МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., доцент
____________А.В. Татосов
________________2018 г.

# МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Сравнение алгоритмов подсчета ляпуновских величин для полиномиальных систем со слабым фокусом

01.04.01 Математика
Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу
Студент 2 курса
очной формы обучения

Дёмин
Альберт
Алексеевич

Научный руководитель
Доцент, к.н.

Мачулис
Владислав
Владимирович

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и математической логики

Шармин
Валентин
Геннадьевич

Тюмень 2018

**Оглавление**

**Введение**

В 1900 году на Втором Международном конгрессе математиков Давид Гильберт в своем докладе предложил ученым того времени более двух десятков проблем, решение которых поспособствовало бы значительному развитию науки, рождению новых идей и, возможно, целых отраслей знаний ([9]). В наши дни список этих проблем известен как 23 проблемы Гильберта. В течении более чем столетия, прошедшего после выступления Гильберта, эти проблемы продолжают оказывать влияние на развитие математики.

Большая часть вопросов, поднятых Гильбертом, уже решена, но некоторые из них и по сей день являются предметом исследований ведущих математиков современности. В число нерешенных задач входит 16 проблема Гильберта, известная также как проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей. В исходной постановке она состоит из двух частей:

1. Определение максимального числа замкнутых и отдельно расположенных ветвей, которые могут существовать у алгебраической кривой порядка $n$ на плоскости;
2. Определение максимального числа предельных циклов и их взаимного расположения для дифференциального уравнения первого порядка вида
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}, \tag{1}$$
где $X, Y$ — целые рациональные функции $n$-й степени относительно своих аргументов.

Вторую часть проблемы часто переписывают в измененном виде, а именно рассматривают вместо одного уравнения систему дифференциальных уравнений на плоскости вида

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) \\ \dot{y} = Y(x,y) \end{cases}. \tag{2}$$

Хотя проблемы Гильберта исследуются более ста лет, для второй части 16 проблемы до сих пор было получено крайне мало результатов.

## 1. Постановка задачи

В настоящее время наибольший интерес представляет именно вторая часть 16 проблемы Гильберта, в частности, некоторые отдельные случаи систем (1) и (2). Одним из них является уравнение (система) Льенара, играющее важную роль в теории колебаний:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (3)$$

или эквивалентная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}, \qquad (4)$$

где $F(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi$.

В уравнении (3) и системе (4) могут возникать предельные циклы, но нас будут интересовать только те из них, которые появляются при локальных бифуркациях из неподвижной точки. Такие предельные циклы называются малоамплитудными.

Один из основных методов изучения существования малоамплитудных предельных циклов связан с исследованием ляпуновских величин (также встречаются названия фокусные величины, константы Ляпунова–Пуанкаре ([3], [4])). Определение ляпуновских величин можно дать с помощью функции последования. Рассмотрим некую нелинейную динамическую систему на плоскости с неподвижной точкой в начале координат. Пусть эта неподвижная точка есть точка типа центр для линеаризованной системы. Из точки с координатами $(0,h)$ выпустим траекторию.

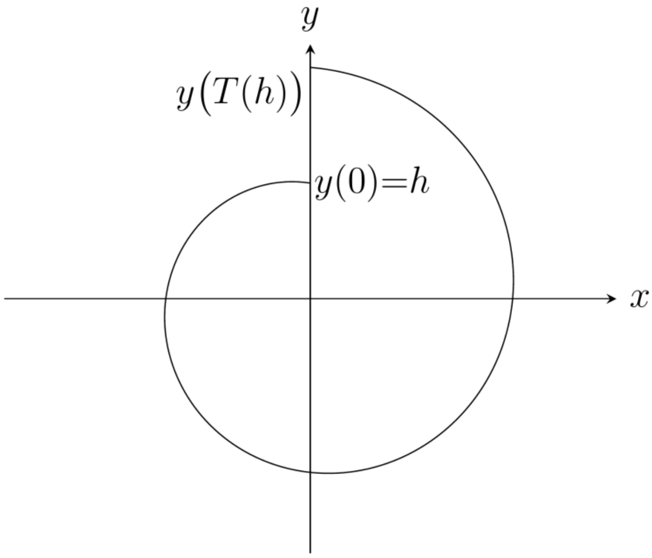


**Рис. 1**

Обозначим через $T(h)$ время, через которое траектория снова пересечет ось ординат. Тогда точка первого пересечения траектории с осью $y$ будет иметь ординату $y(T(h))$. Разложим последнее выражение в ряд по степеням $h$:

$$y(T(h)) = h + \tilde{L}_2 h^2 + \tilde{L}_3 h^3 + \ldots .$$

Сразу заметим тот факт, что первый ненулевой коэффициент $\tilde{L}_m$ обязательно будет иметь нечетный номер. Все нечетные коэффициенты в данном разложении есть ляпуновские величины:

$$L(k) = \tilde{L}_{2k+1}.$$

Следуя Баутину ([1]), можно с помощью малых возмущений получить $K$ малоамплитудных предельных циклов, если система уравнений имеет неподвижные точки типа центр или фокус, и для невозмущенной системы имеют место равенства

$$L(1) = L(2) = \ldots = L(K-1) = 0, \quad L(K) \neq 0, \tag{5}$$

Про системы, для которых выполнены равенства (5), говорят, что они имеют в точке $(0,0)$ слабый фокус порядка $K$.

**Замечание:** в статье Баутина [1] ляпуновские величины напрямую не указаны, но представлены как нечетные члены в разложении функции последования.

Вычисление ляпуновских величин является весьма нетривиальной задачей; существует множество методов, как точных, так и приближенных. N.G. Lloyd и S. Lynch ([6], [7]) предложили метод вычисления ляпуновских величин для уравнений вида (4) со следующими функциями:

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N, \tag{6}$$

$$g(x) = x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_M x^M, \tag{7}$$

где $N, M > 1$ есть натуральные числа.

Рассматриваемую систему заменой переменных и времени можно привести к системе вида

$$\begin{cases} \dot{u} = y - F^*(u) \\ \dot{y} = -u \end{cases},$$

где $u(x) = \sqrt{2G(x)}\,\mathrm{sign}\,x$, $G(x) = \int\limits_0^x g(\xi)\,d\xi$, $F^*(u) = F(x(u))$. Функция $x(u)$ есть обратная функция к $u(x)$. N.G. Lloyd и S.Lynch ([6], [7]) показали, что при разложении в ряд Тейлора функции $F^*(u) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^* u^k$ имеют место соотношения

$$L(k) = C_k a_{2k+1}^*, \tag{8}$$

где $C_k < 0$ числа, зависящие лишь от $k$. Аналогичный результат имеет место и для обобщенных систем Льенара

$$\begin{cases} \dot{x} = h(y) - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases},$$

где $h(0)=0$ и $h'(y)>0$ для любых $y$.

Равенства (8) позволяют переписать условие (5) в ином виде

$$a_3^* = a_5^* = \ldots = a_{2K-1}^* = 0, \quad a_{2K+1}^* \neq 0. \tag{9}$$

Заметим, что равенство $a_1^* = 0$ является необходимым условием существования неподвижной точки типа центр в линеаризованной системе. Равенства (9), в свою очередь, определяют условия существования $K$ малоамплитудных предельных циклов для системы уравнений Льенара в терминах разложения функции $F^*(u)$ в ряд. Следовательно, возникает задача определения конкретного вида функции $F^*(u)$.

## 2. Общий вид функции $F^*(u)$

Зададимся вопросом нахождения точного вида функции $F^*(u)$. Для этого нам потребуется сначала определить обратную функцию для $u(x)$. Для упрощения дальнейших вычислений будем рассматривать более общий случай, когда $F(x)$ и $g(x)$ есть аналитические функции, представленные своими рядами Тейлора

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k,$$

$$g(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k.$$

Для вычисления функции $F^*(u) = F(x(u))$ требуется вычисление обратной функции к $u(x) = \sqrt{2G(x)}\,\mathrm{sign}\,x$. В рассматриваемом случае функция $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)\,d\xi = \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Подставив полученную формулу в выражение для функции $u(x)$, имеем

$$u(x) = \sqrt{2G(x)}\,\mathrm{sign}\,x = x\sqrt{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2b_k}{k+1} x^{k-1}}\,. \tag{10}$$

3. **Обратная функция** $\boldsymbol{x(u)}$

Для нахождения обратной функции $x(u)$ воспользуемся теоремой об обращении ряда Тейлора ([5])

$$x(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \frac{x}{u(x)} \right)^n \right) \Bigg|_{x=0}\,. \tag{11}$$

Нахождение производной в формуле (11) напрямую весьма неудобно, поэтому приведем выражение, стоящее под знаком производной, к экспоненциальному виду:

$$\left( \frac{x}{u(x)} \right)^n = \exp\left\{ n \ln \frac{x}{u(x)} \right\} = \exp\left\{ n \ln x - n \ln u(x) \right\}.$$

Подставляя в данное выражение формулу (10), получаем

$$\left( \frac{x}{u(x)} \right)^n = \exp\left\{ -\frac{n}{2} \ln\left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2b_k}{k+1} x^{k-1} \right) \right\}. \tag{12}$$

Таким образом, задача определения производной высшего порядка от $n$-й степени дроби свелась к отысканию производной высшего порядка сложной функции. Эта производная определяется по формуле Фаа ди Бруно ([2]), а именно, ее представлением с помощью полиномов Белла ([8]):

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} p(q(x)) = \sum_{k=1}^{n-1} p^{(k)}(q(x)) B_{n-1,k}\left( q'(x), q''(x), \ldots, q^{(n-k)}(x) \right), \tag{13}$$

где $B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1})$ есть полиномы Белла. В рассматриваемом случае функции $p$ и $q$ имеют вид

$$p(q) = e^{-nq/2}, \quad q(x) = \ln\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2b_k}{k+1} x^{k-1}\right).$$

Так как нас интересует значение производных только при $x = 0$, получаем $q(0) = 0$ и

$$p^{(k)}\left(q(0)\right) = \left(-\frac{n}{2}\right)^k e^{-nq(0)/2} = \left(-\frac{n}{2}\right)^k.$$

Производные высших порядков функции $q(x)$ при $x = 0$, которые встречаются в формуле (13), определяются также по формуле Фаа ди Бруно:

$$\begin{aligned} q^{(n)}(0) &= \left(\frac{d^n}{dx^n} \ln\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2b_k}{k+1} x^{k-1}\right)\right)\Bigg|_{x=0} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (k-1)!\, B_{n,k}\left(\tfrac{2}{3} b_2, b_3, \ldots, \tfrac{2(n-k+1)}{n-k+3} b_{n-k+2}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

В конечном итоге функция $x(u)$ принимает вид

$$x(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n u^n, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} &\varsigma_1 = 1, \\ &\varsigma_n = \varsigma_n(b_2, \ldots, b_n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{n}{2}\right)^k B_{n-1,k}\left(q'(0), \ldots, q^{(n-k)}(0)\right), \quad n > 1. \end{aligned}$$

Определив выражение для обратной функции $x(u)$, мы можем получить формулу для функции $F^*(u)$, подставив в (6) вместо $x$ формулу (15):

$$F^*(u) = F\left(x(u)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* u^n.$$

Определим $S_{n,k}$ как коэффициент при $u^n$ в разложении в ряд по степеням $u$ функции $x^k(u)$. Заметим, что при $u$, близком к нулю, имеет место

$$x^k(u) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varsigma_i u^i \right)^k = \varsigma_1^k u^k + O\left(u^{k+1}\right) = u^k + O\left(u^{k+1}\right).$$

Следовательно, $S_{n,k} = 0$ при $n < k$. Так как входящие в сумму члены порядка выше $n$ не влияют на $S_{n,k}$, заменим ряд суммой первых $n$ слагаемых:

$$\begin{aligned} x^k(u) &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varsigma_i u^i \right)^k = \left( \sum_{i=1}^{n} \varsigma_i u^i \right)^k + O\left(u^{n+1}\right) = \\ &= \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k} \binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_n} \left(\varsigma_1 u^1\right)^{i_1} \left(\varsigma_2 u^2\right)^{i_2} \ldots \left(\varsigma_n u^n\right)^{i_n} + O\left(u^{n+1}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Чтобы получить выражение $S_{n,k}$, оставим в формуле (16) только те слагаемые, для которых $u^{i_1} \cdot \left(u^2\right)^{i_2} \cdots \left(u^n\right)^{i_n} = u^n$ или, что то же самое, $i_1 + 2i_2 + \ldots + ni_n = n$. В итоге получаем выражение

$$S_{n,k} = \sum \binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_n} \varsigma_1^{i_1} \varsigma_2^{i_2} \ldots \varsigma_n^{i_n},$$

в котором суммирование идет по всем наборам целых неотрицательных чисел $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ таким, что

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k \\ i_1 + 2i_2 + \ldots + ni_n = n \end{cases}.$$

Зная $S_{n,k}$, можно легко записать выражение для $a_n^*$:

$$a_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} a_k S_{n,k}.$$

Обозначив коэффициенты с нечетными номерами $\hat{a}_n = a_{2n+1}^*$, получаем условие (5) в виде

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \ldots = \hat{a}_{K-1} = 0, \quad \hat{a}_K \neq 0.$$

Ниже представлены выражения для $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ с учетом $\hat{a}_0 = a_1 = 0$:

$$\hat{a}_1 = -\frac{2}{3}a_2b_2 + a_3,$$

$$\hat{a}_2 = -\frac{7}{9}a_2b_2^3 + \frac{7}{6}a_2b_2b_3 - \frac{2}{5}a_2b_4 + \frac{7}{6}a_3b_2^2 - \frac{3}{4}a_3b_3 - \frac{4}{3}a_4b_2 + a_5,$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_3 = &-\frac{143}{108}a_2b_2^5 + \frac{143}{36}a_2b_2^3b_3 - \frac{33}{16}a_2b_2b_3^2 - \frac{11}{5}a_2b_2^2b_4 + \frac{9}{10}a_2b_3b_4 + \\ &+ a_2b_2b_5 - \frac{2}{7}a_2b_6 + \frac{143}{72}a_3b_2^4 - \frac{33}{8}a_3b_2^2b_3 + \frac{27}{32}a_3b_3^2 + \frac{9}{5}a_3b_2b_4 - \\ &-\frac{1}{2}a_3b_5 - \frac{22}{9}a_4b_2^3 + 3a_4b_2b_3 - \frac{4}{5}a_4b_4 + \frac{5}{2}a_5b_2^2 - \frac{5}{4}a_5b_3 - 2a_6b_2 + a_7.\end{aligned}$$

Следует указать, что приведенные формулы записаны в общем виде без учета условия (9). Сравним полученные результаты с соответствующими результатами в работах [6] и [7]:

$$L(1) = 2a_2b_2 - 3a_3 = -3\left(-\frac{2}{3}a_2b_2 + a_3\right) = -3\hat{a}_1.$$

Если взять $a_3 = \frac{2}{3}a_2b_2$, получим $L(1) = 0$. Тогда для $L(2)$ будет иметь место следующее соотношение:

$$\begin{aligned}L(2) &= 6a_2b_4 + 20a_4b_2 - 10a_2b_2b_3 - 15a_5 = \\ &= -15\left(-\frac{2}{5}a_2b_4 - \frac{4}{3}a_4b_2 + \frac{2}{3}a_2b_2b_3 + a_5\right) = -15\hat{a}_2.\end{aligned}$$

Исходя из этих формул и формулы (8), получаем $C_1 = -3$ и $C_2 = -15$. (Заметим, что разница между формулами для $L(2)$ в работах [6] и [7] обусловлена тем, что в первой выражение представлено без учета равенства нулю $L(1)$).

Сравним теперь полученные результаты с более общей формулой для $L(1)$ и $L(2)$, продемонстрированной в [3]. Для этого выпишем систему уравнений в виде, представленном в исходной работе:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} = & -y + f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 + f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3 + \\
& + f_{40}x^4 + f_{31}x^3y + f_{22}x^2y^2 + f_{13}xy^3 + f_{04}y^4 + f_{50}x^5 + f_{41}x^4y + \\
& + f_{32}x^3y^2 + f_{23}x^2y^3 + f_{14}xy^4 + f_{05}y^5 + o\left(\left(|x|+|y|\right)^5\right), \\
\dot{y} = & \, x + g_{20}x^2 + g_{11}xy + g_{02}y^2 + g_{30}x^3 + g_{21}x^2y + g_{12}xy^2 + g_{03}y^3 + \\
& + g_{40}x^4 + g_{31}x^3y + g_{22}x^2y^2 + g_{13}xy^3 + g_{04}y^4 + g_{50}x^5 + g_{41}x^4y + \\
& + g_{32}x^3y^2 + g_{23}x^2y^3 + g_{14}xy^4 + g_{05}y^5 + o\left(\left(|x|+|y|\right)^5\right).
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы данная система соответствовала виду системы (4), (6), (7), сделаем в ней циклическую замену переменных (поменяем местами $x$ и $y$), примем все коэффициенты $f_{ij}$ и $g_{ij}$ кроме $f_{0i}$ и $g_{0i}$ равными нулю. С учетом того, что $f_{0i} = -b_i$, $g_{0i} = -a_i$, получим

$$L(1) = \frac{\pi}{4}\left(3f_{03} + 2f_{02}g_{02}\right) = \frac{\pi}{4}\left(-3a_3 + 2a_2b_2\right) = -\frac{3\pi}{4}\left(-\frac{2}{3}a_2b_2 + a_3\right) = -\frac{3\pi}{4}\hat{a}_1 .$$

В качестве следствия получаем, что $C_1 = -\frac{3\pi}{4} < 0$. Приравняв $L(1)$ к нулю и приняв $a_3 = \frac{2}{3}a_2b_2$, получаем

$$
\begin{aligned}
L(2) &= -\frac{\pi}{72}\left(-60a_4b_2 + 30a_2b_2b_3 - 18a_2b_4 + 45a_5\right) = \\
&= -\frac{45\pi}{72}\left(\frac{2}{3}a_2b_2b_3 - \frac{2}{5}a_2b_4 - \frac{4}{3}a_4b_2 + a_5\right) = -\frac{5\pi}{8}\hat{a}_2 ,
\end{aligned}
$$

откуда $C_2 = -\frac{5\pi}{8} < 0$.

Выражения $L(1)$ и $L(2)$ лишь знаком отличаются от соответствующих результатов в работе [3]. Отличие объясняется приведенной выше заменой переменных.

Причина, по которой константы $C_1$ и $C_2$ в двух рассмотренных случаях сравнения с работами [6], [7] и [3] отличаются друг от друга связаны с различиями в методах вычисления ляпуновских величин. Заметим, однако, что абсолютная величина констант $C_1$ и $C_2$ не влияет на определение числа малоамплитудных предельных циклов.

В качестве основного результата мы можем теперь сформулировать следующую теорему:

**Теорема.** Для системы уравнений Льенара (4), (6) и (7) имеет место формула для вычисления ляпуновских величин

$$L(k) = C_k \hat{a}_k,$$

где $C_k < 0$, а значения $\hat{a}_k$ вычисляются по формуле

$$\hat{a}_k = \sum_{i=1}^{2k+1} a_i S_{2k+1,i} .$$

**Заключение**

В результате проделанной работы была получена расчетная формула, позволяющая определить величины Ляпунова произвольного порядка для систем Льенара вида (4), (6) и (7) с точностью до отрицательного множителя. Насколько известно авторам, данные результаты получены впервые. Было проведено сравнение вычислений с известными формулами для первой и второй ляпуновских величин, где на примерах была показана применимость данного метода в исследовании существования малоамплитудных предельных циклов в системе Льенара. Таким образом, технически реализован метод ([7]), позволяющий определять ляпуновские величины, что дает возможность оценивать количество малоамплитудных предельных циклов, возникающих из неподвижной точки систем Льенара. Преимуществом данного метода является то, что ляпуновские величины представлены в явном виде в терминах коэффициентов системы уравнений Льенара. Поэтому данный метод легко реализуется на компьютере, в том числе за счет использования таких средств как полиномы Белла, широко представленных в различном математическом программном обеспечении.

В дальнейшем планируется изучение данного метода при исследовании проблемы числа предельных циклов в системе Льенара, а также оптимизация алгоритма вычисления коэффициентов $\hat{a}_k$.

**Литература**

1. Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр // Мат. сборник (Н. С.). 1952. № 1. С. 181–196.

2. Дворянинов С. В., Сильванович М. И. О формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции // Матем. обр. 2009. № 1. С. 22–26.

3. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Кудряшова Е. В., Кузнецов О. А. Современные методы символьных вычислений: ляпуновские величины и 16-я проблема Гильберта // Труды СПИИРАН. 2011. № 16. С. 5–36.

4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.

5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Москва. Наука. 1961. С. 190–191.

6. Lloyd N. G., Lynch. S. Small-amplitude limit cycles of certain Liénard system // Proceeding of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1988. № 1854. С. 199–208.

7. Lynch S. Symbolic computation of Lyapunov quantities and the second part of Hilbert's sixteenth problem. Chapter in the book Differential Equations with Symbolic Computations. 2005. С. 1–22.

8. Warren P. Johnson. The curious history of Faà di Bruno's formula // The American Mathematical Monthly. 2002. № 3. С. 217–234.

9. Проблемы Гильберта: сборник / под. ред. Александрова П. С. Москва. Наука, 1969. С. 48–49.