МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
Татосов А.В.
2018г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнила работу
Студентка 2 курса
очной формы обучения
Ниятбакиева
Зарина
Ильшатовна

Руководитель работы
(к. ф.-м. н., доцент)
Шалагинов
Сергей
Дмитриевич

Рецензент
(к. ф.-м. н., доцент)
Шармин
Валентин
Геннадьевич

Тюмень, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время применение методов и результатов теории функций одного и многих комплексных переменных занимает особое место в теоретических и прикладных физико-математических дисциплинах (гидромеханика, теория упругости, теория чисел).

Одним из ярких примеров слияния двух мощных математических инструментов является теория дифференциальных уравнений с комплексными переменными, где повышенный интерес исследователи проявляют к задаче Коши.

Благодаря использованию комплексно-аналитических методов становится естественным исследование уравнений с частными производными в комплексном пространстве точно так же, как это происходит в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Класс эллиптических уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами в большей степени соответствует изучению комплексно-аналитическими методами, поскольку все достаточно гладкие решения этих уравнений аналитичны.

Целью магистерской диссертации является получение интегрального представления решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения в комплексном пространстве.

Первая глава представляет собой необходимые для исследования теоретические сведения.

Во второй главе излагается поиск решения рассматриваемой задачи, а также вывод его формулы.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Основные определения и теоремы.

Будем подразумевать под C^n пространство n независимых комплексных переменных $z_1,..,z_n$. Точка пространства C^n есть набор n комплексных чисел $(z_1,..,z_n)$. Пусть D – подмножество пространства C^n комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$, где $(k = 1,..,n)$.

Определение 1.1. Если в каждой точке $z \in D$ поставлены в соответствие одно либо несколько комплексных чисел f, то мы будем говорить, что на множестве D определена функция $f = f(z) = f(z_1,..,z_n)$. Здесь $z_1,..,z_n$ – координаты точки z. Если в каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно число f, то функция $f(z)$ называется *однозначной*.

Определение 1.2. Однозначная функция

$$f = f(z_1,..,z_n) = u(z_1,..,z_n) + iv(z_1,..,z_n),$$

(где $u = Re\, f, v = Im\, f$), заданная в области D пространства C^n, *голоморфна в этой области*, если во всех точках $z \in D$ она обладает частными производными

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \lim_{\Delta z_k \to 0} \frac{f(z_1,\dots,z_{k-1},z_k+\Delta z_k,z_{k+1},\dots,z_n) - f(z_1,z_2\dots,z_n)}{\Delta z_k}, k = 1,..,n \quad (1.1)$$

Определение 1.3. Функция $f(z)$, голоморфная во всех точках некоторого множества $E \subset C^n$, называется *голоморфной на этом множестве*.

Для функции $f(z) = u(z) + iv(z)$ одного комплексного переменного z, где $u = Re\, f, v = Im\, f$ – дифференцируемые функции действительных переменных x и y $(z = x + iy)$, необходимым и достаточным условием существования производной $\frac{\partial f}{\partial z}$ являются *условия Коши-Римана*. В данном случае они, соответственно, дадут условия существования частных производных функции $f(z_1,..,z_n)$ и будут иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Если ряд* $f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$, $z = (z_1, z_2 \dots, z_n)$, *состоящий из голоморфных в некоторой области* $D \subset \mathrm{C}^n$ *функций равномерно сходится в этой области, то его сумма голоморфна в этой области.*[5]

В теории функций комплексных переменных интегральную формулу Коши можно написать не для произвольной области, а только для специального класса полицилиндрических областей. Пусть D_k – некоторая область плоскости переменного z_k, $k = 1, \dots, n$. Совокупность всех точек $z \in \mathrm{C}^n$ с координатами $z_1, .., z_n$, удовлетворяющих условию $z_k \in D, k = 1, \dots, n$ образует полицилиндрическую область пространства C^n переменных $z_1, .., z_n$; она является декартовым произведением областей D_k и обозначается символом $D = D_1 \times \dots \times D_n$. Если области $D_k = \{|z_k - a_k| < r_k\}$, то область D называется *круговым полицилиндром с центром в точке* $(a_1, \dots, a_k)$ или просто *полицилиндром*. В случае, если все $r_k = r$, соотвествующий полицилиндр называется *полицилиндром радиуса* r; если $r = 1$, то он называется *единичным*. В пространстве двух переменных w, z будем рассматривать бицилиндр.

Граница полицилиндрической области D состоит из точек $(z_1, .., z_n)$, одна координата которых $z_k \in \partial D_k$, а остальные $z_s \in \overline{D}_s$ $(s \neq k)$. Часть границы ∂D, составленную из всех таких точек при фиксированном k, мы обозначим через D^k. Таким образом, $\partial D = \sum_{k=1}^{n} D^{(k)}$. Особенно важное значение имеет та часть ∂D, точки которой одновременно принадлежат ко всем $D^{(k)}$. Эту часть обозначим через S и назовем *остовом границы полицилиндрической области*. В случае, когда границы являются кусочно-гладкими линиями, границы $D^{(k)}$ оказываются $(2n-1)$-мерным поверхностями, а остов границы S – совокупностью n-мерных поверхностей их пересечений. В этом случае полицилиндрическая область D является *обыкновенной*. Поверхности, составляющие S, образуют как бы n-мерные ребра границы.

Теорема 1.2. *Если функция $f(z_1, .., z_n)$ голоморфна в полицилиндре*

$$U = \left\{ \left| z_k - z_k^{(0)} \right| \le R_k, k = 1, \dots, n \right\}$$

то она непрерывна в этом полицилиндре.[5]

Лемма 1.3 *Пусть функция $f(w, z)$*

1) *голоморфна в бицилиндр*е $U_{B,R} = \{|w| \le B, |z| \le R\}$;
2) *ограничена в бицилиндре* $U_{\beta,R} = \{|w| \le \beta, |z| \le R\}$.

Тогда функция $f(w, z)$ непрерывна в бицилиндре $U_{B,R}$.[5]

Теорема 1.3. *Если функция $f(z)$ голоморфна в ограниченной обыкновенной полицилиндрической области D, непрерывна в замкнутой области, то справедлива формула:*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n}{(t_1 - z_1) \dots (t_n - z_n)}. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) называется *интегральной формулой Коши*.[9]

Из (1.3), как и в случае одной независимой комплексной переменной, следует, что голоморфная в круговом полицилиндре функция $f(z)$ представима степенным рядом:

$$f(z) = \sum_{\substack{k_1=0 \\ \dots \\ k_n=0}}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} (z_1 - \alpha_1)^{k_1} \dots (z_n - \alpha_n)^{k_n}, \quad (1.4)$$

где

$$a_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n}{(t_1 - \alpha_1)^{k_1+1} \dots (t_n - \alpha_n)^{k_n+1}}. \quad (1.5)$$

Ряд (1.4) является рядом Тейлора для функции $f(z)$[9].

Для производных функции $f(z)$ из формулы (1.3) получается следующее представление:

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} = \frac{k_1! \dots k_n!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n}{(t_1 - \alpha_1)^{k_1+1} \dots (t_n - \alpha_n)^{k_n+1}} \qquad (1.6)$$

Следует иметь в виду, что существование и единственность решения задачи Коши гарантируются универсальной теоремой Коши - Ковалевской, которая также справедлива для комплексных переменных.

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Постановка задачи Коши: отыскать u – голоморфное решение уравнения порядка $m = 4$

$$LU \equiv a_1 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b_1 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + c_1 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = h(x, y, z) \qquad (2.1)$$

при начальных условиях вида

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right|_{z=0} = f_k(x, y), \qquad k = 0, .., m-1 \qquad (2.2)$$

с независимыми комплексными переменными x, y, z; функциями f_k, голоморфными в некоторой области голоморфности $D \subset \mathrm{C}^2$ и непрерывными в замыкании этой области.[1] Возьмем в качестве области голоморфности функций f_k бицилиндр $D = D_1 \times D_2$, где D_1 – область в x – плоскости с гладкой границей Γ_1, а D_2 – область в y – плоскости с гладкой границей Γ_2.

Линейность уравнения (2.1) позволяет привести задачу (2.1)-(2.2) к «стандартной» задаче Коши

$$LU \equiv a_1 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b_1 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + c_1 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \qquad (2.3)$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right|_{z=0} = 0, \qquad k = 0, .., m-2 \qquad (2.4.1)$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right|_{z=0} = f_k(x, y), \qquad k = m-1 \qquad (2.4.2)$$

путем введения новой функции

$$u^* = u(x, y, z) - \sum_{k=o}^{m-1} \frac{1}{k!} f_k(x, y) z^k, \qquad (2.5)$$

которая соответствует нулевым условиям (2.4.1) и уравнению вида

$$LU^* = h^*(x, y, z), \qquad (2.6)$$

где h^* – известная функция.[1]

Решение уравнения (2.6) получается применением интеграла Дюамеля

$$u^*(x) = \int_0^z G(x,y,z,\tau)d\tau, \quad (2.7)$$

где $G(x,y,z,\tau) = V(x,y,z,\tau)$ – решение дифференциального уравнения (2.3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k V}{\partial z^k}\right|_{z=\tau} = \begin{cases} 0, & k = 0,..,m-2, \\ h^*(x,y,\tau), & k = m-1, \end{cases}$$

которые зависят от параметра τ .[1]

Таким образом, для решения задачи (2.1)-(2.2) достаточно рассмотреть лишь «стандартную» задачу Коши (2.3)-(2.4). Решение этой задачи будем искать в виде ряда

$$u(x,y,z) = \sum_{n=o}^{\infty} z^n \vartheta_n(x,y) .$$

Вычислим производные по z:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{n=o}^{\infty} nz^{n-1}\vartheta_n = \sum_{n=o}^{\infty} (n+1)\, z^n \vartheta_{n+1} ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_{n=o}^{\infty} n(n-1)\, z^{n-2}\vartheta_n = \sum_{n=o}^{\infty} (n+2)(n+1)\, z^n \vartheta_{n+2} ,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \sum_{n=o}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, z^{n-3}\vartheta_n = \sum_{n=o}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1)\, z^n \vartheta_{n+3}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = \sum_{n=o}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\, z^{n-4}\vartheta_n =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\, z^n \vartheta_{n+4}.$$

В соответствии с условиями (2.4) при $z = 0$ находим

$$u|_{z=0} = \vartheta_0 = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \vartheta_1 = 0, \tag{2.9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{z=0} = 2\,\vartheta_2 = 0, \qquad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right|_{z=0} = 6\,\vartheta_3 = f\,.$$

Введем обозначение

$$L_0 = \frac{a_1}{c_1}\cdot\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{b_1}{c_1}\cdot\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

тогда уравнение (2.3) перепишется в виде

$$LU \equiv a\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = L_0 U + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \tag{2.10}$$

где $a = \frac{a_1}{c_1},\ b = \frac{b_1}{c_1}$.

Преобразуем (2.10) с помощью (2.8)

$$\sum_{n=o}^{\infty} z^n\,L_0\vartheta_n + \sum_{n=o}^{\infty}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\,z^n\vartheta_{n+4} = 0.$$

Приравнивая к 0 коэффициенты при z^n, получаем

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\vartheta_{n+4} + L_0\vartheta_n = 0, \qquad \text{где } n = 0,1,2,3,\ldots$$

После умножения на $n!$ и введения новой функции $\omega_n = n!\,\vartheta_n$, получаем

$$\omega_{n+4} + L_0\omega_n = 0,\ \mathrm{n} = 0,1,2,\ldots \tag{2.11}$$

Начальные условия (2.4) запишутся в виде: $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \ \omega_3 = f$.

В уравнении (2.11) содержатся функции одинаковой четности, в силу чего допустимы следующие записи

$$\omega_{2m+4} + L_0\omega_{2m} = 0, \quad m = 0,1,2,3,\ldots \tag{2.12.1}$$

$$\omega_{2m+5} + L_0\omega_{2m+1} = 0, \quad m = 0,1,2,3,\ldots \tag{2.12.2}$$

Из вышеуказанных выражений следует закономерность: при известном ω_0 находится ω_4, далее по ω_2 находим ω_6 и т.п. При этом $\omega_0 = \omega_2 = 0$, тогда $\omega_4 = 0$ и т.д. Следовательно, $\omega_{2m} = \omega_{4m+1} = 0,\ m = 0,1,2,3, \dots$

Докажем по индукции, что формула

$$\omega_{4m+3} = (-1)^m L_0^m f, \quad m = 0,1,2,3, \dots$$

верна:

При $m = 0$ и $m = 1$ из (2.12.2) получаем

$$\omega_3 = f,$$

$$\omega_7 + L_0\, \omega_3 = 0 \quad \Rightarrow\ \omega_7 = -\, L_0\, f.$$

Допустим, что она верна при $m = k + 1$ и $m = k + 2$. Тогда

- При $m = k + 1$

$$\omega_{4(k+1)+3} + L_0 \omega_{4k+3} = 0.$$

$$\omega_{4(k+1)+3} = -L_0 \cdot (-1)^k L_0^k f = (-1)^{k+1} L_0^{k+1} f.$$

- При $m = k + 2$

$$\omega_{4(k+2)+3} + L_0\, \omega_{4(k+1)+3} = 0,$$

$$\omega_{4(k+2)+3} = -L_0 \cdot (-1)^{k+1} L_0^{k+1} f = (-1)^{k+2} L_0^{k+2} f,$$

формула

$$\omega_{4m+3} = (-1)^m L_0^m f, \quad m = 0,1,2,3, \dots$$

верна. □

Исходя из последнего, получаем формальное решение

$$u(x,y,z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{z^{4m+3}}{(4m+3)!} L_0^m f(x,y)$$

с отличными от 0 коэффициентами

$$\vartheta_{4m+3} = \frac{\omega_{4m+3}}{(4m+3)!} = \frac{(-1)^m L_0^m f}{(4m+3)!}, \qquad m = 0,1,2 \dots$$

Ряд (2.13) сходится абсолютно и равномерно в окрестности $K(D)$ бицилиндра D согласно [3],[8],[9].

Дифференцируя равенство (2.13) дважды по z, находим

$$v \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{z^{4m+1}}{(4m+1)!} L_0^m f(x,y) \tag{2.13}$$

Для функции f справедливо интегральное представление

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{f(t,\tau)dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)},$$

производная которого имеет вид

$$\frac{\partial^{4m} f}{\partial x^{4m-4j} dy^{4j}} = \frac{(4m-4j)!\,(4j)!}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{f(t,\tau)dtd\tau}{(t-x)^{4m-4j+1}(\tau-y)^{4j+1}} \tag{2.14}$$

Применяя формулу Лейбница [4], получим

$$L_0^m = (a \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} + b \cdot \frac{\partial^4}{\partial y^4})^m = \sum_{j=0}^{m} c_m^j \frac{b^j}{a^{j-m}} \frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m-4j} \partial y^{4j}}, \tag{2.15}$$

где $c_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ – биномиальные коэффициенты

Подставив (2.15) в (2.13) и поменяв порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$v(x,y,z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(4m+1)!} z^{4m+1} \sum_{j=0}^{m} c_m^j \frac{b^j}{a^{j-m}} \frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m-4j} \partial y^{4j}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{f(t,\tau)dtd\tau}{(t-x)\,(\tau-y)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(4m+1)!} z^{4m+1} \sum_{j=0}^{m} c_m^j \frac{b^j}{a^{j-m}} \frac{(4m-4j)!\,(4j)!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{f(t,\tau)dtd\tau}{(t-x)^{4m-4j+1}(\tau-y)^{4j+1}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{f(t,\tau)dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} (-1)^m c_m^j \frac{b^j}{a^{j-m}} \frac{z^{4m+1}}{(4m+1)!} \frac{(4m-4j)!\,(4j)!}{(t-x)^{4m-4j}(\tau-y)^{4j}}\ .$$

Абсолютная и равномерная сходимость ряда (2.13) в окрестности K(D) допускает изменение порядка суммирования и интегрирования. [3],[8], [9]

Формула (2.13) принимает вид

$$v(x,y,z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{f(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} (-1)^m c_m^j \frac{b^j}{a^{j-m}} \cdot \frac{(4m-4j)!\,(4j)!}{(4m+1)!} \times$$

$$\times \frac{z^{4m+1}}{(t-x)^{4m-4j}(\tau-y)^{4j}} dt d\tau \qquad (2.16)$$

Используя для (2.16) формулы для гамма- и бета-функций [2], получим

$$\frac{(4m-4j)!\,(4j)!}{(4m+1)!} = \frac{\Gamma(4m-4j+1)!\,\Gamma(4j+1)!}{\Gamma(4m+2)!} = \mathrm{B}(4m-4j+1, 4j+1) =$$

$$= \int_0^1 s^{4m-4j}\,(1-s)^{4j} ds. \qquad (2.17)$$

Подставим (2.17) в (2.16) и получим

$$v(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{f(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{b^j}{a^{j-m}} z^{4m+1} \times$$

$$\times \left[\sum_{j=0}^{m} c_m^j \int_0^1 \frac{s^{4m-4j}(1-s)^{4j}}{(t-x)^{4m-4j}(\tau-y)^{4j}} ds \right] dt d\tau. \qquad (2.18)$$

Вычисляя сумму (2.18) по j с помощью биномиальной формулы

$$(A+B)^m = \sum_{j=0}^{m} c_m^j A^{m-j} B^j,$$

имеем

$$v(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{f(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a^m z^{4m+1} \int_0^1 \left[\frac{s^4}{(t-x)^4} + \frac{b(1-s)^4}{a(\tau-y)^4}\right]^m dsdtd\tau \qquad (2.19)$$

Суммируя полученный ряд, находим интегральное представление решения задачи Коши с начальными условиями вида

$$\begin{aligned} v|_{z=0} &= \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{z=0} = 0, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} &= \left.\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right|_{z=0} = f, \\ \left.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right|_{z=0} &= \left.\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right|_{z=0} = 0, \\ \left.\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\right|_{z=0} &= \left.\frac{\partial^5 u}{\partial z^5}\right|_{z=0} = 0. \end{aligned} \qquad (2.20)$$

$v(x, y, z) =$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{z \cdot f(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a^m z^{4m} \int_0^1 \left[\frac{s^4}{(t-x)^4} + \frac{b(1-s)^4}{a(\tau-y)^4}\right]^m dsdtd\tau =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} \frac{z \cdot f(t,\tau) dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)} F(t-x, \tau-y, z)\, dtd\tau, \qquad (2.21)$$

где $F(t-x, \tau-y, z) = \int\limits_0^1 \frac{ds}{1 + \left(\frac{az^4 s^4}{(t-x)^4} + \frac{z^4 b(1-s)^4}{(\tau-y)^4}\right)^m}.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как замечалось ранее, получение решения неоднородного уравнения (2.1) осуществляется путем применения интеграла Дюамеля (2.7). После интегрирования (2.21) решение задачи станет громоздким и непрезентабельным, поэтому будем лишь подразумевать такую возможность.

В таком случае, результатом исследования задачи Коши для одного дифференциального уравнения в комплексном пространстве является интегральное представление (2.21)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.. Уравнения с частными производными. – Москва: «Мир», 1966. 351 с.
2. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. – Москва: «Издательство иностранной литературы», 1963. 466 с.
3. Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т. Задача Коши. Униформизация и асимптотическое разложение линейной задачи Коши с голоморфными данными. Аналогия с теорией асимптотических и приближенных волн. – Москва: «Мир», 1967. 152 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 1. – Москва: «Наука», 1968. 441 с.
5. Фукс Б.А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва: «Физматлит», 1962. 420 с.
6. Фукс Б.А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва: «Наука», 1963. 428 с.
7. Шалагинов С.Д. Задача Коши для уравнения Лапласа в комплексном пространстве. – Дифференциальные уравнения, 1980, т. 16, №5.
8. Шалагинов С.Д. Задача Коши для эллиптических уравнений, порождаемых оператором Лапласа в комплексном пространстве. – Екатеринбург, 2003.
9. Янушаускас А.И. Аналитическая теория эллиптических уравнений. – Новосибирск: «Наука», 1979. 192 с.