МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
Татосов А.В.
2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«РАЗЛОЖЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ»

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу Студент 2 курса очной формы обучения	Якубов Рушан Ташмухаметович
Руководитель работы д-р физ.-мат. наук, доц., профессор	Латфуллин Тагир Гумерович
Рецензент к.т.н. генеральный директор, ООО «ДИО-Консалт»	Чумаров Иван Сергеевич

Тюмень, 2018

АННОТАЦИЯ

Отчет 19 страниц, 8 источников.

Исследование теоремы Гельмгольца (разложение векторного поля) на нормированном функциональном пространстве. Приведение разложений векторного поля различных классов пространства Соболева.

Задача работы – исследовать, доказать теорему Гельмгольца на нормированных пространствах.

Оглавление

Введение

В выпускной квалификационной работе рассматривается теорема Гельмгольца о разложении дифференцируемых векторных полей на потенциальную и соленоидальную части. Разложение Гельмгольца векторного поля по его ротору и дивергенции, широко применяется при формулировании и доказательствах многих теорем, касающихся полей, встречающихся в гидродинамике, электростатике, например, уравнения Максвелла и геофизике. Теорема была опубликована Г.Л. Гельмгольцем в 1858 г. Дж. Стокс в 1856 г. Опубликовал статью, в которой разложение векторного поля было обосновано, но не было оформлено как отдельный результат.

Теорему Гельмгольца по праву называют основной теоремой векторного анализа. И в настоящем времени, то есть, через полтора века после публикации теоремы, появляются статьи о разложении векторных полей в различных функциональных пространствах.

В физике данное разложение помогает подробнее исследовать электромагнитные поля в различных процессах. В данной работе основное внимание уделено рассмотрению разложения полей в пространствах Соболева $W_p^k(\mathbb{R}^n)$. Подход к доказательствам основан на использовании базисов Шаудера в нормированных пространствах.

Глава 1. Нормированные функциональные пространства

1.1. Основные понятия

$\mathbb{R}^n$ - пространство упорядоченных наборов из n действительных чисел. Для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ норма определяется выражением

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество.

$C^\infty(U)$ – пространство функций $f : U \to \mathbb{R}$, имеющих частные производные любого порядка в любой точке из U.

$L_p(U)$ – пространство функций $f : U \to \mathbb{R}$, интегрируемых в степени $p \geq 1$ (по Лебегу). Норма в $L_p(U)$:

$$\|f\| = \|f\|_{L_p(U)} = \left(\int_U |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$L_{p,loc}(U)$ – пространство функций $f : U \to \mathbb{R}$, локально интегрируемых в степени $p \geq 1$, то есть, таких, что для любого компактного множества $V \subset U$ ограничение функции f на множество V принадлежит $L_p(V)$.

Функция называется локально интегрируемой, если она локально интегрируема в степени 1.

Если контекст позволяет избежать двусмысленности, пространства функций, определенных на $\mathbb{R}^n$ будем обозначать без указания области определения, например,

$$C^5 = C^5(\mathbb{R}^n), W_p^k = W_p^k(\mathbb{R}^n), L_7 = L_7(\mathbb{R}^n).$$

Мультииндексом длины n называется упорядоченный набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, состоящий из n неотрицательных целых чисел. Модулем мультииндекса называется число $|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$.

С помощью мультииндексов удобно обозначать частные производные

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

1.2. Пространства Соболева $L_p^k(U)$ и $W_p^k(U)$

Пусть k – неотрицательное целое число, $L_p^k(U)$ – пространство функций, имеющих все обобщенные производные порядка k, интегрируемые в степени $p \geq 1$. Ясно, что $L_p^0(U) = L_p\,(U)$. Полунорма в $L_p^k(U)$ при $k \geq 1$:

$$\|f\|_{L_p(U)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{k} \|D^\alpha f\|_{L_p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Скалярное произведение в пространстве $L_2(U)$ определяется формулой

$$\langle u, v \rangle_{L_2} = \int_U u \cdot v \; d\mu.$$

При $k \in \mathbb{N}$ пространство $L_2^k(U)$ предгильбертово со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_{L_2^k(U)} = \int_U \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha u \cdot D^\alpha v \; d\mu = \sum_{|\alpha|=k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L_2}.$$

При $k \in \mathbb{N}$ пространство $W_2^k(U)$ гильбертово со скалярным произведением

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_{W_2^k(U)} = \sum_{i=0}^{k} \langle u, v \rangle_{L_2^k(U)}.$$

Глава 2. Разложение дифференцируемых векторных полей

2.1. Соболевские векторные поля

Кортеж функций $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ определенных на области $U \subset \mathbb{R}$, называют векторным полем в области $U \subset \mathbb{R}^n$.

Векторное поле, фактически, другое название отображения области U в пространство $\mathbb{R}^n$.

Пусть $F(U)$ некоторое функциональное пространство функций. Тогда множество векторных полей, у которых координатные функции содержатся в $F(U)$ обозначим $\vec{F}(U)$.

Для векторных полей $u, v \in \overrightarrow{L_2}(U)$, их внутренним или скалярным произведением называют величину

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_{L_2(U)} = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle_{L_2(U)}\,.$$

Внутренним или скалярным произведением некоторых полей $u, v \in \overrightarrow{W_2^k}(U)$, называется величина

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_{W_2^k(U)} = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle_{W_2^k(U)}\,.$$

Пространство $\overrightarrow{W_2^k}(U)$ гильбертово.

Пусть $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$ векторное поле класса $W_{1,loc}^1(U)$

Векторное поле $u(x) = \left(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\right)$ потенциально или консервативно, если матрица Якоби отображения u

$$u' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

симметрична. Известно, что поле $u \in \overrightarrow{W_p^1}(U), p \geq 1$ потенциально лишь тогда, когда имеет потенциал $f \in L_{p,loc}(U)$, другими словами, когда

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \forall\, i = \overline{1,n}$$

Утверждение 1. Векторное поле $u(x) = \big(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\big) \in L_{1,loc}(U)$ потенциально, тогда и только тогда, когда существует функция $f \in L_{1,loc}(U)$, с которой для любого векторного поля $\varphi \in \vec{C}_0^\infty(U)$ выполнено равенство

$$\langle\langle u, \varphi \rangle\rangle_{L_2(U)} = -\langle f, div\ \varphi \rangle_{L_2(U)} \tag{1.1}$$

Доказательство. Необходимость. Если поле *u* потенциально с потенциалом *f*, то для любого всякого натурального $i \in \overline{1,n}$ и для всякой $\varphi_i \in \vec{C}_0^\infty(U)$ имеет место равенство

$$\int_U u_i \cdot \varphi_i \ d\mu = \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \varphi_i \ d\mu = -\int_U u_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\ d\mu$$

Следовательно

$$\langle\langle u, \varphi \rangle\rangle_{L_2(U)} = \int_U \sum_{i=1}^n u_i \cdot \varphi_i \ d\mu = -\int_U \sum_{i=1}^n u_i \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\ d\mu = -\langle f, div\ \varphi \rangle_{L_2(U)}$$

Достаточность. Рассмотрим такое поле u, для которого найдется $f \in L_{1,loc}(U)$, с которой выполнено (1.1), ля любого поля $\varphi \in \vec{C}_0^\infty(U)$. Пусть $\Phi_i = (0, .., 0, \varphi_i, 0, \dots, 0)$, φ_i- векторные поля, у которых только одна координата ненулевая, это функция φ_i, расположенная в позиции *i*. С этими полями

$$\langle\langle u, \Phi_i \rangle\rangle_{L_2(U)} = \int_U u_i \cdot \varphi_i \ d\mu,$$

$$\langle f, div\ \Phi_i \rangle_{L_2(U)} = \int_U f \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} d\mu,$$

Из (1.1) следует

$$\int_U u_i \cdot \varphi_i \ d\mu = -\int_U f \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \ d\mu$$

Поэтому, f есть потенциал для u.

Соленоидальным называется векторное поле $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \vec{W}^1_{1,loc}(U)$, если

$$div\ v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = 0,$$

то есть, какая бы ни была функция $\varphi \in C_0^\infty(U)$, выполнено

$$\int_U div\ v \cdot \varphi \ d\mu = 0 \qquad (1.2)$$

Утверждение 2. Векторное поле $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \vec{W}^1_{1,loc}(U)$ является соленоидальным лишь тогда, когда для всякой $\varphi \in C_0^\infty(U)$ имеет место равенство

$$\langle\langle u, grad\ \varphi \rangle\rangle_{L_2(U)} = 0 \qquad (1.3)$$

Доказательство. Если $v \in \vec{W}^1_{1,loc}(U)$ и $\varphi \in C_0^\infty(U)$, то

$$\int_U div\ v \cdot \varphi \ d\mu = \int_U \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \cdot \varphi \ d\mu = -\int_U \sum_{i=1}^n v_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ d\mu = -\langle\langle u, grad\ \varphi \rangle\rangle_{L_2(U)} \quad (1.4)$$

Так как поле v соленоидально, то первое выражение в (1.4) равно 0, поэтому выполнено (1.3).

В случае, когда имеет место равенство (1.3) последнее выражение в (1.4) равно нулю. Тогда и первое выражение равно нулю, поле v является соленоидальным.

2.2. Разложение векторного поля класса C_0^2

Оператор Лапласа для векторных полей.

Пусть $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ – векторное поле класса $\vec{C}^2$. Определим оператор $\vec{\Delta}: \vec{C}^2 \to \vec{C}^2$

$$\vec{\Delta} w = \left(\vec{\Delta} w_1, \vec{\Delta} w_2, \dots, \vec{\Delta} w_n\right).$$

Лемма 1. Если векторное поле $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \vec{\mathrm{C}}_0^\infty$, то поле

$$z = \vec{\Delta} w - \nabla div\, w$$

соленоидально.

Доказательство. Вычислим первую координатную функцию поля z

$$z_1 = \vec{\Delta} w_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} div\, w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1 \partial x_i}$$

Тогда

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1 \partial x_i^2} - \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_1^2 \partial x_i}$$

Подобным образом вычисляются выражения для $\frac{\partial z_j}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 w_j}{\partial x_j \partial x_i^2} - \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_j^2 \partial x_i}$$

Тогда

$$div\, z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 w_j}{\partial x_j \partial x_i^2} - \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_j^2 \partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 w_j}{\partial x_j \partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_j^2 \partial x_i}$$

В крайней части цепочки равенств выражения отличаются только наименования индексов суммирования, то есть, равны друг другу, следовательно, $div\, z = 0$, что и означает соленоидальность z.

Следствие. Если поле $w \in \vec{C}_0^\infty$, то поле $\vec{\Delta} w = p + s$, где p – потенциальное поле, а s – соленоидальное, причем и p и s принадлежит классу $\vec{C}_0^\infty$.

Разложение поля $\vec{\Delta} w$ на сумму потенциального и соленоидального поля класса $\vec{C}_0^\infty$ единственно.

Доказательство. $\vec{\Delta} w = \nabla div\, w + \vec{\Delta} w - \nabla div\, w$. Поле $p = \nabla div\, w$ потенциально с потенциалом div w, поле $s = \vec{\Delta} w - \nabla div\, w$, согласно лемме.

Единственность разложения. Предположим $w = p + s = \tilde{p} + \tilde{s},$ где $p, \tilde{p} -$ потенциальные поля, $s, \tilde{s} -$ солениоидальные поля. Положим

$$a = p - \tilde{p} = \tilde{s} - s.$$

Поле $a \in C_0^\infty$ потенциально и соленоидально. Так как a потенциально, существует функция $f \in C_0^\infty : a = grad\, f$. Так как a соленоидально, $0 = div\, a = \Delta f$. Итак, функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ гармоническая и финитивная (имеет компактный носитель), следовательно, ограниченная. Так как множество гармонических ограниченных функций состоит из постоянных функций, заключим, что f постоянна. Из того, что в окрестности бесконечности *f(x)=0,* следует, что *f=0*/

Таким образом, *a=0,* то есть, $\tilde{p}$=$p, \tilde{s} = s$. Единственность разложения доказана.

2.3. Разложение векторных полей класса $L_2(\mathbb{R}^n)$

Подпространство гильбертова пространства $\vec{L}_2$, которое состоит из векторных полей класса $C_0^\infty(U)$ будем обозначать через H_0.

Через $\mathcal{P}_0$ обозначаем множество векторных полей пространств $\mathcal{H}_0$, которое содержит все потенциальные поля, а другие поля не содержит.

Через $\mathcal{S}_0$ обозначаем множество векторных полей пространства $\mathcal{H}_0$, которое содержит все соленоидальные поля, а другие поля не содержит.

Лемма 2. Любое подмножество сепарабельного метрического пространства является сепарабельным метрическим пространством.

Доказательство. Пусть X сепарабельное метрическое пространство и Y – его подмножество. Так как пространство X сепарабельно, оно содержит конечное или счетное подмножество $D \subset X$, замыкание которого совпадает с X,

$D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Пусть k и n принадлежат $\mathbb{N}$, рассмотрим множество

$$G_k^n = \left\{ \mathrm{y} \in \mathrm{Y} : \rho(\mathrm{y}, \mathrm{x}_n) \le \frac{1}{2\mathrm{k}} \right\}$$

В случае, когда множество G_k^n непусто, оно содержит некоторую точку g_k^n. соответствующее одноточечное множество обозначим $\{g_k^n\}$, а если $G_k^n = \emptyset$, считаем, что $\{g_k^n\} = \emptyset$. Пусть

$$G_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{g_k^n\}.$$

Это равенство означает, что G_k не более, чем счетно. Проверим, что G_k будет 1/k-сетью для совокупности точек Y. Возьмем y ∈ Y. В силу того, что замыкание D совпадает с X, существует такая $x_n \in D$, что $\rho(y,x_n) < 1/(2k)$. Следовательно, G_k^n не равно пустому множеству и найдется точка g_k^n. По неравенству треугольника для метрических пространств

$\rho(y, g_k^n) \le \rho(y, x_n) + \rho(x_n, g_k^n)$.

Так как слагаемые справа не превосходят числа 1/(2k), заключаем, что $\rho(y, g_k^n) < 1/k$. Итак, G_k – 1/k - сеть.

Введем обозначение $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. В силу того, что G не более, чем счетно, для любого ε > 0 множество G будет ε-сетью для Y . Откуда и следует сепарабельность Y.

Утверждение 3. Если вектор-функция u принадлежит пространству $\mathcal{P}_0$, а вектор-функция v принадлежит пространству $\mathcal{S}_0$, то они ортогональны, то есть

$\langle\langle u, v\rangle\rangle_{L_2} = 0.$

Доказательство. Через f обозначим потенциал поля u. Заметим, что f $\in L_2(\mathbb{R}^n)$. Возьмем скалярное произведение

$$\langle u, v\rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \ d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \, d\mu.$$

Учитывая финитность функций v_i, находим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} f \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} f \cdot div\ v \, d\mu = 0,$$

так как div v = 0.

Следствие. В случае, когда $u \in \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{S}_0$, имеет место равенство u = 0.

Доказательство. Возьмем $u \in \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{S}_0$, в этом случае $\langle u, v\rangle_{L_2} = 0$. Равенство означает, что u = 0.

Утверждение 4. В случае, когда векторное поле $h \in \vec{L}_2$ ортогонально всем полям из $\mathcal{P}_0$ и всем полям из $\mathcal{S}_0$, то оно равно нулевому полю.

Доказательство. Предположим, что равенства $h \in \vec{L}_2$ и $\langle\langle h, p\rangle\rangle L_2 \ = \ 0$, $\langle\langle h, s\rangle\rangle L_2 \ = \ 0$ имеют место для всех p $\in \mathcal{P}_0$ и s $\in \mathcal{S}_0$. Если $w \in \mathcal{H}_0$, по лемме 1 найдется только одно разложение $\vec{\Delta}$w = p + s, (p $\in \mathcal{P}_0$, s $\in \mathcal{S}_0$). Тогда, поля h и $\vec{\Delta}$w ортогональны между собой, какое бы ни было поле $w \in \mathcal{H}_0$, следовательно

$$\left\langle\langle h, \vec{\Delta}\mathrm{w}\rangle\right\rangle_{L_2} = \sum_{i=1}^{n} \langle h_i, \Delta w_i\rangle_{L_2} = \ 0.$$

Отсюда вытекает, что для всех $\varphi \in C_0^\infty(U)$ $\langle h_i, \Delta\varphi\rangle_{L_2} = \ 0, i = \overline{1, n}.$ Подробная запись дает

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_i \Delta\varphi d\mu = 0\,,$$

что означает гармоничность функции h_i и принадлежность ее пространству L_2. Теперь заметим, что совокупность этих свойств функции hi говорит о том, что все ее значения равны нулю. В силу того, что это верно для всех i, приходим к выводу, что векторное поле h равно нулю.

Пусть система векторов $\{e_i\}$ предгильбертова пространства ортонормирована. Ее называют максимальной или полной, если из того что $\langle x,e_i\rangle = 0$ для всех e_i, вытекает равенство x = 0.

Лемма 3. Пусть X предгильбертово и сепарабельно. Тогда существует счетная максимальная ортонормированная система, содержащаяся в X.

Следствие. Так как пространство $\vec{L}_2$ является сепарабельным, согласно лемме 2 $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{S}_0$ сепарабельны, следовательно, и то и другое содержат максимальную счетную ортонормированную систему.

Утверждение 5. В пространстве $\vec{L}_2$ есть максимальная ортонормированная система, элементы которой не принадлежат пересечению пространств $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{S}_0$.

Доказательство. Обозначим через *OP* – максимальную ортонормированную систему в $\mathcal{P}_0$, а через *OS* – максимальную ортонормированную систему в $\mathcal{S}_0$. Убедимся в том, что объединение систем $OP \cup OS = OL_2$ есть максимальная ортонормированная система в пространстве $\vec{L}_2$. Система OL_2 нормированная, так как все ее векторы имеют нормы, равные единице. Рассмотрим векторы $u,v \in OL_2$. В случаях, когда оба вектора принадлежат *OP* или *OS*, то $u \perp v$ в силу того, что системы *OP* и *OS* ортонормированные. Если же один из векторов принадлежит *OP*, а другой *OS*, то они ортогональны согласно утверждению 3. Допустим, что система OL_2 не максимальна. Тогда найдется вектор $x \neq 0$, принадлежащий пространству $\vec{L}_2$, ортогональный всем векторам системы OL_2. Система *OS* максимальная в $\mathcal{S}_0$, вектор x ортогонален любому вектору из $\mathcal{S}_0$. Аналогичные выводы справедливы и для пространства $\mathcal{P}_0$. То есть, x ортогонален любому вектору из $\mathcal{P}_0$ и по утверждению 4, приходим к выводу, что x = 0, а система, а OL_2 максимальна. Следствие. Если поле x ∈ $\vec{L}_2$и ⟨⟨x,y⟩⟩ для любого y ∈ OP и ⟨⟨x,z⟩⟩ для любого z ∈ OS, то x = 0. Пусть $\mathcal{P}$ означает замыкание в пространстве $\vec{L}_2$ пространства $\mathcal{P}_0$, а $\mathcal{S}$ замыкание в $\vec{L}_2$пространства $\mathcal{S}_0$.

$\mathcal{P}$ называется подпространством потенциальных полей, а $\mathcal{S}$ подпространством соленоидальных полей.

Теорема 1. Для любого векторного поля x ∈ $\vec{L}_2$ существует единственное представление x = p + s, где p ∈$\mathcal{P}$, s ∈$\mathcal{S}$.

Доказательство. Предположим, что поле x≠0 и принадлежит ортогональному дополнению подпространства $\mathcal{P}$. Пусть y проекцию x на $\mathcal{S}$. Тогда поле z = x–y ортогонально системам *OP* и *OS*, и, согласно следствию к 4, z = 0, или x = y. Так как y ∈$\mathcal{S}$, поле x принадлежит $\mathcal{S}$.

Таким образом, $\mathcal{S}$ = $(\mathcal{P})^{\perp}$ и $\vec{L}_2$ = $\mathcal{P} \oplus \mathcal{S}$.

2.4. Разложение полей класса $\vec{W}_2^k$

Все рассматриваемые функции и поля определены на пространстве $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.

Примем обозначения. $\mathcal{H}_0^k$, $\mathcal{P}_0^k, \mathcal{S}_0^k$ – подпространства векторных полей пространства $\vec{W}_2^k$.

$\mathcal{H}_0^k$ состоит из полей класса $\vec{C}_0^{\infty}$.

$\mathcal{P}_0^k \subset \mathcal{H}_0^k$ – подпространство потенциальных векторных полей.

$\mathcal{S}_0^k \subset \mathcal{H}_0^k$ – подпространство соленоидальных векторных полей.

$\mathcal{P}^{k}$ – подпространство пространства $\vec{W}_2^k$, состоящее из потенциальных полей.

$\mathcal{S}^{\mathrm{k}}$ – подпространство пространства $\vec{W}_2^k$, состоящее из соленоидальных полей.

Пространства $\mathcal{P}_0^k$ и $\mathcal{S}_0^k$ предгильбертовы как векторные подпространства гильбертова пространства $\vec{W}_2^k$. Подобно тому, как это было в предыдущей подглаве, определим в $\mathcal{P}_0$ максимальную ортонормированную систему *OP* и в $\mathcal{S}_0$ максимальную ортонормированную систему *OS*.

Следующие два утверждения полезны для дальнейших построений, они следуют из общих свойств гильбертовых пространств.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, X его векторное подпространство, E - максимальная и ортонормированная система в X.

Утверждение 6. $\bar{X}$ - замыкание X в H совпадает с замыканием множества всех линейных комбинаций векторов системы E.

Утверждение 7. Система E является максимальной в гильбертовом пространстве $\bar{X}$, следовательно, является базисом в $\bar{X}$.

Утверждение 8. $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}_0}$.

(Пространство $\mathcal{P}$ является замыканием пространства $\mathcal{P}_0$ в $\vec{W}_2^k$.)

Доказательство. Пусть поле u принадлежит $\overline{\mathcal{P}_0}$. Тогда найдется последовательность полей $\{u^i\}$ пространства $\mathcal{P}_0$, сходящаяся к u. Напомним формулу определяющую норму поля $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ в $\vec{W}_2^k$

$$\|u\| = \sum_{m=1}^{n} \sum_{r=0}^{k} \sum_{|\alpha|=r} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u_m)^2 d\mu$$

Так как $\|u^i - u\| \to 0$ при $i \to \infty$, для любого мультииндекса α, определяющего частную производную первого порядка ($|\alpha| = 1$).

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(D^\alpha u_m^i - D^\alpha u_m\right)^2 d\mu = \left\|D^\alpha u_m^i - D^\alpha u_m\right\|_{L_2}^{2} \to 0, \text{при } i \to \infty$$

Пусть $m \neq l$ – два натуральных числа из промежутка [1: n]. Так как поле потенциально, его производная (матрица Якоби) симметрична, то есть

$$\frac{\partial u_l^i}{\partial x_m} = \frac{\partial u_m^i}{\partial x_l}$$

Из этого равенства следует, что частные производные предельных функций тоже равны между собой:

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_m} = \frac{\partial u_m}{\partial x_l}$$

так как являются пределом одной и той же последовательности. Итак, производная предельного поля u есть симметричная матрица, следовательно, u потенциально и, следовательно, $\overline{\mathcal{P}_0} \subset \mathcal{P}$.

Заключение

Таким образом в выпускной квалификационной работе рассмотрели теорему Гельмгольца на нормированных функциональных пространствах. Привели разложение векторного поля на потенциальное и соленоидальное поля в различных классах Соболевских пространств, а также доказали данную теорему, исходя из следствий и лемм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векторный анализ электронный ресурс [Электронный ресурс]/техническая документация – режим доступа:

https://ru.wikipedia.org/wiki/Векторный_анализ (Дата обращения: 30.05.2018)

2. Нормированные пространства электронный ресурс [Электронный ресурс]/поддержка – режим доступа:

https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Нормированные_пространства_(3_курс) (Дата обращения: 30.05.2018)

3. Вихревые теоремы электронный ресурс [Электронный ресурс] – режим доступа:

http://lectoriy.mipt.ru/file/synopsis/pdf/TherPhys-ContinuumMech-M03-Zhmur-140919.02.pdf (Дата обращения: 12.05.2018)

4. Виды векторных полей электронный ресурс [Электронный ресурс] – режим доступа:

https://studfiles.net/preview/3073216/page:6/(Дата обращения: 30.05.2018)

5. Характеристики векторного поля электронный ресурс [Электронный ресурс]– режим доступа:

http://infotables.ru/matematika/64-elementy-teorii-polya/621-vektornoe-pole

5. Действия с оператором «Набла» электронный ресурс [Электронный ресурс]– режим доступа:

http://4xx.zaytsev.net/course-2/OVTA/Practice/Ovtap10.pdf

7. Н.Е. Кочин Векторное исчисление и начала тензорного анализа Издание девятое «Наука», 1985. - 219 с.

8. Пространства Соболева [Электронный ресурс] – Режим доступа:

http://edu.sernam.ru/lect_mph.php?id=45 (Дата обращения: 29.04.2018)