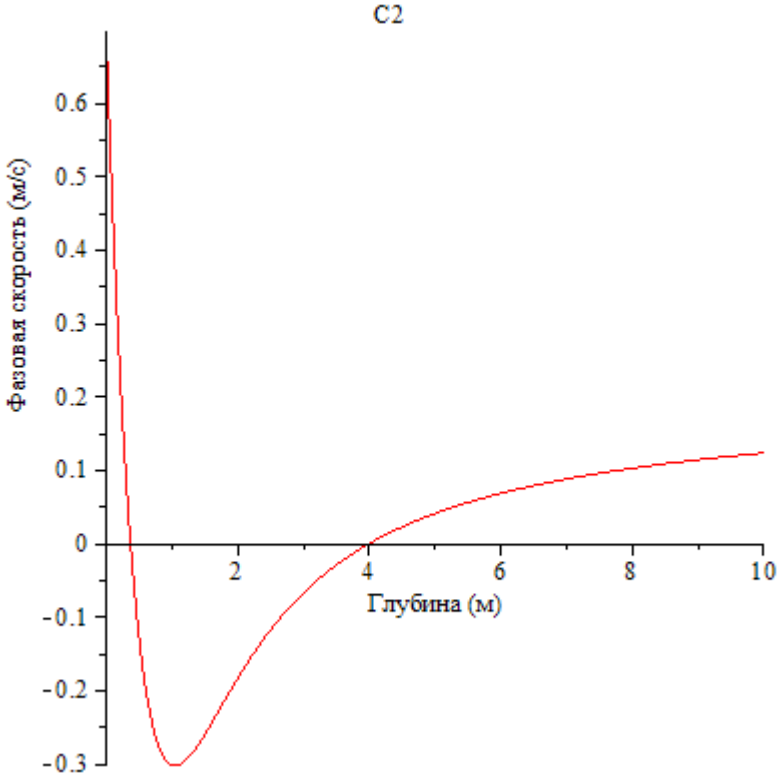
$$U_0 = 3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}, U_l = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}, \lambda = 10, k = \frac{2\pi}{\lambda}$$





$$U_0 = 3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, U_l = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}, \lambda = 5, k = \frac{2\pi}{\lambda}$$





Заключение

В ходе решения задачи были найдены два выражения для фазовой скорости. В результате численного эксперимента было определенно что фазовая скорость c_{02} характерна для коротковолнового течения, а c_{01} для длинноволнового. Так же были получены:

- выражения для скорости волнового движения и формы свободной поверхности;
- дисперсионное уравнение для течения с линейным профилем.

Приложение

> $restart;$

> $\text{lambda} := 1 : k := \frac{2 \cdot \text{Pi}}{\text{lambda}} : \; U0 := 3 : \; Ul := 1 : \; g := 9.81 :$

> $P := \frac{\tanh(k \cdot l)(U0 - Ul)}{k \cdot l} - 2 \cdot U0 :$

> $Q := U0^2 - \tanh(k \cdot l) \cdot \left(\frac{(U0 - Ul)}{k \cdot l} \cdot U0 + \frac{g}{k} \right) :$

> $C1 := \frac{1}{2} \cdot \left(-P + \text{sqrt}\left(P^2 - 4 \cdot Q\right) \right) :$

> $C2 := \frac{1}{2} \cdot \left(-P - \text{sqrt}\left(P^2 - 4 \cdot Q\right) \right) :$

>
```
plot(C1, l = 0 ..10, numpoints = 10000 , title = "C1", labels
      = ["Глубина (м)", "Фазовая скорость (м/с)"], labeldirections
      = [HORIZONTAL, VERTICAL]);
plot(C2, l = 0 ..10, numpoints = 10000, title = "C2", labels
      = ["Глубина (м)", "Фазовая скорость (м/с)"], labeldirections
      = [HORIZONTAL, VERTICAL]);
```

Список литературы

1) Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости: Учеб. пособие. – Л: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1981. 196 стр.
2) Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоритическая гидромеханика, Ч.1, М.: Гос. Изд. физико-математической литературы, 1963, 584 стр.