

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

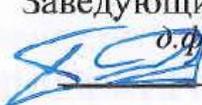
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой

 д.ф.-м.н., доцент

Татосов А.В.

2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАСЫЩЕННЫХ
ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

01.04.01 Математика

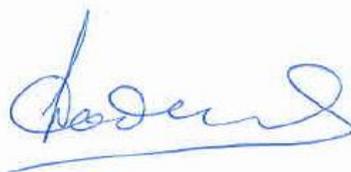
Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу
Студент 2 курса
очной формы обучения



Легостаев
Дмитрий
Юрьевич

Руководитель работы
д.ф.-м.н.



Родионов
Сергей
Павлович

Рецензент
к.ф.-м.н.
с.н.с. ТюмФ ИТПМ СО РАН



Игошин
Дмитрий
Евгеньевич

Тюмень, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	4
1.1. Математическая модель	4
1.2. Моделирование трещин.....	7
2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЫ	9
2.1. Модель вмещающей среды	9
2.2. Модель фильтрации	11
2.3. Дискретизация уравнений теории упругости	14
2.4. Дискретизация уравнения фильтрации.....	18
3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ФЛЮИДО-ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	20
3.1. Стратегии решения	20
3.2. Итерационно связанные методы	21
3.3. Связанность задачи фильтрации и геомеханики	23
3.4. Тестирование	24
4. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ ТРЕЩИН	39
4.1. Представление трещин в теории упругости.....	39
4.2. Фильтрация в дискретных трещинах	40
4.3. Пример численного моделирования	42
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	53

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно при моделировании разработки нефтегазовых месторождений основное внимание уделяется фильтрационным процессам. Однако известен ряд проблем, анализ которых требует полноценного учета напряженно-деформированного состояния пластовой системы. В этом случае для описания системы «пласт»–«флюид» обычно используется модель пороупругой среды, которая позволяет описать фильтрацию флюида в порах совместно с напряженно-деформированным состоянием вмещающей среды.

Определяющее влияние геомеханических эффектов наблюдается в трещиноватых пластах, интерес представляет изучение влияния напряженно-деформированного состояния таких систем на фильтрационные потоки.

Цель работы – численное исследование пороупругой сред содержащей одиночную трещину.

Задачи, поставленные при выполнении работы:

1. Изучение математической модели и методов численного моделирования задач пороупругости.
2. Разработка программы для совместного двумерного флюидо-геомеханического моделирования с использованием неструктурированных расчетных сеток.
3. Тестирование разработанной программы на основе задач пороупругости имеющих аналитическое решение.
4. Исследование скорости сходимости итерационных алгоритмов решения совместной задачи.
5. Применение модели дискретной трещины для совместного моделирования. Численное исследование среды, содержащей одиночную трещину.

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Глава включает в себя обзор литературы отечественных и зарубежных источников, посвященных гидродинамическому и геомеханическому моделированию пороупругих сред.

1.1. Математическая модель

Модель Био. Теоретическая основа геомеханики была впервые представлена Карлом Терцаги в результате проведения им серии лабораторных экспериментов [9]. Также Терцаги [10] ввел концепцию эффективных напряжений, которая хорошо зарекомендовала себя в прикладных задачах и повлияла на дальнейшие исследования.

В [14] Био представил основные уравнения для описания процесса трехмерной консолидации. Эта модель считается основой для вычислительной геомеханики, она описывает процессы консолидации горных пород и изменение порового давления насыщающего флюида. Коэффициент Био и закон эффективных напряжений в приведенном виде были впервые представлены в данной работе.

$$\sigma' = \sigma + bpI$$

где σ' – тензор эффективных напряжений, σ – тензор общих напряжений, I – единичная матрица, p – поровое давление, b – коэффициент Био, который может быть определен [19] как

$$b = 1 - \frac{K_{dr}}{K_s}$$

K_{dr} – объемный модуль горной породы в условиях дренажа, K_s – объемный модуль скелета горной породы.

В [13] резюмирован ряд исследовательских работ в области геомеханики и упомянута возможность применения численных методов. В этих и ряде других работ представлен ряд аналитических задач. По мере развития численных методов и вычислительной техники большее количество

исследований стало проводиться в области численных решений геомеханических проблем.

Классическое гидродинамическое моделирование. Основное внимание в классическом гидродинамическом моделировании уделяется многофазным и многокомпонентным фильтрационным потокам в пористой среде. Учет состояния скелета горной породы среды осуществляется путем задания зависимости пористости от давления флюида. Существенный вклад в развитие подземной гидродинамики внесли работы Л.С. Лейбензона [7] и М. Маскета [8].

В работе К.С. Басниева [3] изложена теория фильтрация жидкостей и газов в однородных и неоднородных, изотропных и анизотропных пористых и трещиноватых средах. Рассмотрены задачи стационарной и нестационарной фильтрации, изложены основные положения теории упругого режима, постановки задач и их аналитические и приближенные решения.

Численному гидродинамическому моделированию пластовых систем посвящено множество работ, одним из наиболее фундаментальных трудов является работа Х. Азиза [1], в которой представлены основные подходы и модели современного гидродинамического моделирования. В отечественной литературе широко известна работа Р.Д. Каневской [5].

Совместное моделирование. Однако, классической теории фильтрации не всегда достаточно, в ряде случаев механические эффекты играют решающую роль в процессах разработки месторождений углеводородов [6]. Для решения данных задач может использоваться модель пороупругой среды, которая позволяет совместно описывать как фильтрационные процессы, так и напряженно-деформированное состояние вмещающих горных пород.

В работе Н.-У. Chen [15] проведен обзор и анализ математической модели используемой для совместного моделирования состояния пороупругих сред и насыщающих их флюидов. Так же в статье показано, что

классическая модель фильтрации, широко используемая при моделировании нитяных резервуаров, является частным случаем рассматриваемой модели.

В работе А. Settari [27] представлен подход для совместного моделирования пластовых систем. Метод предполагает итерационную связь гидродинамического и механического симуляторов, связь осуществляется через пористость (последовательный пересчет с использованием обновленных полей давления и напряжения). Представлено тестирование алгоритма и его сравнение с несвязанным решением. Дальнейшее развитие алгоритма приведено в [28], также в работе рассмотрены алгоритмы совместного моделирования с разной степенью связи: слабосвязанные (односвязные), явно связанные, итерационно связанные и полностью связанные.

В работе R.H. Dean[18] проведено сравнение явно связанного, итерационно связанного и полностью связанного подхода для решения ряда задач. Исследовались постановки с различными граничными условиями, однофазный и трехфазный случаи.

В работе И.А. Гарагаша [4] выполнено связанное гидродинамическое и геомеханическое моделирование процесса разработки месторождения с учётом изменения напряжённого состояния в пласте-коллекторе и прилегающей толще в процессе отбора флюида. При совместном моделировании использовался алгоритм со слабой связью. В работе приведена оценка изменений напряжений, действующих на ствол скважин во время разработки, и выполнен расчет устойчивости ствола одной из скважин при бурении.

При совместном моделировании пластовых систем остро стоит вопрос в выборе эффективных и устойчивых методов решения. Анализ устойчивости и сходимости последовательных методов решения совместной задачи проводился в работах J. Kim[23, 24]. В данных работах проведен анализ влияния периметров исследуемой системы на свойства численных схем. Методы расщепления системы уравнений для итерационного решения

разделены на две группы: для которых первым решается уравнение фильтрации, для которых первым решается уравнение теории упругости. Авторы показывают, что методы «с перетоком» (drained split) и «с фиксированными напряжениями» (fixed-strain split) являются условно устойчивыми, в то время как схемы «без перетоков» (undrained split) и «с фиксированными напряжениями» (fixed-stress split) – безусловно устойчивыми. Аналогичные результаты получены в работе A. Mikelić[26].

1.2. Моделирование трещин

Для гидродинамического моделирования трещиноватых коллекторов используют следующие модели: модель двойной среды и модель дискретных трещин. Выбор модели зависит от характеристик трещиноватого коллектора. Для сетей хорошо связанных метких трещин используют модель двойной среды, а для описания систем протяженных слабосвязанных трещин – модель дискретных трещин.

Подход к моделированию двойной среды представлен в работе Г.И. Баренблатта [2]. Трещиновато-пористая среда рассматривается как совокупность пористых блоков, разделенных между собой высокопроводящими каналами. Флюид насыщает пористые блоки и трещины, между блоками и трещинами происходит переток флюида.

Применение модели дискретных трещин для гидродинамического моделирования нефтяных резервуаров описано в работе M. Karimi-Fard[22], представлена упрощенная модель дискретных трещин, применимая для двух- и трехмерных задач. В рамках данного подхода трещины представляются упрощенными одномерными или двумерными объектами, для которых строится расчетная сетка. Данная модель включает в себя связи матрица-матрица, матрица-трещина, трещина-трещина. В статье приведено сравнение модели дискретных трещин с решением, полученным на коммерческом симуляторе.

При совместном флюидо-геомеханическом моделировании трещиноватых резервуаров появляется необходимость связывать уравнения фильтрации и уравнения теории упругости во всей расчетной области, включая области трещиноватости.

В работе М.А. Bagheri[12] исследовались применение модели двойной среды, использование авторами совместной модели позволило рассчитать деформации в скелете горной породы и в системе трещин, их влияние на фильтрационно-емкостные свойства сред. Влияние напряженного состояния на матрицу и трещины существенно отличается, авторы показывают, что деформации сильно влияют на проницаемость системы трещин.

В работе Н.-У. Chen[16] обобщены подходы к совместному флюидо-геомеханическому моделированию с использованием двойной среды, проведено сравнение различных методов.

В работе Е.Р. Jorge[21] представлен подход совместного численного моделирования двухфазной фильтрации в пороупругой среде для двумерной области с дискретными трещинами. На синтетической задаче были продемонстрированы некоторые геомеханические эффекты, которые могут иметь место в трещиноватых нефтяных резервуарах.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В данной главе представлена математическая модель, используемая при флюидо-геомеханическом моделировании поронасыщенных сред. Рассмотрено применение метода контрольных объемов (МКО) для получения дискретных аналогов уравнений теории упругости и фильтрации.

2.1. Модель вмещающей среды

Запишем уравнения механического равновесия вмещающей среды

$$\nabla \sigma = \rho \vec{f} \quad (1)$$

где σ – тензор напряжений, ρ – плотность, \vec{f} – объемные силы.

Выражение (1) должно описывать напряженно-деформированное состояние поронасыщенной среды. Согласно теории Био изменение эффективные напряжения, действующие на скелет горной породы, складываются из общих напряжений и порового давления насыщающего флюида. Закон эффективных напряжений может быть записан в виде

$$\sigma' = \sigma + b p I \quad (2)$$

где σ' – тензор эффективных напряжений, σ – тензор общих напряжений, p – поровое давление, I – единичная матрица, b – коэффициент Био, который может быть определен как

$$b = 1 - \frac{K_{dr}}{K_s} \quad (3)$$

K_{dr} – объемный модуль горной породы в условиях дренажа, K_s – объемный модуль скелета горной породы. Коэффициент Био может принимать значение от 0 до 1. Коэффициент $b = 0$ характеризует горные породы, в которых поры не связаны между собой, а $b = 1$ – породы с высокой пористостью.

Тензор малых деформаций ε определяется как

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] \quad (4)$$

где \vec{u} – вектор перемещений.

Закон Гука, связывающий тензор малых напряжений и тензор деформаций, замыкает систему

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \quad (5)$$

где $tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ – след тензора деформаций, μ и λ коэффициенты Ляме, которые могут быть записаны через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6)$$

и

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - \nu)} - \text{плоско напряженное состояние} \\ \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} - \text{плоско деформированное состояние} \end{cases} \quad (7)$$

Запишем выражение для полных напряжений в поронасыщенной среде, для этого воспользуемся (2) и (5)

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} - bp\mathbf{I} \quad (8)$$

С учетом этого основное уравнение механического равновесия для поронасыщенной среды (1) может быть переписано через вектор перемещений \vec{u}

$$\nabla[2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}] - b\nabla p\mathbf{I} = \rho\vec{f} \quad (9)$$

Для удобства дальнейшего использования перепишем уравнение (9) в виде

$$\nabla[\mu\nabla\vec{u} + \mu(\nabla\vec{u})^T + \lambda I tr(\nabla\vec{u})] - b\nabla p\mathbf{I} = \rho\vec{f} \quad (10)$$

Получим уравнение, связывающее объемные деформации и нормальные составляющие тензора напряжений. Для этого просуммируем нормальные напряжения для осей x, y, z в уравнении (9)

$$\sigma_m = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_v - bp = K_{dr}\varepsilon_v - bp \quad (11)$$

где

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

σ_m – среднее нормальное общее напряжение, ε_v – объемные деформации.

Значения объемного модуля K_{dr} для одномерной, двумерной и трехмерной постановки приведены в Таблица 1.

Таблица 1 Значения K_{dr} для одно-, двух- и трехмерной постановок

Размерность задачи	Деформации	Напряжения	Объемный модуль, K_{dr}
Одномерная	$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0,$ $\varepsilon_{zz} = e \neq 0$	$\sigma_m = \sigma_{zz}$	$\lambda + 2\mu$
Двумерная	$\varepsilon_{xx} = 0,$ $\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = e \neq 0$	$\sigma_m = \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2}$	$\lambda + \mu$
Трехмерная	$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = e \neq 0$	$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$

Для завершения математической модели опишем граничные и начальные условия. Будем рассматривать область Ω с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Граничные условия первого и второго рода для уравнений теории упругости имеют вид:

$$\vec{u} = \vec{u}_b \text{ для } \Gamma_u$$

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{t}_b \text{ для } \Gamma_t$$

где \vec{u}_b – заданный вектор перемещений на границе, \vec{t}_b – сила, приложенная к границе, \vec{n} – внешняя нормаль к границе, Γ_u – граница с заданными перемещениями, Γ_t – граница с заданной силой, $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \partial\Omega$.

Граничные условия для теории упругости запишем в виде

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0 \text{ для } \Omega$$

2.2. Модель фильтрации

Запишем закон сохранения массы для флюида в пористой среде

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \nabla(\varphi\rho\vec{v}_f) = \rho f \quad (12)$$

где φ – пористость, ρ – плотность флюида, \vec{v}_f – скорость движений флюида в поровом пространстве, f – источниковый член. Скорость флюида в поровом пространстве может быть найдена как сумма скоростей движения скелета горной породы и скорости флюида относительно скелета породы

$$\vec{v}_f = \vec{v}_s + \vec{v}_r$$

\vec{v}_s – скорость движения скелета горной породы, \vec{v}_r – относительная скорость движения флюида. Тогда можем записать (12) в виде

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \nabla(\varphi\rho(\vec{v}_s + \vec{v}_r)) = \rho f \quad (13)$$

Проведя преобразования получим

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \nabla(\varphi\rho\vec{v}_s) + \nabla(\varphi\rho\vec{v}_r) = \rho f \quad (14)$$

или

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \vec{v}_s \nabla(\varphi\rho) + \varphi\rho \nabla(\vec{v}_s) + \nabla(\varphi\rho\vec{v}_r) = \rho f \quad (15)$$

Субстанциональная производная может быть записана в виде

$$\frac{d(\varphi\rho)}{dt} = \frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla(\varphi\rho) \quad (16)$$

Принимая во внимание малость деформаций $\left(\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} \gg \vec{v}_s \cdot \nabla(\varphi\rho)\right)$,

можем записать

$$\frac{d(\varphi\rho)}{dt} = \frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla(\varphi\rho) \approx \frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} \quad (17)$$

Тогда перепишем (15) в виде

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \varphi\rho \nabla(\vec{v}_s) + \nabla(\varphi\rho\vec{v}_r) = \rho f \quad (18)$$

От относительной скорости движения флюида мы можем перейти к скорости фильтрации, используемой в законе Дарси. $\vec{v} = \varphi\vec{v}_r$ – скорость фильтрации флюида. Тогда (18) примет вид

$$\frac{\partial(\varphi\rho)}{\partial t} + \varphi\rho\nabla(\vec{v}_s) + \nabla(\rho\vec{v}) = \rho f \quad (19)$$

Запишем уравнение состояния для слабосжимаемого флюида

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (20)$$

Тогда (19) примет вид

$$\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi c \rho \frac{\partial p}{\partial t} + \varphi\rho\nabla \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = \rho f \quad (21)$$

где \vec{u} – вектор смещения ($\vec{v}_s = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$).

Как показано в [17] изменение пористость при учете объемных деформаций имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\varphi - b}{K_s} \frac{\partial p}{\partial t} + (b - \varphi) \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \quad (22)$$

где $\varepsilon_v = \nabla \cdot \vec{u}$ – объемные деформации, b – коэффициент Био, K_s – объемный модуль скелета горной породы. Используя выражение для $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, запишем (21) в виде

$$\rho \left(\frac{\varphi - b}{K_s} \frac{\partial p}{\partial t} + (b - \varphi) \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \right) + \varphi c \rho \frac{\partial p}{\partial t} + \varphi\rho \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = \rho f \quad (23)$$

Проведя преобразования в (23) получим

$$\rho \left(\varphi c_o + \frac{\varphi - b}{K_s} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \rho b \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = \rho f \quad (24)$$

Обозначив, через $\frac{1}{M} = \varphi c + \frac{\varphi - b}{K_s}$ – модуль Био, получим

$$\rho \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho b \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = \rho f \quad (25)$$

Используем в качестве закона движения закон Дарси

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (26)$$

подставляя в (25) получим

$$\frac{1}{M} \rho \frac{\partial p}{\partial t} + \rho b \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} - \nabla \left(\rho \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \rho f \quad (27)$$

Сократив плотность, получим

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + b \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) = f \quad (28)$$

Используя (11) мы можем записать выражение (28) через напряжения

$$\left(\frac{1}{M} + \frac{b^2}{K_{dr}} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{b}{K_{dr}} \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} - \nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) = f \quad (29)$$

Рассмотрим граничные условия первого и второго рода для уравнений теории фильтрации

$$p = p_b \text{ для } \Gamma_p$$

$$\vec{v} \cdot \vec{S}_b = - \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \vec{S}_b = q_b \text{ для } \Gamma_q$$

где p_b – поровое давление на границе, q_b – поток через границу, \vec{S}_b – вектор площади границы, Γ_p – граница с заданным поровым давлением, Γ_v – граница с заданным потоком, $\Gamma_p \cup \Gamma_v = \partial\Omega$.

Начальные условия для фильтрации запишем в виде

$$p|_{t=0} = p_0 \text{ для } \Omega$$

Таким образом, система уравнений, применяемая для совместного гидродинамического и геомеханического моделирования, в случае однофазной фильтрации слабосжимаемого флюида имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + b \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) = f \\ \nabla [\mu \nabla \vec{u} + \mu (\nabla \vec{u})^T + \lambda I \text{tr}(\nabla \vec{u})] - b \nabla p I = \rho \vec{f} \end{cases} \quad (30)$$

2.3. Дискретизация уравнений теории упругости

Для получения дискретного аналога уравнений вычислительная область разбивается на контрольные объемы в процессе построения расчетной сетки, которая может быть структурированной или неструктурированной. Рассмотрим дискретизацию уравнений теории упругости методом контрольного объема.

Проведем интегрирование (10) по контрольному объёму с узлом в точке P имеющему объем V_p и поверхность S_p и.

$$\int_{V_p} [\mu \nabla \vec{u} + \mu (\nabla \vec{u})^T + \lambda \text{Itr}(\nabla \vec{u})] dV - \int_{V_p} b \nabla p dV = \int_{V_p} \rho \vec{f} dV \quad (31)$$

Рассмотрим дискретизацию уравнения (31) по пространству.

Аппроксимация второго порядка точности по пространству получается при условии линейного изменения переменных u вне контрольного объема

$$u(x) = u_P + (x - x_P)(\nabla u)_P \quad (32)$$

Значения объемного интеграла определяется с использованием правила средней точки

$$\int_{V_p} \varphi dV = \varphi_P V_P \quad (33)$$

Рассмотрим интегрирование левой части (31). Используя теорему Остроградского-Гаусса, перейдем от интеграла по объему к интегралу по поверхности, далее интеграл по поверхности разобьем на сумму по граням f контрольного объема. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \int_{V_p} \nabla [\mu \nabla \vec{u} + \mu (\nabla \vec{u})^T + \lambda \text{Itr}(\nabla \vec{u})] dV \\ &= \oint_{S_p} [\mu \nabla \vec{u} + \mu (\nabla \vec{u})^T + \lambda \text{Itr}(\nabla \vec{u})] d\vec{S} \\ &= \sum_f \mu_f (\nabla \vec{u})_f \vec{S}_f + \mu_f (\nabla \vec{u})_f^T \vec{S}_f + \lambda_f \text{Itr}(\nabla \vec{u})_f \vec{S}_f \end{aligned} \quad (34)$$

Будем рассматривать два типа дискретизации:

1) *Неявная дискретизация.* При дискретизации будем считать, что вектор нормали грани \vec{S}_f и вектор, соединяющий центры соседних ячеек, $\vec{d}_N = \overline{PN}$ параллельны. Тогда

$$\vec{S}_f (\nabla \vec{u})_f = |\vec{S}_f| \frac{\vec{u}_N - \vec{u}_P}{|\vec{d}_N|} \quad (35)$$

Это выражение позволяет получить алгебраические уравнения, в которых значение ∇u_P зависит только от значений в точке P и ее ближайших соседях N :

$$\oint_{S_p} \mu \nabla \vec{u} dS = a_P \vec{u}_P + \sum_N a_N \vec{u}_N \quad (36)$$

где

$$a_N = \mu_f \frac{|\vec{S}_f|}{|\vec{d}_N|}$$

и

$$a_P = \sum_N -a_N$$

Если векторы \vec{S}_f и \vec{d}_N не параллельны, необходимо вводить поправку на неортогональность.

2) *Явная дискретизация.* В данном подходе для дискретизации используются интерполяция градиента:

$$(\nabla \vec{u})_f = f_x (\nabla \vec{u})_P + (1 - f_x) (\nabla \vec{u})_N \quad (37)$$

где f_x – весовой коэффициент. В отличие от неявной дискретизации, расчет осуществляется на основе известного значения $\nabla \vec{u}$, т.е. с использованием текущего распределения \vec{u} .

Данный метод требует нахождения градиента величины в узлах контрольных объемов. Для его нахождения используется метод наименьших квадратов.

Расчет градиента. При расчете градиента в узлах сетки используется метод наименьших квадратов. Будем рассматривать узел P и набор соседних точек N . Предполагается, что некоторая переменная ψ между точками имеет линейный вид, тогда ошибка для узла N равна

$$e_N = \psi_N - (\psi_P + d_N (\nabla \psi)_P) \quad (38)$$

Для нахождения градиента $\nabla \psi$ продифференцируем $e_P^2 = \sum_N \left(\frac{e_N}{d_N}\right)^2$ по компонентам вектора $\nabla \psi$, в результате получим

$$(\nabla \psi)_P = \sum_N G^{-1} B \quad (39)$$

где

$$G = \begin{bmatrix} \sum_N \frac{(x_P - x_N)(x_P - x_N)}{d_N^2} & \sum_N \frac{(y_P - y_N)(x_P - x_N)}{d_N^2} & \sum_N \frac{(z_P - z_N)(x_P - x_N)}{d_N^2} \\ \sum_N \frac{(x_P - x_N)(y_P - y_N)}{d_N^2} & \sum_N \frac{(y_P - y_N)(y_P - y_N)}{d_N^2} & \sum_N \frac{(z_P - z_N)(y_P - y_N)}{d_N^2} \\ \sum_N \frac{(x_P - x_N)(z_P - z_N)}{d_N^2} & \sum_N \frac{(y_P - y_N)(z_P - z_N)}{d_N^2} & \sum_N \frac{(z_P - z_N)(z_P - z_N)}{d_N^2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \sum_N \frac{(\varphi_P - \varphi_N)(x_P - x_N)}{d_N^2} \\ \sum_N \frac{(\varphi_P - \varphi_N)(y_P - y_N)}{d_N^2} \\ \sum_N \frac{(\varphi_P - \varphi_N)(x_P - x_N)}{d_N^2} \end{bmatrix}$$

$$(\nabla\varphi)_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Данный подход обладает вторым порядком точности независимо от расположения соседних узлов. Матрица G может быть найдена только один раз, что повышает вычислительную эффективность алгоритма.

Для дискретизации первого члена $\mu\nabla\vec{u}$ уравнения (31) будем использовать метод неявной дискретизации, другие члены уравнения, $\mu(\nabla\vec{u})^T$ и $\lambda\text{tr}(\nabla\vec{u})$, дискретизируются с помощью явного метода, поскольку они содержат межкомпонентную связь элементов вектора \vec{u} .

Для дискретизации члена $b\nabla p$ воспользуемся выражением (33):

$$\int_{V_p} b\nabla p dV = V_p b(\nabla p)_P \quad (40)$$

Значение $(\nabla p)_P$ определяется по известному распределению порового давления p с помощью метода наименьших квадратов.

Таким образом, при дискретизации уравнения (10) будем применять следующие подходы:

$$\underbrace{\nabla(\mu\nabla\vec{u})}_{\text{неявно}} + \underbrace{\nabla[\mu(\nabla\vec{u})^T + \lambda\text{Tr}(\nabla\vec{u})]}_{\text{явно}} - \underbrace{b\nabla p}_{\text{явно}} = \rho\vec{f} \quad (41)$$

Как показано в [20] уравнение (41) записанное в виде

$$\underbrace{\nabla[(2\mu + \lambda)\nabla\vec{u}]}_{\text{неявно}} + \underbrace{\nabla[\mu(\nabla\vec{u})^T + \lambda\text{Tr}(\nabla\vec{u}) - (\mu + \lambda)\nabla\vec{u}]}_{\text{явно}} - \underbrace{b\nabla p}_{\text{явно}} = \rho\vec{f} \quad (42)$$

обладает большей устойчивостью при численном решении.

2.4. Дискретизация уравнения фильтрации

Рассмотрим дискретизацию уравнений фильтрации методом контрольного объема, для этого запишем уравнение (28)

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_v) - \nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) = f$$

Проведем интегрирование по контрольному объему с узлом в точке P , объемом V_p и поверхностью S_p

$$\int_{V_p} \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + \int_{V_p} b \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_v) - \int_{V_p} \nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \int_{V_p} f \quad (43)$$

Для дискретизации по пространству члена $\nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right)$, воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса и перейдем к интегралу по поверхности

$$\int_{V_p} \nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) dV = \oint_{S_p} \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) d\vec{S} = \sum_f \left(\frac{k}{\mu} \right)_f \vec{S}_f (\nabla p)_f \quad (44)$$

Для нахождения $(\nabla p)_f$ воспользуемся неявной схемой

$$\vec{S}_f (\nabla p)_f = |\vec{S}_f| \frac{u_N - u_P}{|\vec{d}_N|} \quad (45)$$

Тогда

$$\oint_{S_p} \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) d\vec{S} = a_P p_P + \sum_N a_N p_N \quad (46)$$

где

$$a_N = \left(\frac{k}{\mu} \right)_f \frac{|\vec{S}_f|}{|\vec{d}_N|}$$

и

$$a_P = \sum_N -a_N$$

Проводя дискретизацию по времени и интегрируя по пространству член $\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t}$, получим

$$\int_{V_p} \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} dV = \frac{V_p}{M} \frac{p_P^{n+1} - p_P^n}{\Delta t} \quad (47)$$

где $p^{n,n+1}$ – давление на n и $n + 1$ временном шаге.

Аналогично поступим с $b \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_v)$

$$\int_{V_p} b \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_v) dV = V_p b \frac{\varepsilon_{vP}^{n+1} - \varepsilon_{vP}^n}{\Delta t} \quad (48)$$

Значение $\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ будем искать с помощью метода наименьших квадратов по известному распределению компонент вектора \vec{u} .

Таким образом, при дискретизации уравнения фильтрации (28) будем применять следующие подходы:

$$\underbrace{\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t}}_{\text{неявно}} + \underbrace{b \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_v)}_{\text{явно}} - \underbrace{\nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right)}_{\text{неявно}} = f \quad (49)$$

3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ФЛЮИДО-ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной главе описаны подходы к численному флюидо-геомеханическому моделированию. Представлены методы итерационного решения совместной задачи, приведен результат тестирования их программной реализации.

3.1. Стратегии решения

Для связи гидродинамической и геомеханической моделей используются различные методы совместного решения. Способы связи обычно разделяют на четыре группы: полностью связанные, итерационно связанные, явно связанные, слабо связанные. Кратко рассмотрим характерные особенности каждого способа.

1. *Полностью связанный алгоритм.* В этом способе связи главные уравнения для фильтрации и геомеханики решаются совместно на каждом шаге по времени (Рисунок 1). Схема с полной связью, безусловно, является наиболее устойчивой, но требует разработки, единого флюидо-геомеханического симулятора и более требовательна к вычислительным затратам.

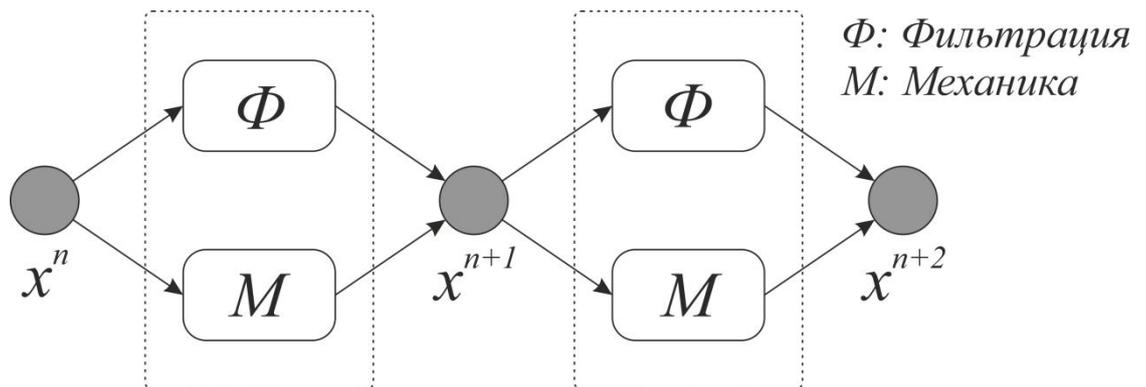


Рисунок 1 Графическое представление алгоритма с полной связью

2. *Итерационно связанный алгоритм.* В данном подходе первым решается уравнение гидродинамики, или геомеханики, затем данные приближенного решения передаются в другой модуль. Эта процедура повторяется на каждом шаге по времени до достижения сходимости (Рисунок

2). Сходимость данного алгоритма близка с полностью связанным методом. Последовательные схемы имеют ряд преимуществ над схемами с полной связью. При таком подходе у задач гидродинамики и геомеханики может быть задан разный размер расчетной области. Это обеспечивает корректное задания граничных условий, т.к. геомеханика зачастую учитывает не только продуктивный пласт, но и прилежащие горные породы.

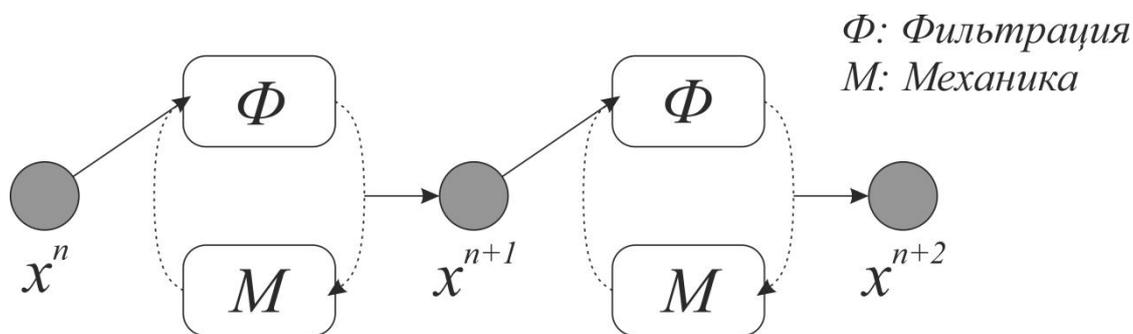


Рисунок 2 Графическое представление алгоритма с итерационной связью.

3. *Однопроходный метод.* Этот метод является частным случаем итерационно связанного алгоритма, в котором используется только одна итерация на каждом временном шаге.

4. *Алгоритм со слабой связью.* В данном методе связь между гидродинамическим и геомеханическим блоком осуществляется только после нескольких шагов по времени. Этот метод по сравнению с другими требует меньших вычислительных затрат, но в тоже время он является наименее точным.

3.2. Итерационно связанные методы

Для реализации итерационного решения системы уравнений, состоящей из уравнений для геомеханики и гидродинамики, производят ее расщепление. Обычно рассматривают четыре метода реализации итерационно связанного алгоритма.

Рассмотрим варианты расщепления, в которых уравнения механики решаются первыми, а затем решается уравнение фильтрации (Рисунок 3):

расщепление «с перетоком» (Drained split), расщепление «без перетока» (Undrained split).

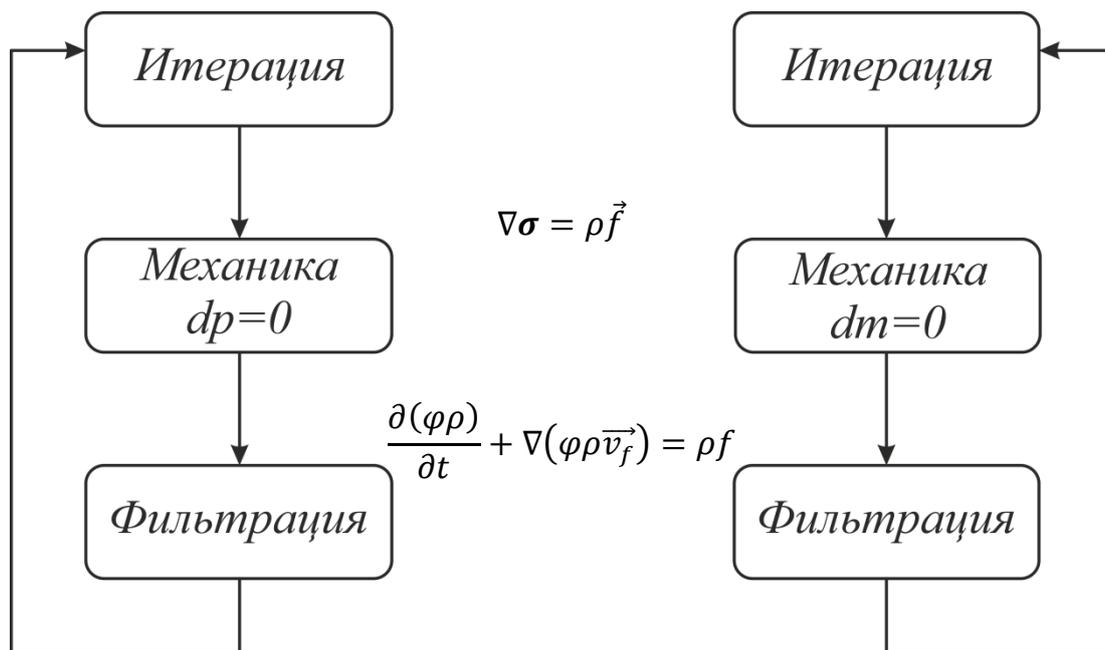


Рисунок 3 Последовательные методы решения «с перетоком» и «без перетоков»

1. *Расщепление «с перетоком».* В данном варианте расщепления сначала решается геомеханическая задача, а затем задача фильтрации. Во время решения геомеханики поровое давление фиксируется $\delta p = 0$, т.е. принимается $p^{k+1} = p^k$ (верхний индекс k обозначает номер итерации). Физический смысл схемы заключается в том, что сохранение давления под воздействием внешней нагрузкой обеспечивается за счет перетоков флюида между расчетными ячейками.

2. *Расщепление «без перетоков».* В этом способе для решения геомеханики используется заранее оцененное значение порового давления, которое вычисляется при предположении, что изменения массы флюида в ячейке не происходит $dm = 0$, т.е. при решении геомеханической задачи не происходит преретоков. Оценка давления в ячейке производится из выражения $\frac{1}{M} \delta p + \delta \varepsilon_v = 0$, тогда для численной схемы может быть получена оценка давления для $k + 1$ итерации

$$p^{k+1} = p^k - bM(\varepsilon_v^{k+1} - \varepsilon_v^k)$$

Далее рассмотрим итерационные методы, в которых сначала решается уравнения фильтрации, а затем уравнения теории упругости (Рисунок 4): расщепление «с фиксированными деформациями» (Fixed-strain split) и «с фиксированными напряжениями» (Fixed-sterss split).

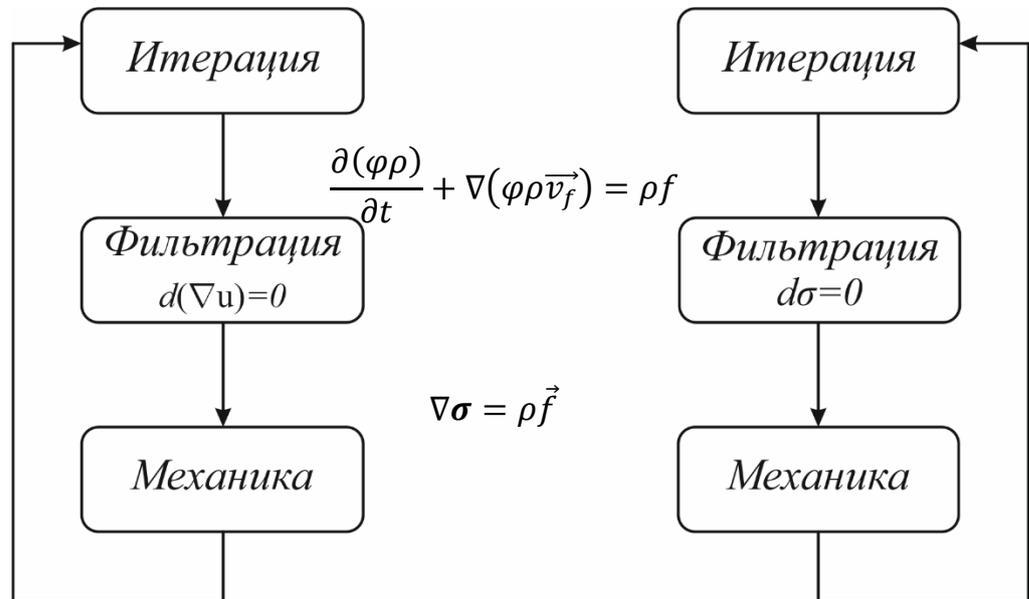


Рисунок 4 Последовательные методы решения.

3. *Расщепление «с фиксированными деформациями».* В данном варианте расщепления сначала решается задача фильтрации, в которой фиксируется изменение объемных деформаций скелета горной породы $\delta\varepsilon_v = 0$, т.е. значение берется с предыдущей итерации $\varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k$. Затем решается задача механики и цикл повторяется до достижения сходимости.

4. *Расщепление «с фиксированными напряжениями».* В данном подходе сначала решается задача фильтрации с фиксацией изменения среднего нормального напряжения $\delta\sigma_m = 0$. Оценка деформации в ячейке происходит из выражения $K_{dr}\delta\varepsilon - b\delta p = 0$, тогда для численной схемы может быть получена оценка объемных деформаций для $k + 1$ итерации

$$\varepsilon_v^{k+1} = \varepsilon_v^k + \frac{b}{K_{dr}}(p^{k+1} - p^k)$$

3.3. Связанность задачи фильтрации и геомеханики

Введем в рассмотрение безразмерный коэффициент τ , который описывает степень связанности уравнений механики и фильтрации.

$$\tau = \frac{b^2 M}{K_{dr}}$$

Связанности задачи фильтрации с задачей теории упругости определяется отношением «жесткостей» твердого тела и насыщающего его флюида. Связанность является высокой, когда «жесткость» флюида $\frac{1}{M}$ меньше «жесткости» твердого скелета $\frac{b}{K_{dr}}$.

$$\begin{cases} \tau < 1 \equiv \frac{b^2}{K_{dr}} < \frac{1}{M} - \text{слабая связь} \\ \tau > 1 \equiv \frac{b^2}{K_{dr}} > \frac{1}{M} - \text{сильная связь} \end{cases}$$

Таким образом, связанность уравнений фильтрации и упругости тем больше, чем меньше эффективная сжимаемость флюида. И напротив чем больше объемный модуль горной породы, тем меньше связанность уравнений. Так же τ зависит от вида граничных условий заданных для теории упругости, значения K_{dr} для возможных постановок приведены в Таблица 1.

Исследование влияния коэффициента τ на методы итерационного решения приведено в следующем параграфе.

3.4. Тестирование

Задача Терцаги. Тестирование корректности подхода к совместному моделированию проводилось на основе задачи Терцаги [14].

В задаче рассматривается колонна горной породы находящаяся под нагрузкой p_0 , для которой латеральные расширения невозможны (Рисунок 5). Поровое пространство в горной породе заполнено водой, предполагается, что вода не может протекать через боковую поверхность и через нижнюю границу образца, но свободно может вытекать из него через верхнюю границу.

Направим ось y вниз, единственной компонентой деформации будет $u = u_y$. Деформация горной породы u и поровое давление p будут зависеть только от координаты y и времени t .

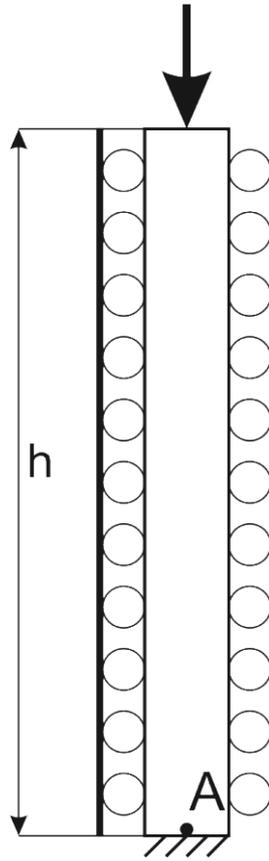


Рисунок 5 Постановка задачи Терцаги

Запишем полученную нами ранее систему (30) для одномерного случая

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{dr} \frac{\partial u}{\partial y} + bp \right) = 0 \end{cases}$$

Выразив $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}$ из уравнения равновесия скелета горной породы и подставив его в уравнение фильтрации получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} &= \frac{b}{K_{dr}} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{b^2}{K_{dr}} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\left(\frac{1}{M} + \frac{b^2}{K_{dr}} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (50)$$

Примем верхнюю границу колонны высотой h за начало координат, тогда запишем граничные условия в виде:

$$p = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ при } y = h$$

Первое условие говорит о том, что давление флюида под нагрузкой равно 0, т.к. проницаемость нагружающей плиты принимается существенно больше, чем проницаемость горной породы. Второе граничное условие – условие непротекания на нижней границе.

Примем следующие начальные условия

$$p(y, t) = p_0,$$

$$u(y, t) = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями имеет аналитическое решение:

$$p = \frac{4}{\pi} p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4h^2} a^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2h} y\right) \quad (51)$$

где $a^2 = \frac{k}{\mu \left(\frac{1}{M} + \frac{b^2}{K_{dr}}\right)}$ – коэффициент консолидации.

Деформация образца может быть найдена из выражения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{bp}{K_{dr}} - \frac{p_0}{K_{dr}}$$

Тогда выражение для деформаций рассматриваемой колонны будет записано в виде

$$u_0 = - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial z} dz = - \frac{8}{\pi^2} \frac{bh}{K_{dr}} p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4h^2} a^2 t} + \frac{h}{K_{dr}} p_0 \quad (52)$$

Сразу после нагрузки ($t = 0$), деформация равна

$$u_i = - \frac{8}{\pi^2} \frac{bh}{K_{dr}} p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{h}{K_{dr}} p_0$$

Окончательная деформация ($t = \infty$) может быть записана в виде

$$u_{\infty} = \frac{h}{K_{dr}} p_0$$

Проведено сравнение результатов численного решения с приведенным аналитическим решением. Граничные условия, принятые для численного расчета:

$$\begin{aligned}
 x = 0: u_x = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
 x = 1: u_x = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\
 y = 0: u_x = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
 y = h: \sigma_{xx} = p_0, p = 0
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Расчет проводился на неструктурированной сетке (Рисунок 6), состоящей из 238 элементов, размер расчетной области составляли 1x10 м. Количество временных шагов при расчете равнялось 100, размер временного шага составлял 10 секунд, общее время моделирования составило 1000 секунд.

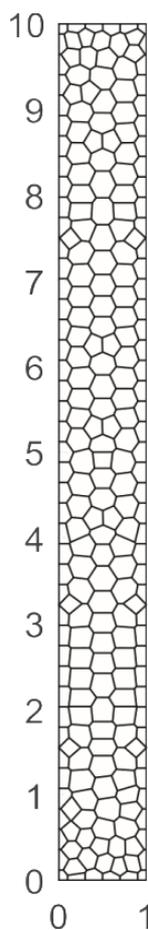


Рисунок 6 Неструктурированная расчетная сетка для задачи Терцаги

В Таблица 2 приведены значения параметров моделируемой среды.

Таблица 2 Параметры пороупругой системы для задачи Терцаги

Параметр	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Пористость	φ	0.3	–
Проницаемость	k	50	мД
Сжимаемость флюида	C_f	$5 \cdot 10^{-5}$	атм ⁻¹
Вязкость флюида	μ	1	сП
Модуль Юнга	E	$1 \cdot 10^5$	Атм
Коэффициент Пуассона	ν	0.2	–
Коэффициент Био	b	1	–

На Рисунок 7, Рисунок 8 приведено сравнение 4-х схем расщепления с аналитическим решением. Для всех подходов получено хорошее совпадение численных результатов для давления и деформаций с приведенным аналитическим решением.

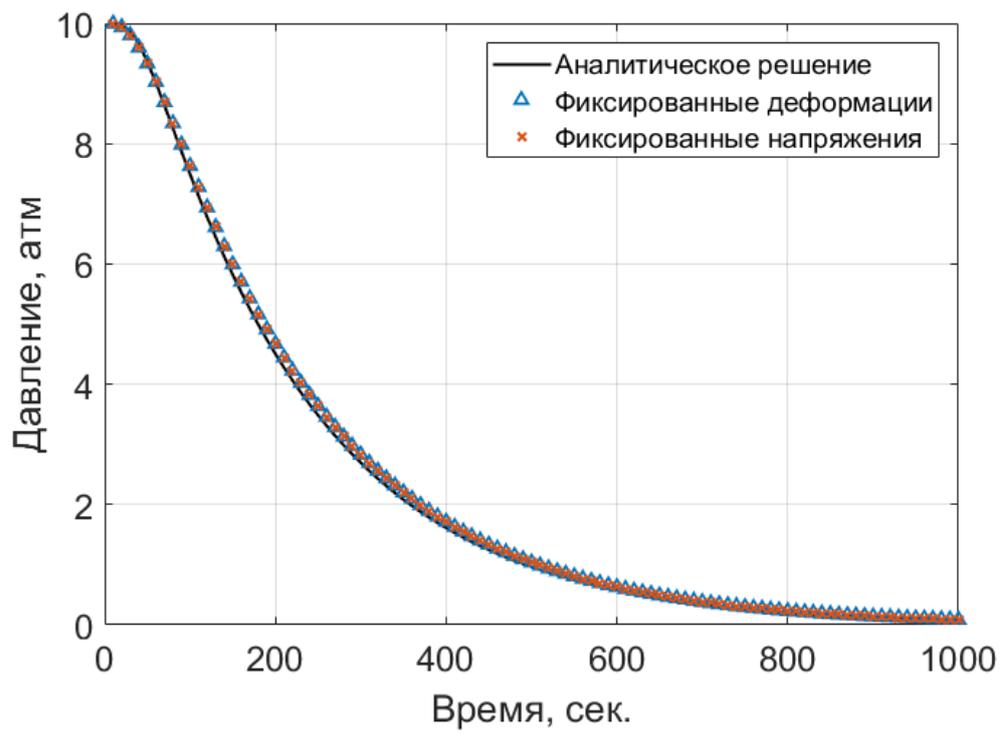
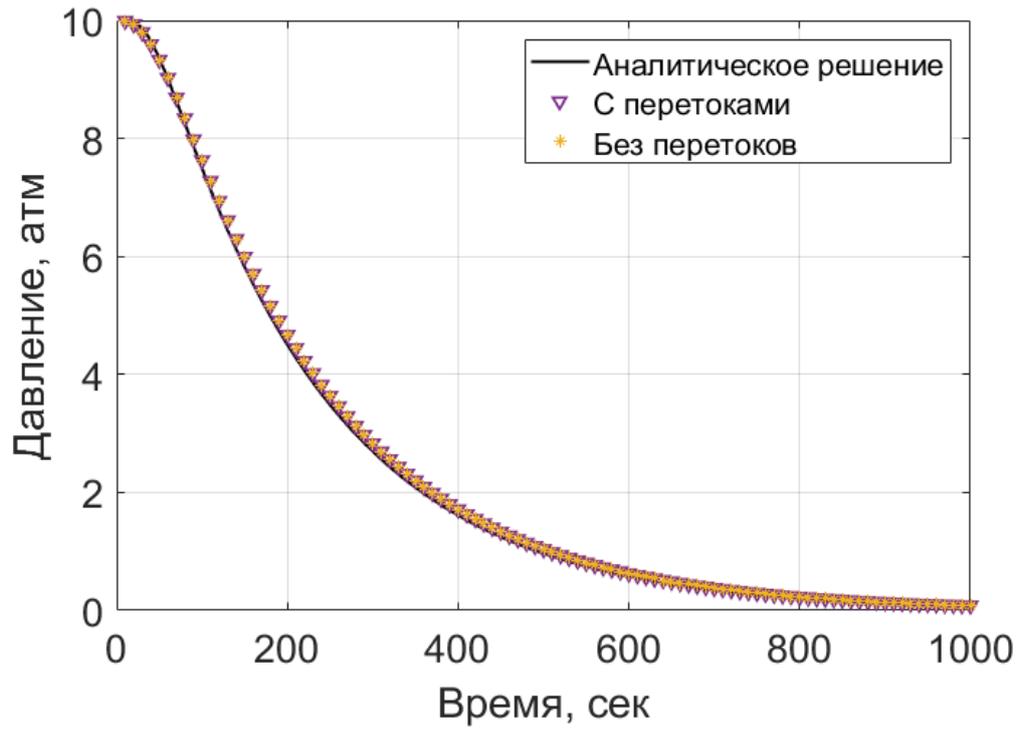
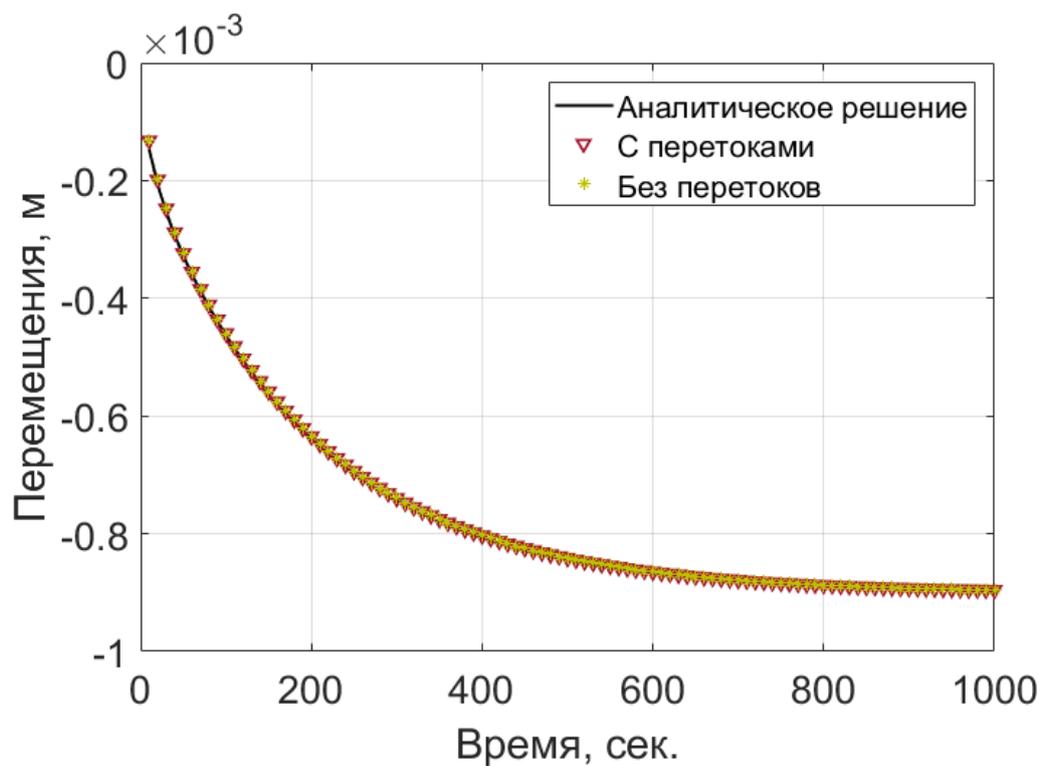
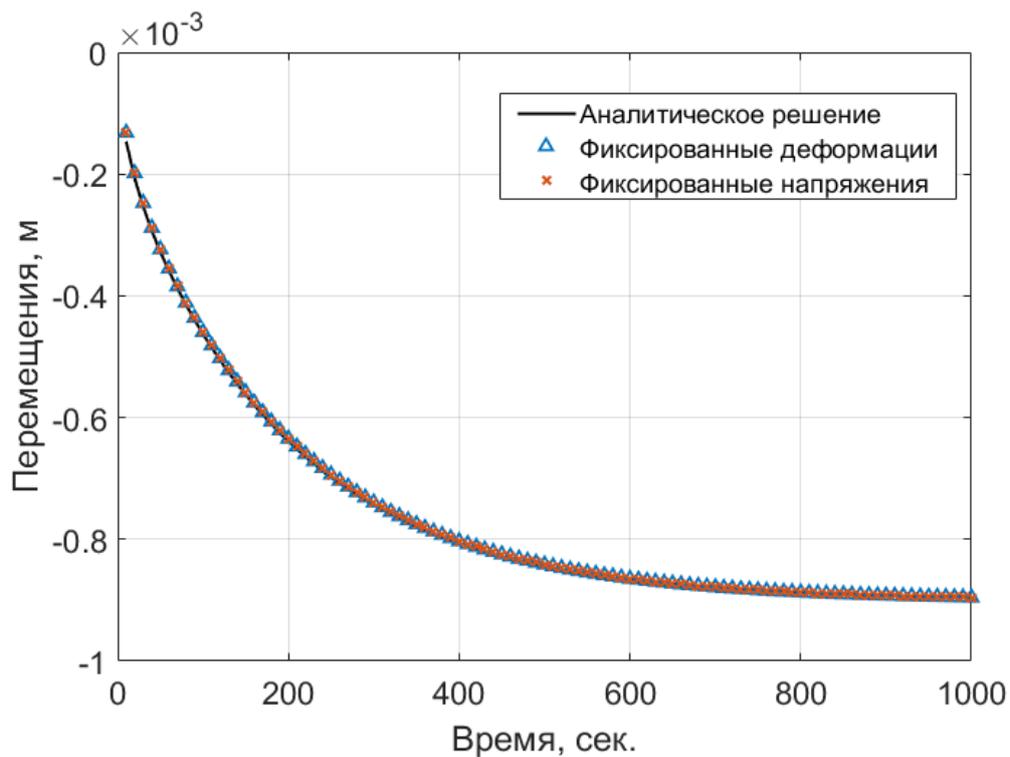


Рисунок 7 Изменение порового давления в точке наблюдения А для схем «с перетоком» и «без перетока» (а), для схем «с фиксированными деформациями» и «фиксированными напряжениями» (б)



а)



б)

Рисунок 8 Вертикальные деформации образца для схем «с перетоком» и «без перетока» (а), для схем «с фиксированными деформациями» и «фиксированными напряжениями» (б)

Было проведено исследование зависимости скорости сходимости схем расщепления от значения коэффициента τ . Расчеты проведены при значениях $\tau = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

Максимальное количество итераций на каждом расчетном шаге равнялось 50, требование к точности численного решения определяется выражением

$$|\zeta^{k+1} - \zeta^k| < 10^{-9}$$

для всех $\zeta = p, \vec{u}$

На Рисунок 9 приведен график зависимости суммарного количества итераций для каждой из схем расщепления при различных значениях τ . Хорошо видно, что для схем «с перетоком» и «фиксированными деформациями» при всех значениях τ наблюдается наименьшая скорость сходимости. Так же эти схемы устойчивы в меньшем диапазоне параметров. Схема расщепления «с фиксированными напряжениями» обладает максимальной скоростью сходимости.

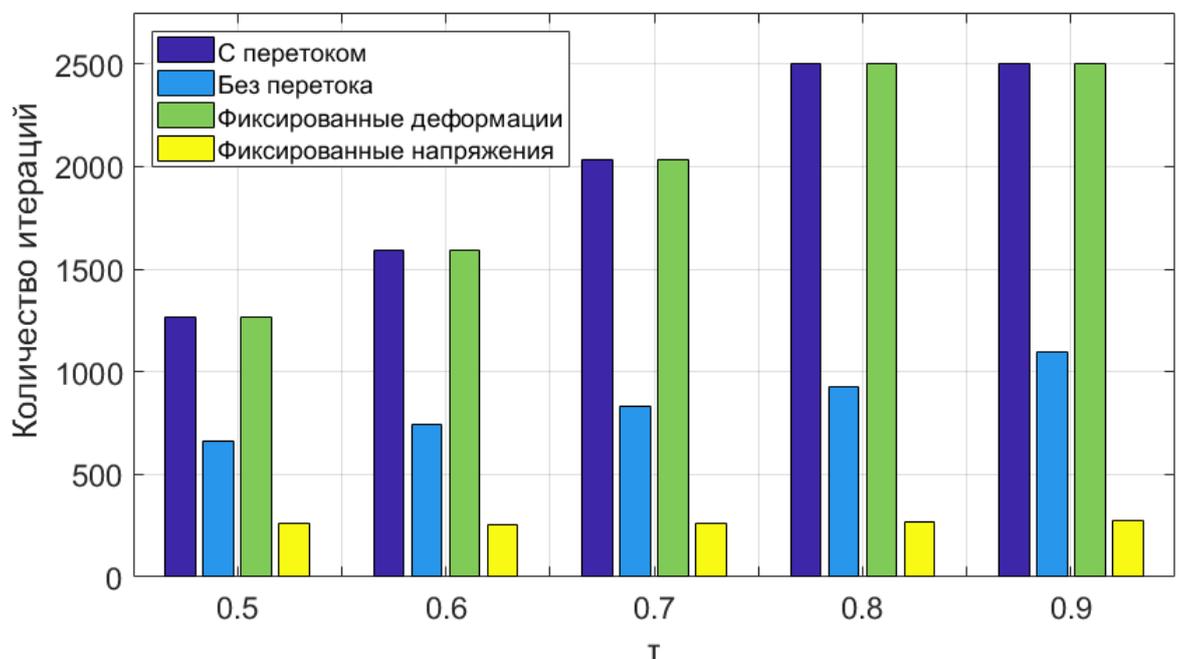


Рисунок 9 Зависимость количества итераций для схем расщепления при различном значении коэффициента τ в задаче Терцаги

Задача Менделя. В задаче Менделя [25] продемонстрирован пример немонотонного поведения распределения порового давления по времени при недренированном нагружении в условиях плоских деформаций. Рассматривалась насыщенная пороупругая среда с линейными размерами $2a \times 2b$, зажатая между двумя жесткими непроницаемыми пластинами (Рисунок 10). В начальный момент времени на пластины мгновенно начинает действовать сжимающая сила $F = -2\sigma a$, далее не меняющаяся со временем. Боковые границы области свободны к деформациям и протеканию насыщающего флюида, в начальный момент времени среда покоится.

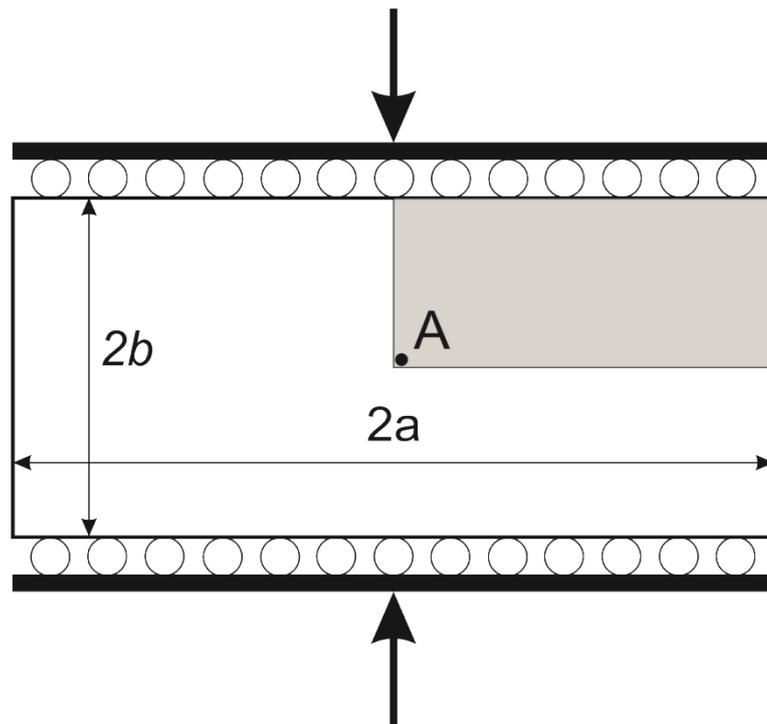


Рисунок 10 Постановка задачи Менделя

Аналитическое решение для задачи Менделя приведено в [11]:

$$p(x, y, t) = \frac{2B(1 + \nu_u)F}{3a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n - \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \left(\cos \frac{\alpha_n x}{a} - \cos \alpha_n \right) \exp \left(-\frac{\alpha_n^2 c_v t}{ab} \right)$$

$$\begin{aligned}
u &= \left(\frac{Fv}{2\mu a} - \frac{Fv_u}{\mu a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \cos \alpha_n}{\alpha_n - \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \exp\left(-\frac{\alpha_n^2 c_v t}{a^2}\right) \right) x \\
&\quad + \frac{F}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n}{\alpha_n - \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \sin\left[\frac{\alpha_n x}{a}\right] \exp\left(-\frac{\alpha_n^2 c_v t}{ab}\right) \\
v &= \left(-\frac{F(1-v)}{2\mu a} + \frac{F(1-v_u)}{\mu a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \cos \alpha_n}{\alpha_n - \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \exp\left(-\frac{\alpha_n^2 c_v t}{ab}\right) \right) y
\end{aligned}$$

где B – коэффициент Скемптона, F – сила, приложенная к верхней границе, v – коэффициент Пуассона в условиях дренажа, v_u – недренированный коэффициент Пуассона, α_n – корни уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{1-v}{v_u-v} \alpha_n$$

В силу симметрии постановки для численных расчетов использовалась четверть объема, с началом координат в центре исходной области (на Рисунок 10 расчетная область закрашена).

Граничные условия для численного расчета:

$$\begin{aligned}
x = 0: u_x &= 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
x = a: \sigma_{xx} &= 0, p = 0, \\
y = 0: u_y &= 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\
y = b: \int_0^a \sigma_{yy}(x, b, t) dx &= \frac{F}{2}, \frac{\partial p}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned}
p(x, y, 0) &= 0, \\
u_{x,y}(x, y, t) &= 0.
\end{aligned} \tag{55}$$

Проведено сравнение результатов численного моделирования с представленными аналитическими решениями. Расчет проводился на неструктурированной сетке (Рисунок 11), состоящей из 403 элементов и размером расчетной области 100x100 м. Количество временных шагов в расчете равнялось 144, размер временного шага равен 600 секунд, общее время моделирования составило 86400 секунд или 1 сутки.

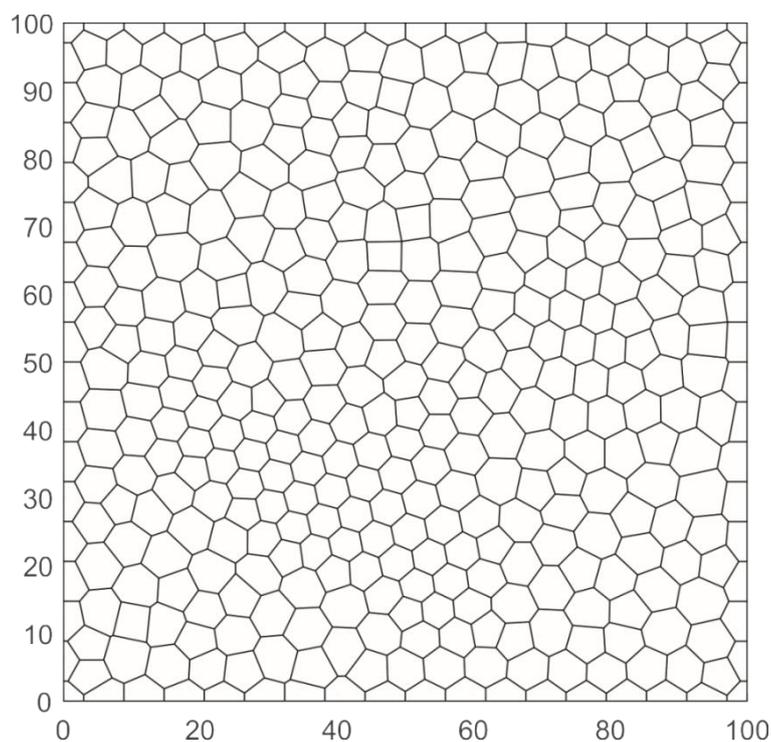


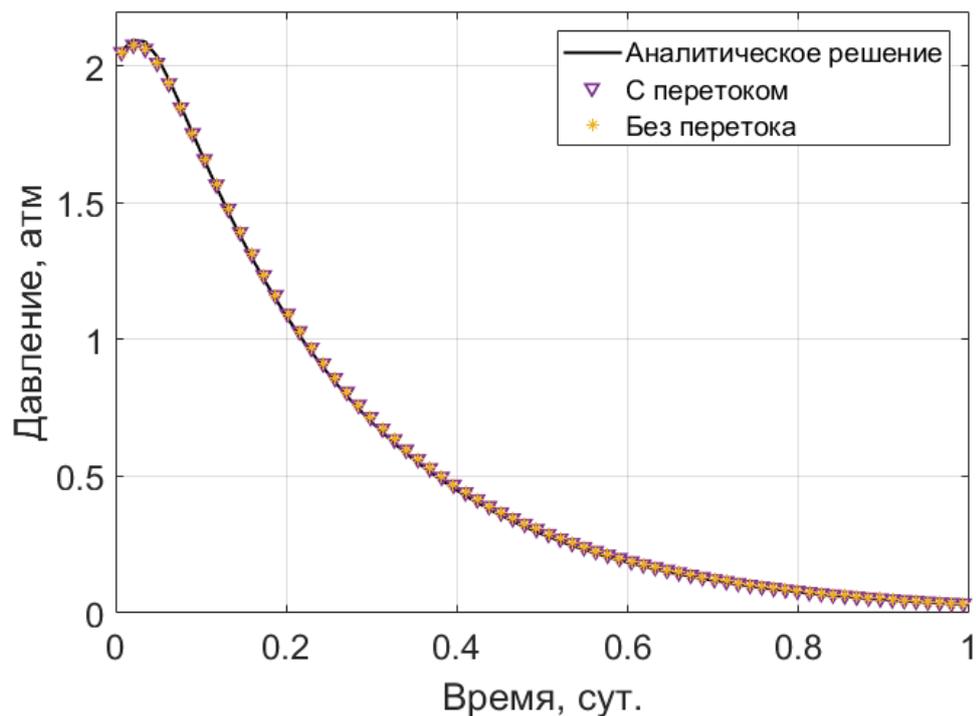
Рисунок 11 Неструктурированная расчетная сетки для задачи Мандела

В Таблица 3 приведены значения параметров моделируемой среды.

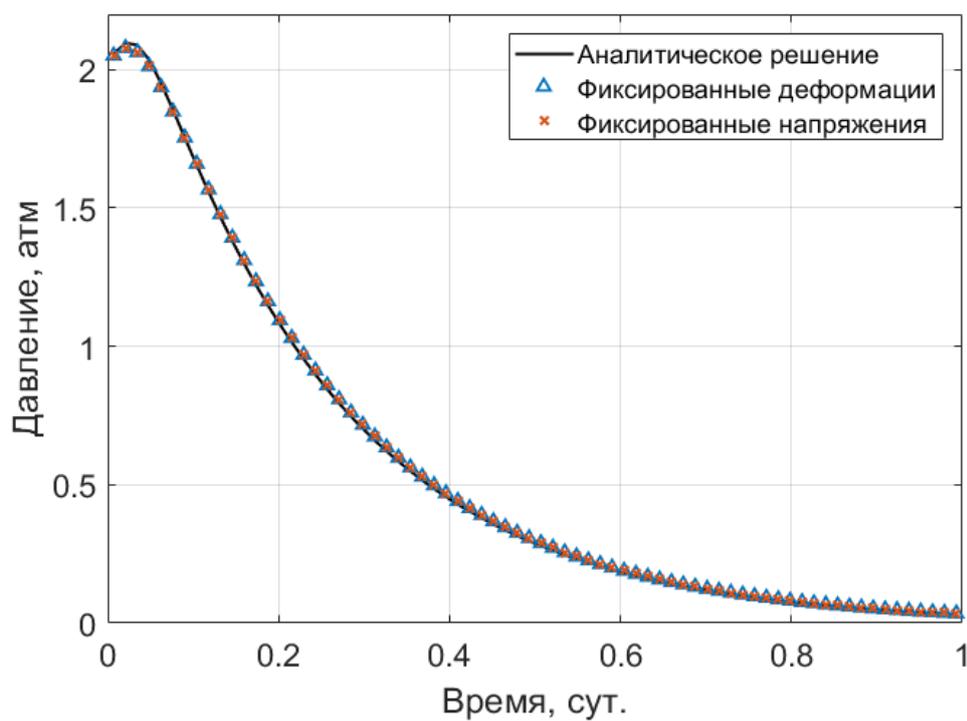
Таблица 3 Параметры пороупругой системы для задачи Мандела

Параметр	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Пористость	φ	0.3	—
Проницаемость	k	50	мД
Сжимаемость флюида	C_f	$5 \cdot 10^{-5}$	атм ⁻¹
Вязкость флюида	μ	1	сП
Модуль Юнга	E	$2 \cdot 10^5$	Атм
Коэффициент Пуассона	ν	0.0	—
Коэффициент Био	b	1	—

Результаты сравнения численных расчетов задачи Мандела с приведенным аналитическим решением представлены на Рисунок 12, Рисунок 13. На Рисунок 12 представлена динамика порового давления в точке наблюдения A для аналитического и численного решения. В данной постановке наблюдается немонотонное поведение порового давления, которое вызвано внешней нагрузкой.



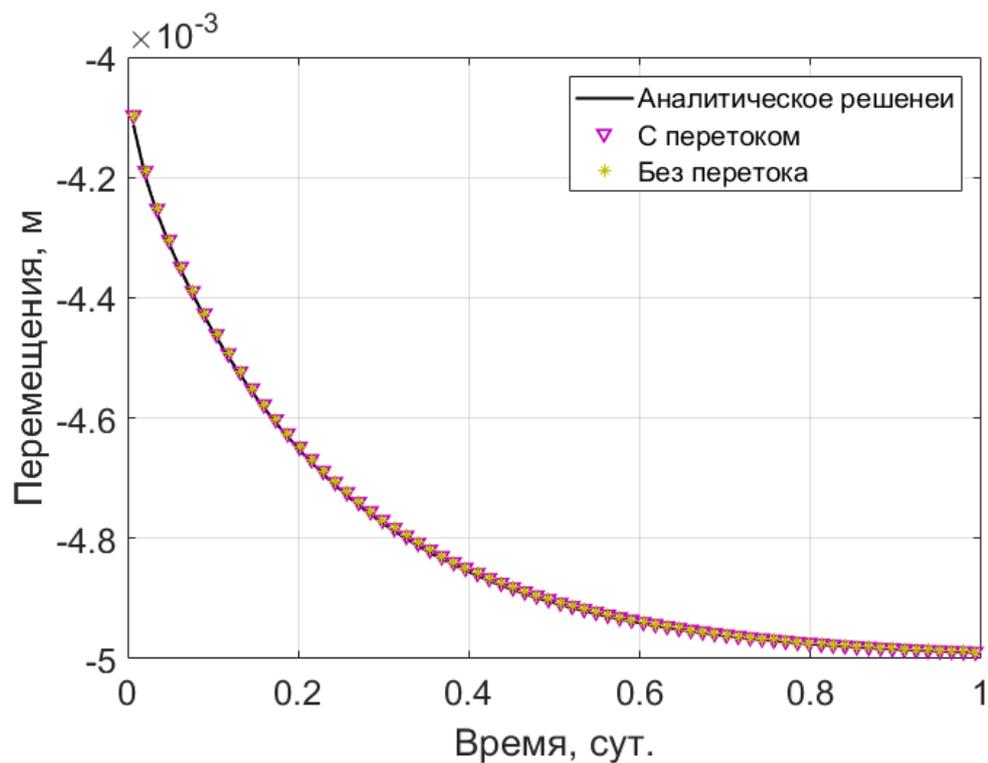
а)



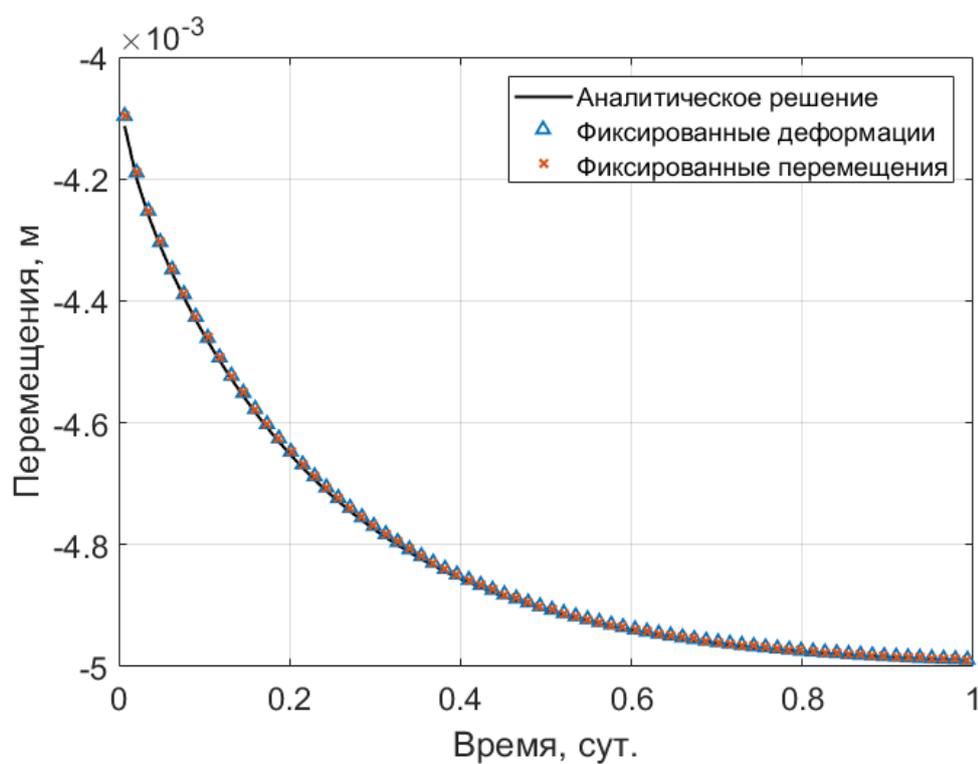
б)

Рисунок 12 Изменение порового давления в точке наблюдения *A* для схем «с перетоком» и «без перетока» (а), для схем «с фиксированными деформациями» и «фиксированными напряжениями» (б)

На Рисунок 13 приведено сравнение вертикальных деформаций расчетной области.



а)



б)

Рисунок 13 Вертикальные деформации образца для схем «с перетоком» и «без перетока» (а), для схем «с фиксированными деформациями» и «с фиксированными напряжениями» (б)

Было проведено исследование зависимости скорости сходимости схем расщепления от значения коэффициента τ для задачи Манделя. Расчеты проведены при значениях $\tau = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

Максимальное количество итераций на каждом расчетном шаге равнялось 50, требование к точности численного решения определяется выражением

$$|\zeta^{k+1} - \zeta^k| < 10^{-9}$$

для всех $\zeta = p, \vec{u}$

На Рисунок 14 приведен график зависимости суммарного количества итераций для каждой из схем расщепления при различных значениях τ . Хорошо видно, что для схем «с перетоком» и «фиксированными деформациями» при всех значениях τ наблюдается наименьшая скорость сходимости. Схемы расщепления «без перетоков» и «с фиксированными напряжениями» показывают близкие результаты.

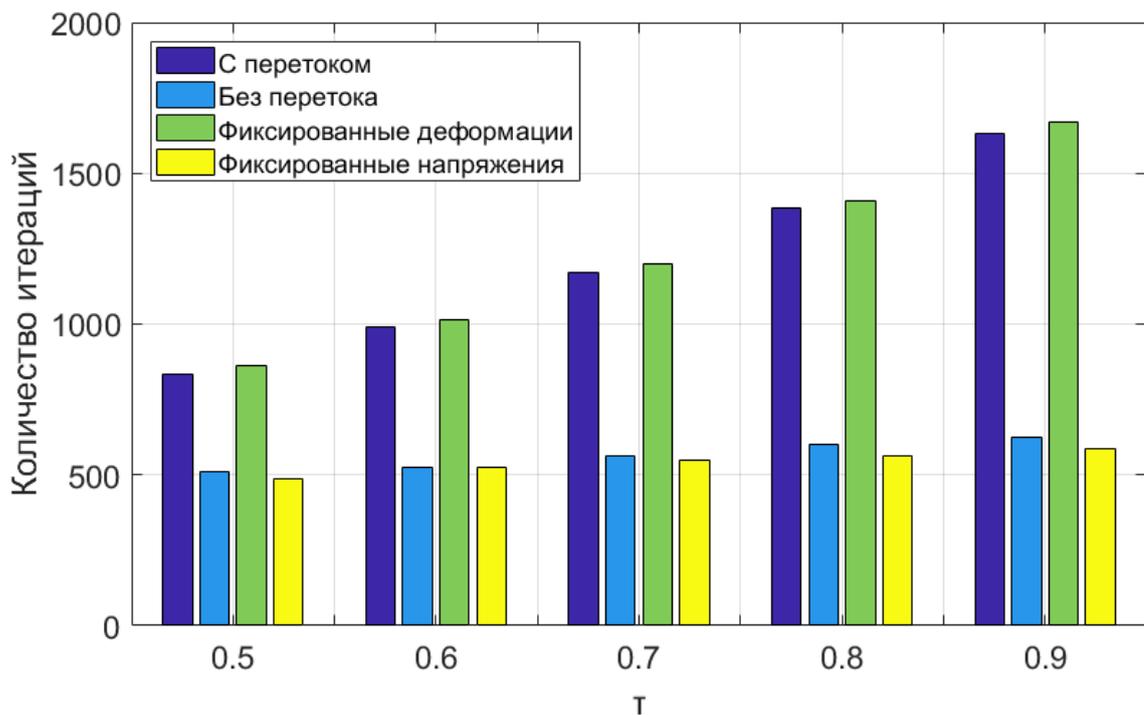


Рисунок 14 Зависимость количества итераций для схем расщепления при различном значении коэффициента τ в задаче Манделя

В результате тестирования получено хорошее совпадение с аналитическими решениями, можно сделать вывод о корректности подходов к численному моделированию пороупругой среды. По результатам исследования влияния параметра τ на скорость сходимости для дальнейшего использования выбран метод «с фиксированными напряжениями».

4. ПРИМЕРЕНИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ ТРЕЩИН

В главе рассмотрено применение модели дискретных трещин (DFN, discrete fracture network) для уравнений теории упругости и фильтрации. Представлены результаты численного моделирования пороупругой системы с одиночной трещиной.

4.1. Представление трещин в теории упругости

Дискретная трещина идеализированно представляется как две параллельные плоскости, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга. Положение границ трещины определяется из условия равновесия, которое определяется напряжениями окружающих горных пород и давлением флюида, насыщающего горную породу и находящегося в трещине.

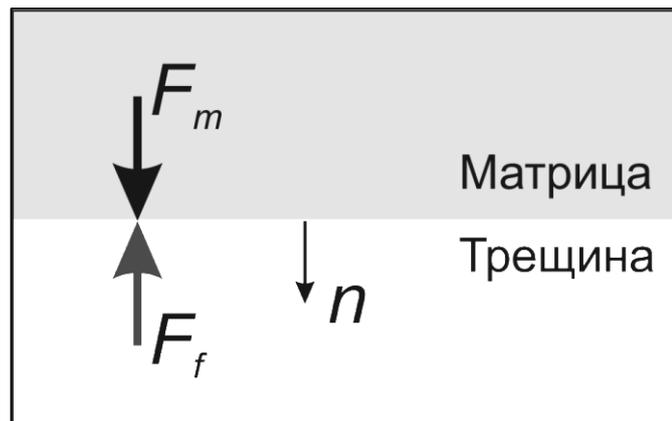


Рисунок 15 Модельное представление границы матрица-трещина

Так как в результате применения модели дискретных трещин для уравнений механики появилась дополнительная внутренняя граница, то необходимо ввести граничные условия на ней. Для того чтобы граница находилась в равновесии, необходимо, чтобы силы, приложенные к ней с разных сторон (Рисунок 15) были равны по модулю:

$$\sigma_m \cdot \vec{n} - \sigma_f \cdot \vec{n} = 0 \quad (56)$$

где σ_m – тензор напряжений в матрице горной породы, σ_f – в трещине, \vec{n} – вектор нормали на границе матрица-трещина.

Используя закон эффективных напряжений, перепишем (56) в виде

$$\sigma'_m \cdot \vec{n} - bp_m \vec{n} = \sigma'_f \cdot \vec{n} - bp_f \vec{n} \quad (57)$$

где p_m – поровое давление в матрице горной породы, p_f – давление внутри трещины.

Рассмотрим модель трещины со свободными границами. В данном подходе к моделированию используется предположение об отсутствии контактных сил между границами трещины, тогда эффективные напряжения внутри трещины σ'_f могут быть приняты равными нулю.

С учетом этого (57) может быть записано в виде

$$\sigma'_m \cdot \vec{n} - bp_m \vec{n} = -bp_f \vec{n} \quad (58)$$

или

$$\sigma'_m \cdot \vec{n} = b(p_m - p_f) \vec{n}$$

таким образом, влияние трещины на напряженное состояние определяется разницей давления в трещине и в матрице горной породы.

Условия отсутствие напряжений на внутренней границе хорошо подходит для моделирования систем находящихся в разгруженном (растянутом) состоянии, или для трещин с высоким давлением внутри. В случае сжатого состояния для более физического описания могут быть рассмотрены граничные условия, учитывающие упругие свойства трещины.

При численном моделировании, давление в трещине учитывается при нахождении градиента порового давления, используемого в уравнении (28). Данный подход избавляет от необходимости вводить дополнительные источники члены для расчетных узлов, граничащих с трещиной.

4.2. Фильтрация в дискретных трещинах

Для описания фильтрации в системе протяженных несвязанных трещин может применяться прямое моделирование течения. При использовании данного подхода течение в каждой трещине и в матрице пористой среды моделируются напрямую с использованием уравнений фильтрации.

Данный метод может быть реализован путем прямого задания параметров неоднородностей на расчетной сетке, что приводит к

необходимости измельчать расчетную сетку в области неоднородностей и, как следствие, к увеличению вычислительных затрат.

Еще одним методом моделирования течения в трещинах является использование дискретной системы трещин. Фильтрационные потоки внутри трещины при использовании модели дискретных трещин описываются уравнениями, размерность которых на один порядок меньше, чем размерность уравнений используемых для описания фильтрации в пористой среде, дополнительно появляются члены, отвечающие за связь между матрицей и трещиной.

Таким образом, в двумерной задаче трещины модельно представляются линиями, для которых строится одномерная расчетная сетка. При моделировании среды с дискретными трещинами рассматриваются давления в ячейках пористой матрицы, давление внутри трещины и перетоки между трещиноватой и пористой средой.

Переток между блоками матрицы и трещиной определяется разностью давлений

$$q = \alpha \frac{k_m}{\mu} (p_m - p_f) \quad (59)$$

где q – поток на границе матрица-трещина, α – константа определяющая интенсивность перетока между матрицей и трещиной.

Будем использовать следующие уравнения для фильтрации в матрице

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p_m}{\partial t} + b \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \nabla \left(\frac{k_m}{\mu} \nabla p_m \right) + \delta_f \alpha \frac{k_m}{\mu} (p_m - p_f) = f \quad (60)$$

и трещине

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p_f}{\partial t} - \nabla \left(\frac{k_f}{\mu} \nabla p_f \right) - \alpha \frac{k_m}{\mu} (p_m - p_f) = f \quad (61)$$

$\delta_f = 1$ для узлов граничащих с трещиной

После дискретизации методом контрольных объемов (60) и (61) систему линейных уравнение для описания фильтрационных потоков с

использованием модели дискретных трещин можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} M & MF \\ FM & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m \\ p_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_m \\ B_f \end{bmatrix} \quad (62)$$

где M – матрица коэффициентов для пористого скелета, F – матрица коэффициентов для трещины, MF, FM – матрицы связей матрица-трещина и трещина-матрица, $p_{m,f}$ – вектора искомых давлений в матрице и трещине, $B_{m,f}$ – свободный вектор для матрицы и трещины.

4.3. Пример численного моделирования

В центре рассматриваемой области (Рисунок 16) располагается одиночная трещина, расположенная под 45 градусов к осям координат. Рассматриваемый образец зафиксирован в горизонтальном направлении и может свободно деформироваться в вертикальном направлении, поток флюида возможен только через верхнюю границу. Изначально образец находится в равновесии, начальное поровое давление $p_0 = 10$ атм. В момент времени $t = 0^+$ на верхнюю границу расчетной области начинает действовать постоянная нагрузка $\sigma_b = 10$ атм.

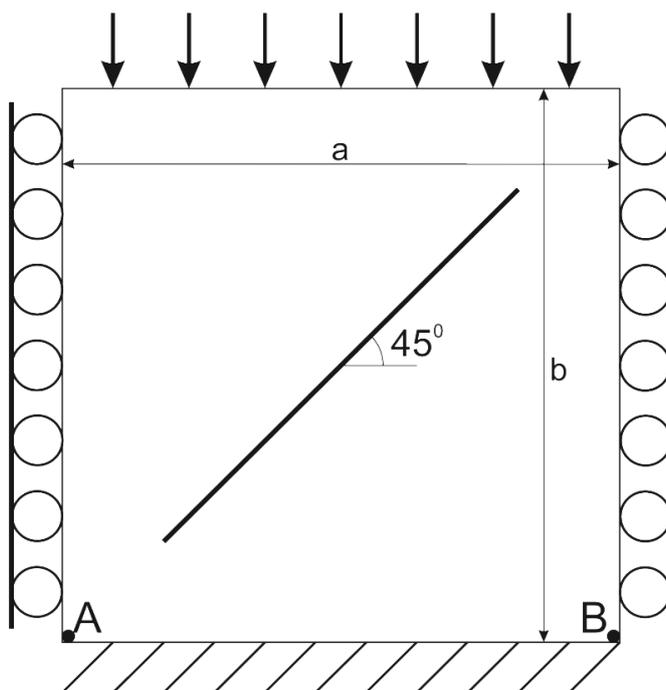


Рисунок 16 Постановка задачи с дискретной трещиной

Данной постановке соответствуют следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 x = 0: u_x = 0, \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \\
 x = a: u_x = 0, \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \\
 y = 0: u_x = 0, u_y = 0, \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \\
 y = b: \sigma = \sigma_b, p &= 0
 \end{aligned} \tag{63}$$

В Таблица 4 приведены параметры системы принятые при численном моделировании.

Таблица 4 Параметры прорупругой системы

Параметр	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Пористость матрицы	φ_m	0.1	—
Пористость трещины	φ_f	0.5	—
Проводимость матрицы	$\frac{k_m}{\mu}$	50	$\frac{\text{мД}}{\text{сП}}$
Проводимость трещины	$\frac{k_f}{\mu}$	$100 \cdot 10^4$	$\frac{\text{мД}}{\text{сП}}$
Модуль Юнга	E	$5 \cdot 10^5$	Атм
Коэффициент Пуассона	ν	0.2	—
Коэффициент Био	b	1	—
Сжимаемость жидкости	C_f	$4 \cdot 10^{-5}$	атм^{-1}

Для описания заданной геометрии использовалась неструктурированная расчетная сетка, состоящая из ячейки Вороного. Построенная сетка (Рисунок 17) состоит из 585 элементов, размеры расчетной области 1000 на 1000 м, одномерная сетка внутри трещины состоит из 17 элементов.

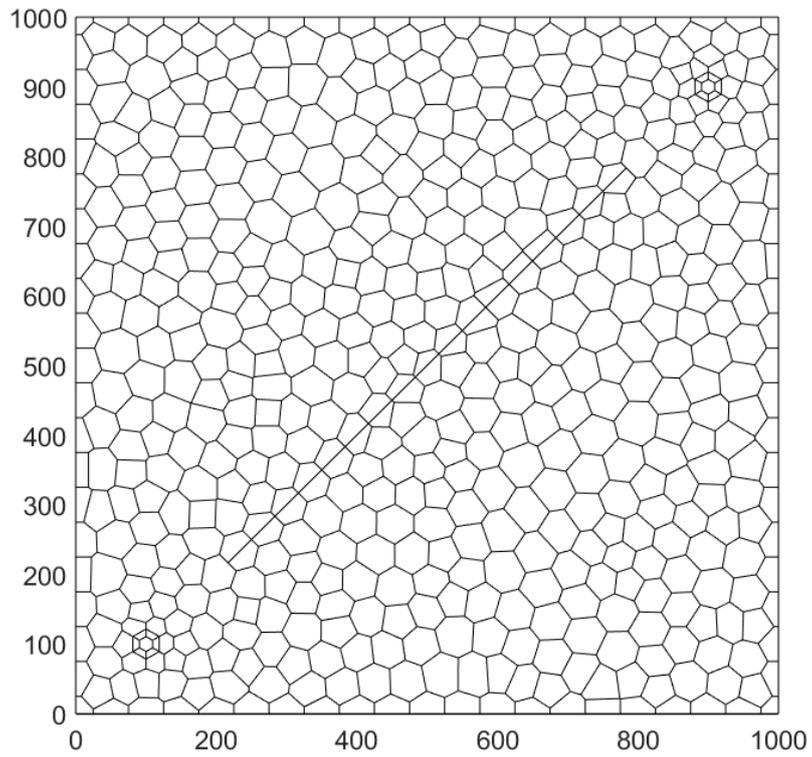


Рисунок 17 Расчетная сетка

На Рисунок 18 укрупненно показаны ячейки, построенные в области возле трещины.

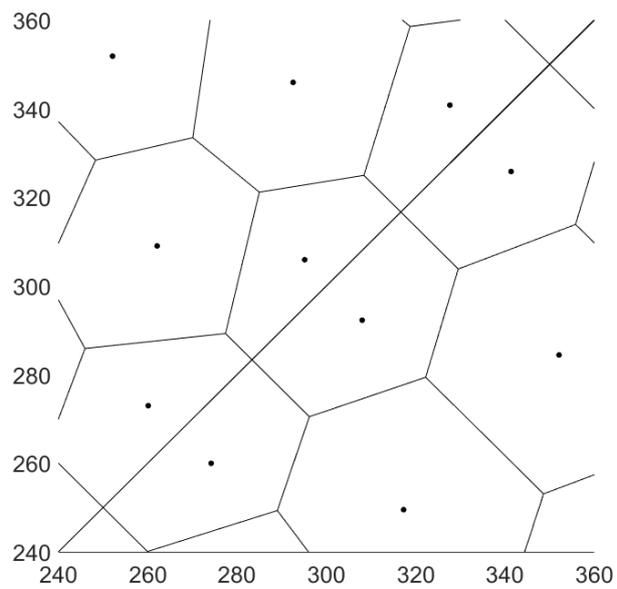
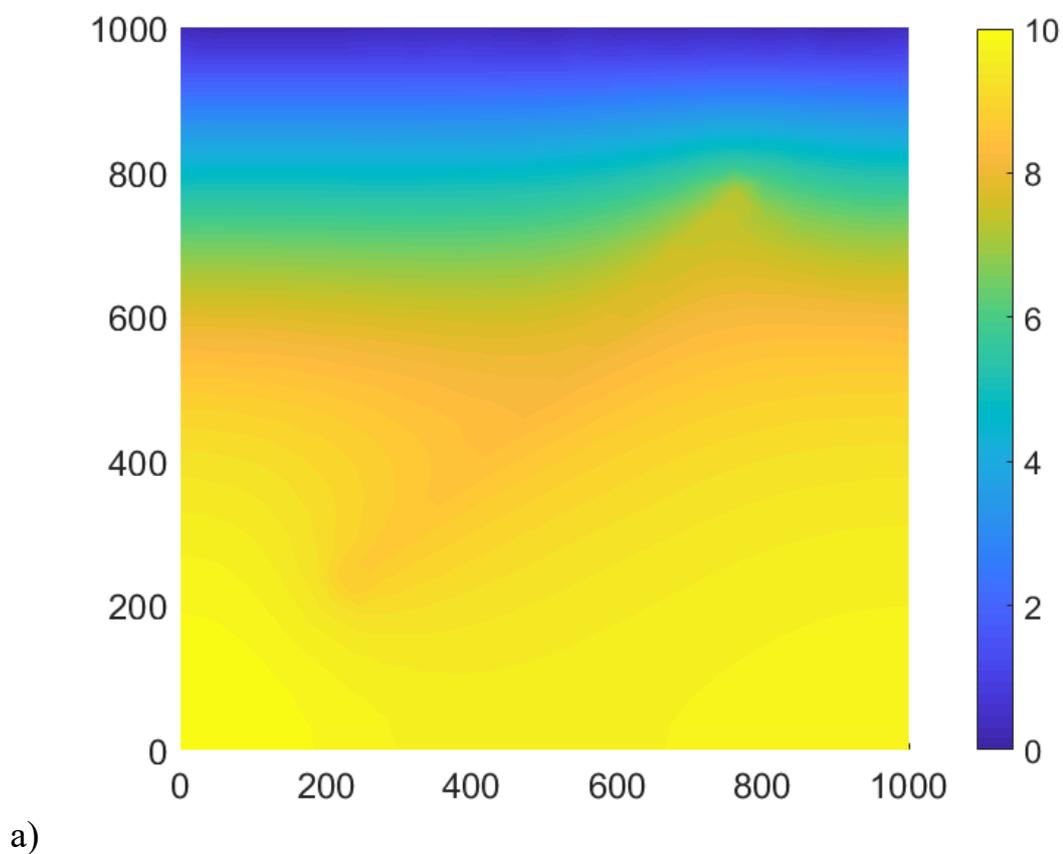
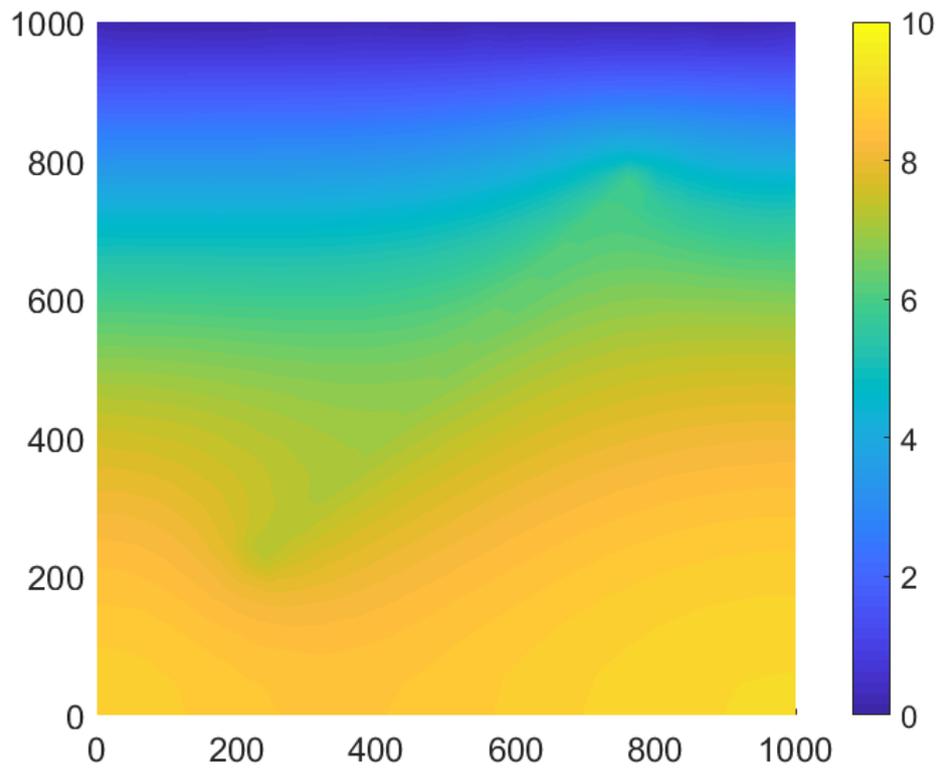


Рисунок 18 Расчетные ячейки и их узлы вблизи трещины

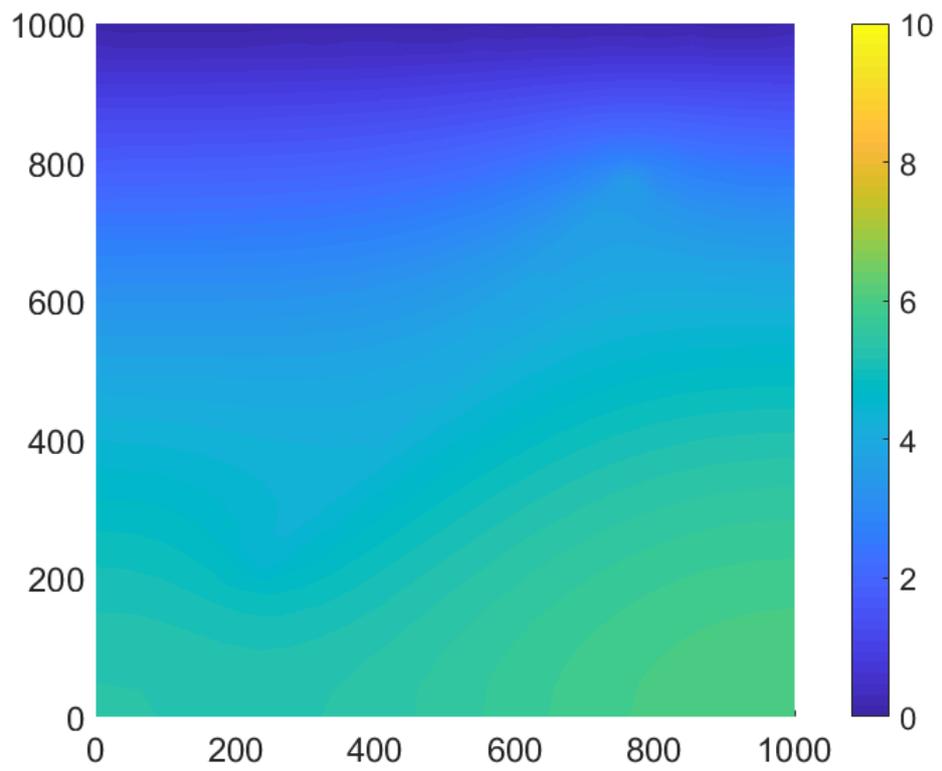
Время расчета составляло 20 дней с расчетным шагом в 2 часа. При расчетах использовался метод расщепления «с фиксированными напряжениями».

На рисунке Рисунок 19 приведены полученные в результате расчета поля давления для различных моментов времени ($t = 1, 2, 5$ дней). Как видно из рисунка, наличие высоко проводящего канала приводит к искривлению фронта давления в расчетной области.





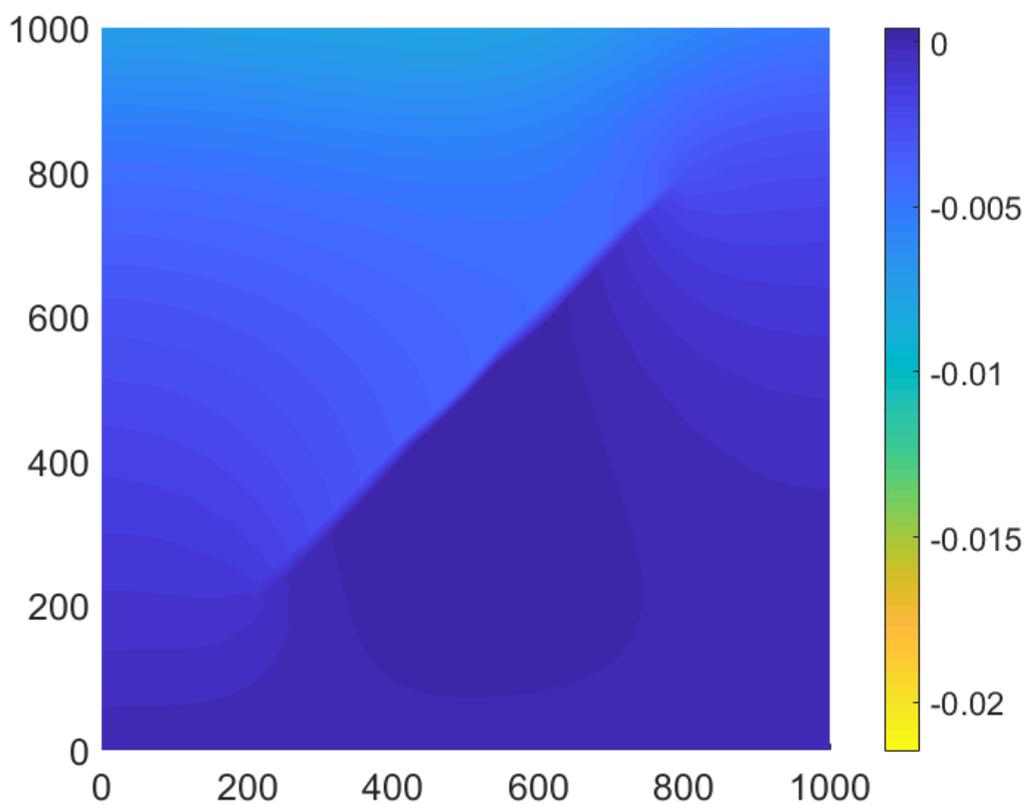
б)



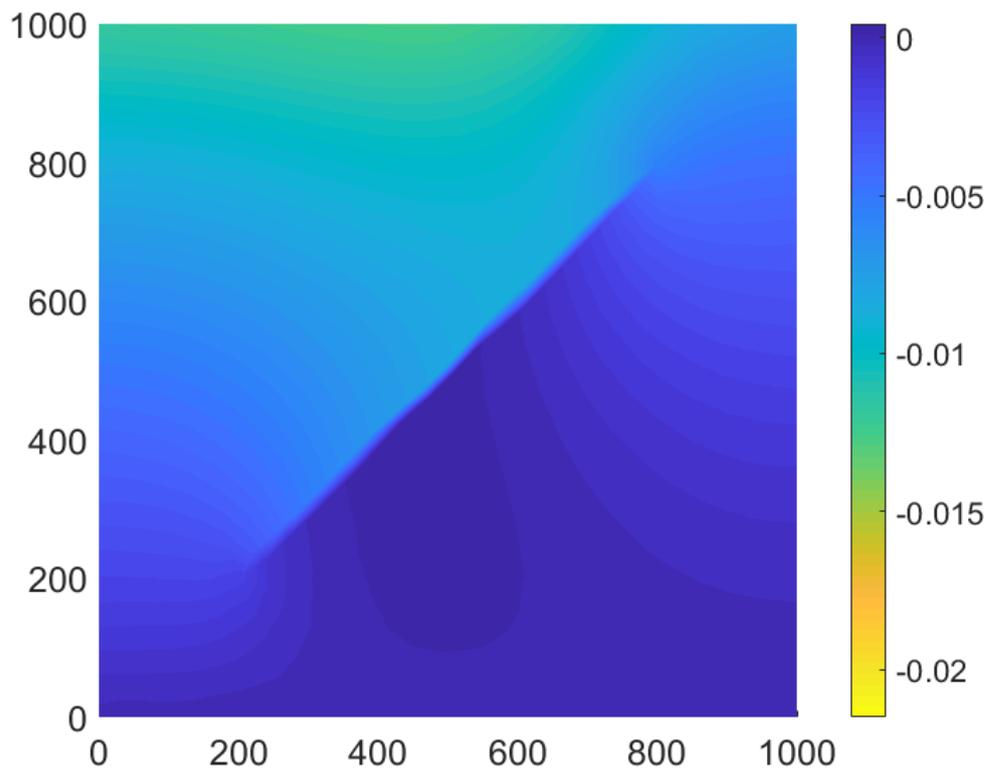
в)

Рисунок 19 Распределение давления для моментов времени $t = 1$ (а),
2(б) и 5(в) дней

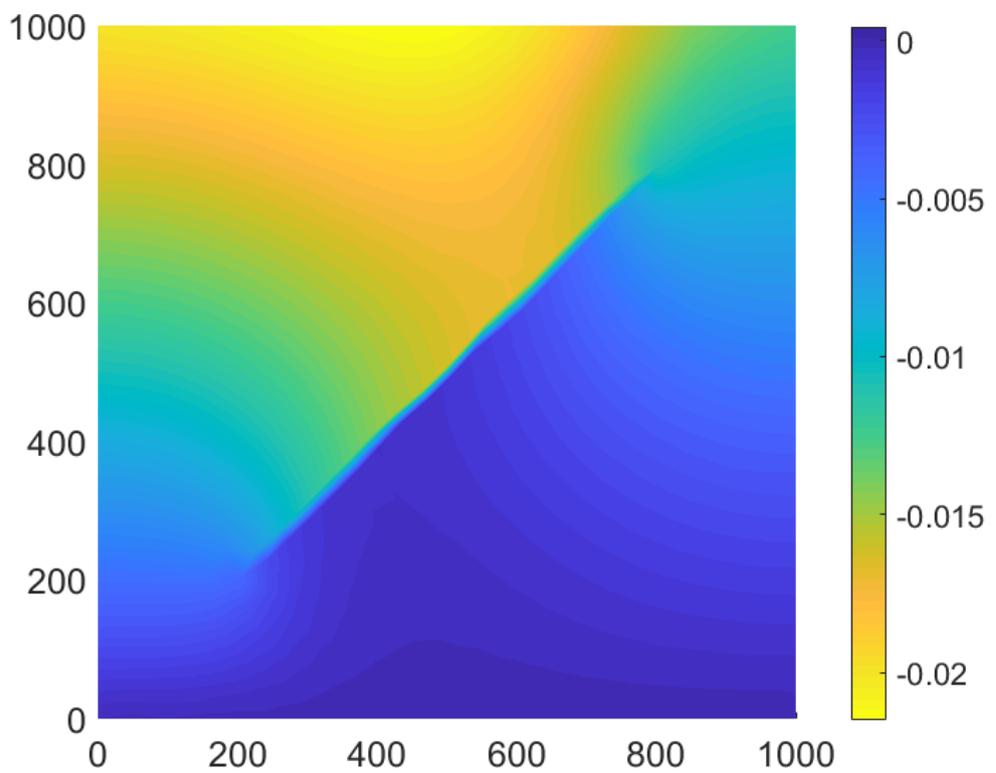
На Рисунок 20 приведены поля перемещений в вертикальном направлении для образца находящегося под постоянной нагрузкой. По мере вытекания флюида происходит постепенное продавливание образца, наблюдаются разрыв поля перемещений в центре расчетной области, который связан с наличием трещины



a)



б)



в)

Рисунок 20 Вертикальные перемещения для моментов времени $t =$
1(а), 2(б) и 6(в) дней

На Рисунок 21 приведена динамика порового давления в точках наблюдения *A* и *B* для расчета с трещиной и аналогичной постановки без трещины. При наличии высоко проводящего канала наблюдается изменение скорости падения давления, так же динамика падения отличается для точек наблюдения *A* и *B*.

В точке *A* наблюдается немонотонное поведение порового давления для первых временных шагов. Это связано с тем, что наличие внутренней граница приводит к неравномерному распределению нагрузки внутри расчетной области. Неравномерность распределения нагрузки демонстрируется на Рисунок 22, где показана динамика вертикальных смещений, возникающих на верхней границе. Левая часть ращёной области, соответствующая точке *A*, подвержена большим деформациям.

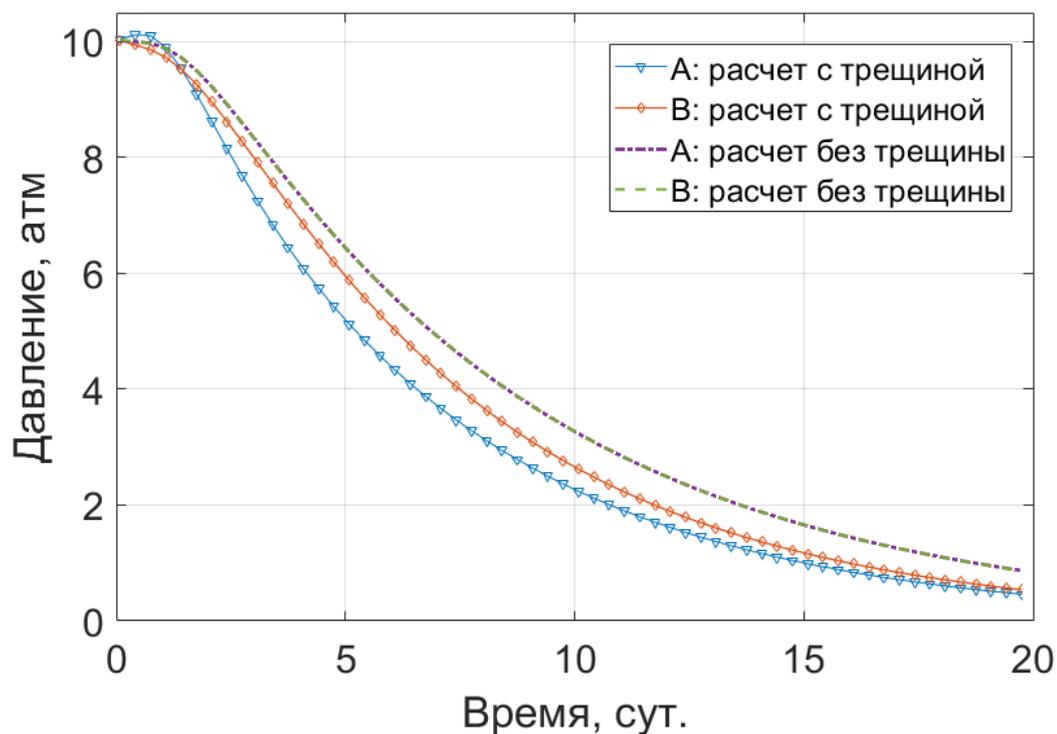


Рисунок 21 Давления в точках наблюдения: *A* - нижний левый угол, *B* - нижний правый угол

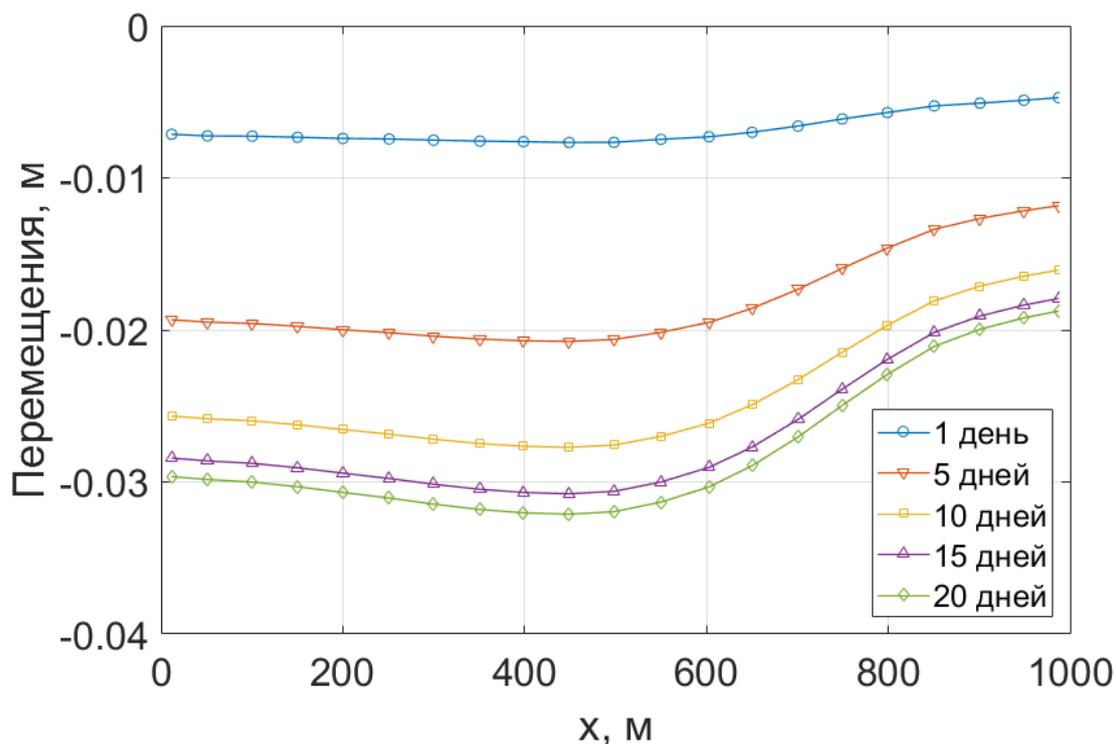


Рисунок 22 Перемещения верхней границы для моментов времени $t = 1, 5, 10, 15$ и 20 дней

Особый интерес представляет состояние трещины, так как в именно ее параметры во многом определяют распределение фильтрационных потоков. Представленный подход к моделированию дискретных трещин позволяет детально отследить их состояние.

В рассматриваемой постановке происходит схлапывание трещины под действием внешней сжимающей нагрузки. На Рисунок 23 демонстрируется изменение расстояния между границами трещины вдоль ее профиля для моментов времени $t = 1, 5, 10, 15$ и 20 дней.

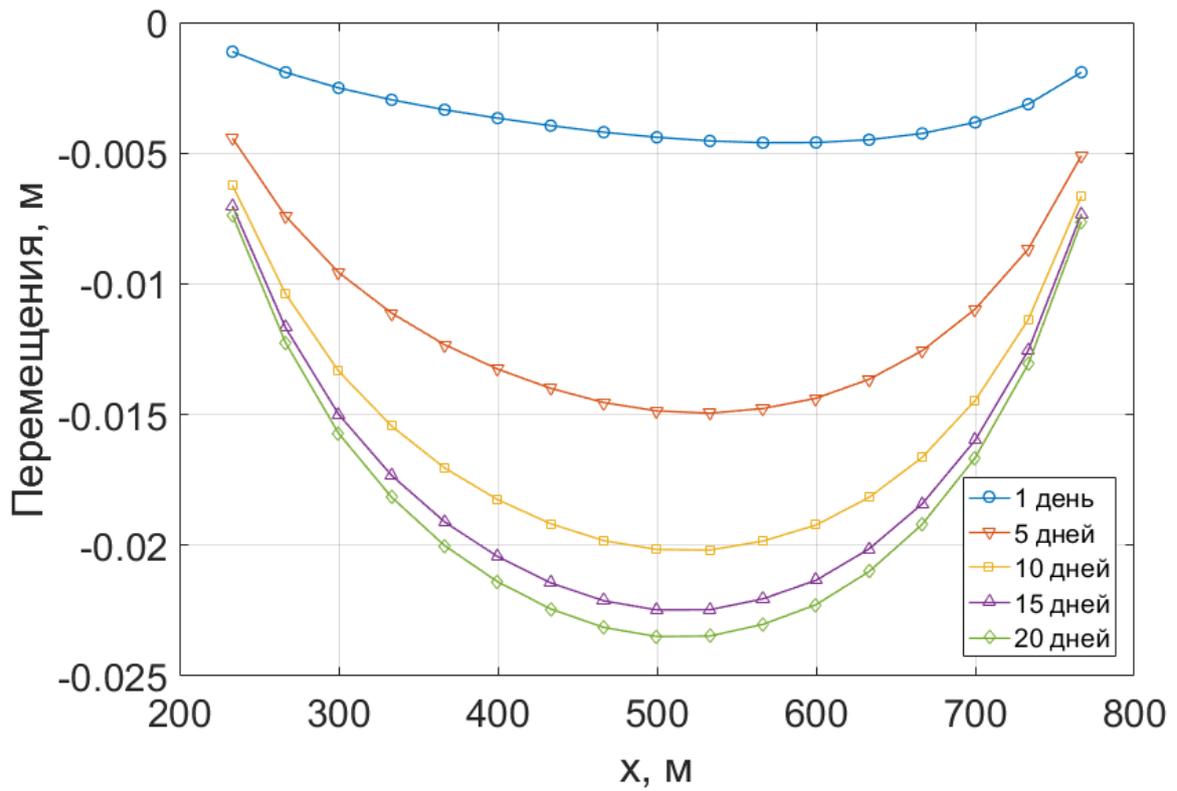


Рисунок 23 Изменение раскрытости трещины для моментов времени $t = 1, 5, 10, 15$ и 20 дней

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы была изучена математическая модель линейной пороупругости в рамках классической теории Био. Рассмотрено применение метода контрольных объемов для дискретизации уравнений фильтрации и теории упругости.

На языке программирования MATLAB разработана программа для двумерного флюидо-геомеханического моделирования. Корректность работы программы проверена путем сопоставления численных результатов с известными аналитическими решениями задач пороупругости. Исследование итерационно связанных подходов к совместному моделированию показало, что метод «с фиксированными напряжениями» обладает максимальной скоростью схождения.

С помощью разработанного инструмента проведено численное моделирование пороупругой среды, содержащей одиночную трещину. Показано влияние трещины на динамику порового давления и на напряженно-деформированное состояние вмещающей среды. Продемонстрировано изменение состояния трещины во времени под воздействием внешней нагрузки.

Планируется продолжение исследований в области геомеханического моделирования и усовершенствование разработанной программы. Актуальными представляются следующие вопросы:

- интеграция модуля многофазной фильтрации;
- реализация полностью связанного алгоритма решения;
- использование модели двойной среды;
- учет скважин при совместном моделировании;
- исследование напряженно-деформированного состояния призабойной области скважины.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: пер. с англ. М.: Недра, 1982, 407 с.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ППМ, т.24, 1960, 852–864.
3. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. Учебник для вузов. — М.: Недра, 1993, 416 с.
4. Гарагаш И.А., Дубовская А.В., Корнева Д.А., Гасеми М.Ф. Комплексное (4D) геомеханическое и гидродинамическое моделирование эволюции нефтяного месторождения в процессе разработки, Общество инженеров нефтегазовой промышленности, doi:10.2118/171215-RU
5. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. Ижевск: ИКИ, 2003, 121 с.
6. Кук Д., Фредериксен Р. О важности механических свойств горных пород: лабораторная проверка геомеханических данных // Нефтегазовое обозрение 2007, 44–69.
7. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.–Л.: Гостехизжат, 1947, 244 с.
8. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.: Институт компьютерных исследований, 2004, 628 с.
9. Терцаги К., Пек Р. Механика грунтов в инженерной практике. М.: Госстройиздат, 1958, 608 с.
10. Терцаги, К. Теория механики грунтов, Издательство: М.: Госстройиздат, 1961, 507 с.
11. Abousleiman A., Cheng A., Detournay E., and Roegiers J. Mandel's problem revisited. Geotechnique 46, 1996, 187–195.

12. Bagheri, M. and Settari, A. Modeling of Geomechanics in Naturally Fractured Reservoirs. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* 11(1), 2008, 108–118.
13. Biot M. A., Mechanics of Deformation and Elastic Propagation in Porous Media, *Journal of Applied Physics*, vol. 33, 1962, 1482–1498,.
14. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 12, 1941, 155–164.
15. Chen H.-Y., Teufel L.W., and Lee R.L., Coupled Fluid Flow and Geomechanics in Reservoir Study – I. Theory and Governing Equations, paper SPE 30752 presented at the SPE Annual Technical Conference & Exhibition, Dallas, USA, October 22–25, 1995.
16. Chen, H.-Y. and Teufel, L.W. Coupling Fluid-Flow and Geomechanics in Dual Porosity Modeling of Naturally Fractured Reservoirs – Model Description and Comparison. Paper SPE 59043 presented at the SPE International Petroleum Conference and Exhibition in Mexico, Villahermosa, Mexico, 1–3 February, 2000
17. Coussy O. *Poromechanics*. Chichester, England: John Wiley and Sons, 2004. 298 p.
18. Dean R.H., Gai S., Stone C.M., and Minkoff S.E. A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. *SPE J* 11(1), 2006, 132–140.
19. Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric change of porous rocks. *Trans.AIME* 210, 1957, 331–340.
20. Jasak H., Weller H.G.. Application of the finite volume method and unstructured meshes to linear elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 48, 2000, 267–287
21. Jorge E.P. Simulation Of Flow In Discrete Deformable Fractured Porous Media. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, 21-23 February, The Woodlands, Texas, USA, 2011

22. Karimi-Fard, M., Durlofsky, L.J. and Aziz K. An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulator. *SPE Journal* 9(2), 2004, 227–236.
23. Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200, 2011, 2094–2116.
24. Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: fixed-stress and fixed-strain splits, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200, 2011, 1591–1606.
25. Mandel J. Consolidation Des Sols (Étude Mathématique). *Gbotechnique* 3, 1953, 287–299.
26. Mikelić A. & Wang B. & Wheeler M. Numerical Convergence Study of Iterative Coupling for Coupled Flow and Geomechanics. *Computational Geosciences.* 18, 2014, 325-341.
27. Settari A. and Mourits F. A coupled reservoir and geomechanical simulation system. *SPE J* 3, 1998, 219–226.
28. Settari A. and Walters D.A. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. *SPE J* 6(3), 2001, 334–342.