МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
_____________ Татосов А.В.
2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРУППОВЫХ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

01.04.01 Математика

Магистерская программа "Математическое моделирование"

Выполнила работу
студентка 2 курса
очной формы обучения
Кроликова Дарья Дмитриевна

Руководители работы
ст. преподаватель кафедры ФМиМ
Бельмецев Николай Федорович
к.ф.-м.н. доцент кафедры ФМиМ
Басинский Константин Юрьевич

Рецензент
младший научный сотрудник
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А.Христиановича СО РАН
Губкин Алексей Сергеевич

Тюмень, 2018

УДК 517.9

Кроликова Д.Д.

Исследование групповых свойств нелинейного уравнения в теории пластичности / Д.Д. Кроликова. – Тюмень, 2018. – 26 с.

В выпускной квалификационной работе представлено исследование задачи о форме контура ограничивающего тонкий слой из идеально пластичного материала. То есть, рассматривается свободное растекание пластического слоя между параллельно сближающимися пластинами.

Список лит. – 6 назв.

Оглавление

Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений возник как направление в конце XIX в работах норвежского математика Софуса Ли. Более чем пол века данное направление анализа не было широко распространено, но благодаря работам Льва Васильевича Овсянникова групповой анализ дифференциальных уравнений стал одним из важнейших инструментов исследования нелинейных уравнений и краевых задач математической физики. Особо важную роль групповой анализ играет при исследовании и построении новых моделей механики и физики, так как принципы инвариантности и понятия непрерывных групп Ли, лежащие в его основе, позволяют выделять интересующие исследователя симметрии чисто механического континуума характерные для конкретной задачи. Прогнозировать интегрируемость дифференциальных уравнений в квадратурах, поиск оптимальных способов их редукции, уменьшающих трудоемкость решения – все это становится доступным с помощью методов группового анализа. В самых разнообразных приложениях, в задачах моделирования и при решении уравнений, групповой анализ является естественным инструментом. Поэтому разработка подходов и алгоритмов группового анализа является чрезвычайно актуальной.

Основные теоретические данные.

В процессе исследования были использованы следующие теоремы:

Первая основная теорема Ли.

Пусть функция $\mathbf{f}(\mathbf{z}, a)$ удовлетворяет групповому свойству $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{z}, a), b) = \mathbf{f}(\mathbf{z}, a+b)$ и имеет разложение $\overline{z} = z + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z})a + o(a)$. Тогда она является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (называемого уравнением Ли) с начальным условием:

$$\frac{d\mathbf{f}}{da} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{f}), \quad \mathbf{f}\,|_{a=0} = z. \tag{a}$$

Обратно, для любого гладкого векторного поля $\boldsymbol{\xi}(z)$ решение задачи Коши (a) (решение существует и единственно) удовлетворяет групповому свойству

$\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{z},a),b) = \mathbf{f}(\mathbf{z},a+b)$.

Определение. Если рассмотреть дифференциальный оператор

$$X = \xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i},$$

то критерий инвариантности функции $\xi^i(z)\frac{\partial F(z)}{\partial z^i}$ запишется в виде

$$XF = 0.$$

Этот оператор X называется *инфинитезимальным оператором* группы преобразований $z' = z + \xi(z)a + o(a)$.

Теорема (критерий инвариантности многообразия).

Система уравнений $F_1(z) = 0, ..., F_s(z) = 0, s \leq N$ инвариантна относительно группы тогда и только тогда, когда

$$XF_k \mid_M = 0, k = 1, ..., s,$$

где M – поверхность инвариантная относительно группы преобразований $z' = z + \xi(z)a + o(a)$.

Вторая основная теорема Ли.

Инвариантная поверхность M может быть задана системой уравнений вида

$$\Phi_k(J_1(z), ..., J_{N-1}(z)) = 0, \quad k = 1, ..., s,$$

где функции

$$J_1(z), ..., J_{N-1}(z)$$

образуют базис инвариантов группы, если инфинитезимальный оператор группы не обращается в нуль на поверхности M.

Постановка задачи

Впервые, задача о растекании, была поставлена в работах А.А.Ильюшина [1]. Как задача Коши для нелинейного эволюционного уравнения она сформулирована в диссертации В.Н.Безухова [2], им же исследована асимптотика решения при больших временах и получены некоторые частные решения.

Будем рассматривать нелинейное эволюционное уравнение

$$\varphi_\tau - \frac{\varphi^2}{2}\varphi_{xx} - \varphi(1+\varphi_\tau^2) = 0, \tag{1}$$

где $y = \varphi(x,\tau)$ – это уравнение дуги контура, расположенного в верхней полуплоскости; $\tau = \ln(\frac{h_0}{h})$ – степень деформации, $h = h(t)$, h_0 – начальная толщина слоя.

Исследование уравнения (1) будем проводить методами группового анализа [4,5], применяя допускаемые уравнением (1) симметрии для редукции его к обыкновенным дифференциальным уравнениям с последующим решением.

Цель работы - провести исследование групповых свойств нелинейного дифференциального уравнения, описывающего течение в пластическом слое:

1. Найти допускаемые группы преобразований.
2. Решить систему определяющих уравнений.
3. Построить алгебру Ли операторов и таблицу коммутаторов.
4. Найти инвариантные решения для элементов оптимальной системы.
5. Построить частично-инвариантные решения ранга 1.
6. Описать геометрию решений.

Основная допускаемая группа Ли

Для уравнения (1) найдём локальную группу Ли точечных преобразований. Оператор группы, его первое и второе продолжение имеют вид соответственно

$$X = \xi^{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau} + \xi^{x}\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$X^{(1)} = X + \zeta_1\frac{\partial}{\partial\varphi_\tau} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial\varphi_x}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \zeta_{11}\frac{\partial}{\partial\varphi_{xx}} + \zeta_{12}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\tau x}} + \zeta_{22}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\tau\tau}}$$

По формулам продолжения имеем:

$$\zeta_1 = D_x\eta - \varphi_x D_x\xi^x - \varphi_t D_x\xi^\tau,$$

$$\zeta_2 = D_\tau\eta - \varphi_x D_\tau\xi^x - \varphi_t D_\tau\xi^\tau,$$

$$\zeta_{11} = D_x\zeta_1 - \varphi_{xx}D_x\xi^x - \varphi_{xt}D_x\xi^\tau,$$

$$\zeta_{22} = D_\tau\zeta_2 - \varphi_{\tau\tau}D_\tau\xi^\tau - \varphi_{x\tau}D_\tau\xi^x,$$

$$\zeta_{12} = D_x\zeta_2 - \varphi_{xx}D_\tau\xi^x - \varphi_{x\tau}D_\tau\xi^\tau.$$

Где операторы дифференцирования принимают вид:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial\tau} + \varphi_\tau\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varphi_{\tau x}\frac{\partial}{\partial\varphi_x} + \varphi_{\tau\tau}\frac{\partial}{\partial\varphi_\tau},\ D_\tau = \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_x\frac{\partial}{\partial\varphi} + \varphi_{\tau x}\frac{\partial}{\partial\varphi_\tau} + \varphi_{xx}\frac{\partial}{\partial\varphi_x}.$$

Проведя необходимые выкладки получаем:

$$\zeta_1 = \eta_x + \varphi_x\eta_\varphi - \varphi_x\xi^x_x - (\varphi_x)^2\xi^x_\varphi - \varphi_t\xi^\tau_x - \varphi_\tau\varphi_x\xi^\tau_\varphi,$$

$$\zeta_2 = \eta_\tau + \varphi_\tau\eta_\varphi - \varphi_x\xi^x_\tau - (\varphi_\tau)^2\xi^\tau_\varphi - \varphi_\tau\xi^\tau_\tau - \varphi_\tau\varphi_x\xi^x_\varphi,$$

$$\zeta_{11} = -(\varphi_x)^3\xi^x_{\varphi\varphi} - (\varphi_x)^2(2\xi^x_{x\varphi} - \varphi_t\xi^\tau_{\varphi\varphi}) - 3\varphi_x\varphi_{xx}\xi^x_\varphi - 2\varphi_\tau\varphi_{xx}\xi^\tau_\varphi - 2\varphi_{\tau x}\varphi_x\xi^\tau_\varphi +$$

$$+\varphi_{xx}(2\eta_\varphi - 3\xi^x_x) - 2\varphi_{\tau x}\xi^\tau_x - 2\varphi_x\varphi_t\xi^\tau_{x\varphi} + \varphi_x(2\eta_{\varphi x} + \eta_{\varphi\varphi} - 2\xi^x_\varphi - \xi^x_{xx}) - \varphi_\tau\xi^\tau_{xx} + \eta_{xx},$$

$$\zeta_{22} = -(\varphi_\tau)^3\xi^\tau_{\varphi\varphi} - (\varphi_\tau)^2(\varphi_x\xi^x_{\varphi\varphi} - 2\xi^\tau_{\varphi\varphi}) - 3\varphi_\tau\varphi_{\tau\tau}\xi^x_\varphi - 2\varphi_x\varphi_{\tau\tau}\xi^x_\varphi - 2\varphi_{\tau x}\varphi_\tau\xi^x_\varphi$$

$$+\varphi_{\tau\tau}(2\eta_\varphi - 3\xi^\tau_\tau) - 2\varphi_{\tau x}\xi^x_\tau - 2\varphi_x\varphi_\tau\xi^x_{\tau\varphi} + \varphi_\tau(2\eta_{\varphi\tau} + \eta_{\varphi\varphi} - 2\xi^\tau_\varphi - \xi^\tau_{\tau\tau}) - \varphi_x\xi^x_{\tau\tau} + \eta_{\tau\tau},$$

$$\zeta_{12} = -(\varphi_x)^2\xi^x_{\varphi\tau} - (\varphi_x)^2\varphi_\tau\xi^x_{\varphi\varphi} - (\varphi_\tau)^2\xi^\tau_{x\varphi} - (\varphi_\tau)^2\varphi_x\xi^\tau_{\varphi\varphi} - 2\varphi_x\varphi_{\tau x}\xi^x_\varphi - 2\varphi_x\varphi_{\tau\tau}\xi^\tau_\varphi -$$

$$-2\varphi_{\tau x}\varphi_\tau\xi^\tau_\varphi - \varphi_{xx}\varphi_\tau\xi^x_\varphi + \varphi_{\tau x}(\eta_\varphi - \xi^x_x - \xi^\tau_\tau) - 2\varphi_{\tau\tau}\xi^\tau_x - \varphi_{xx}\xi^x_\tau + \varphi_\tau\varphi_x(\eta_{\varphi\varphi} - \xi^x_{x\varphi} -$$

$$-\xi^\tau_{\varphi\tau}) + \varphi_\tau(\eta_{\varphi x} - \xi^\tau_{x\tau}) + \varphi_x(\eta_{\varphi t} - \xi^x_{x\tau}) + \eta_{x\tau}.$$

Используя критерий инвариантности [5], получим

$$X^{(2)}(\varphi_\tau - \varphi(\varphi_x)^2 - \frac{1}{2}\varphi^2\varphi_{xx} - \varphi)\big|_{\varphi_{xx}=\frac{2\varphi(1+\varphi_x^2)-2\varphi_\tau}{\varphi^2}} = 0,$$

где $\tau, x, \varphi, \varphi_\tau, \varphi_x, \varphi_{xx}$ следует рассматривать как независимые координаты в продолженном пространстве. А коэффициенты оператора X зависят только от (τ, x, φ) .

Действуем оператором $X^{(2)}$ на уравнение (1), подставляя φ_{xx}, получаем результат:

$$\eta_\tau + \varphi_\tau\eta_\varphi - \varphi_x\xi^x_\tau - (\varphi_\tau)^2\xi^\tau_\varphi - \varphi_\tau\xi^\tau_\tau - \varphi_\tau\varphi_x\xi^x_\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2(\varphi_x)^3\xi^x_{\varphi\varphi} + \varphi^2(\varphi_x)^2\xi^x_{\varphi\varphi} +$$

$$+\frac{1}{2}\varphi^2\varphi_t(\varphi_x)^2\xi^\tau_{\varphi\varphi} + 3\varphi\varphi_x\xi^x_\varphi + 3\varphi(\varphi_x)^3\xi^x_\varphi - 6\varphi_x\varphi_\tau\xi^x_\varphi + 2\varphi_\tau\varphi\xi^\tau_\varphi + +2\varphi\varphi_\tau(\varphi_x)^2\xi^\tau_\varphi -$$

$$-2(\varphi_\tau)^2\xi^\tau_\varphi + \varphi^2\varphi_x\varphi_{\tau x}\xi^\tau_\varphi + \varphi^2\varphi_x\varphi_\tau - \xi^\tau_{x\varphi} - 2\eta_\varphi\varphi - 2\eta_\varphi\varphi(\varphi_x)^2 +$$

$$+4\eta_\varphi\varphi_\tau + 3\varphi\xi^x_x + 3\varphi(\varphi_x)^2\xi^x_x - \tag{2}$$

$$-6\varphi_\tau\xi^x_x + \varphi^2\varphi_{\tau x}\xi^\tau_x - \frac{1}{2}\varphi^2\varphi_x(2\eta_{\varphi x} + \varphi_{\varphi\varphi} - \xi^\tau_{xx} - 2\xi^x_\varphi) + \frac{1}{2}\varphi^2\varphi_t\xi^\tau_{xx} - \frac{1}{2}\varphi^2\eta_{xx} - 2\varphi\varphi_x\eta_x -$$

$$-2\varphi(\varphi_x)^2\eta_\varphi + 2\varphi(\varphi_x)^2\xi^x_x + 2\varphi(\varphi_x)^3\xi^x_\varphi + 2\varphi\varphi_x\varphi_\tau\xi^\tau_x + 2\varphi\varphi_x\varphi_\tau\xi^\tau_x + 2\varphi\varphi_\tau(\varphi_x)^2 -$$

$$-\xi^\tau_\varphi - 3\eta(\varphi_x)^2 - 3\eta + 2\eta\frac{\varphi_\tau}{\varphi} = 0$$

Система определяющих уравнений

Расщепляем полученный многочлен (2) относительно свободных переменных $\varphi_x^3, \varphi_\tau^2, \varphi_x^2, \varphi_x^2\varphi_t, \varphi_x\varphi_\tau, \varphi_x\varphi_{\tau x}, \varphi_\tau, \varphi_x, \varphi_{\tau x}, \varphi^0$. Приравниваем коэффициенты к нулю и получаем следующую линейную однородную систему дифференциальых уравнений в частных производных:

$$
\begin{cases}
\xi^\tau_\varphi = 0 & (3)\\
\xi^\tau_x = 0 & (4)\\
4\xi^x_x\varphi - 2\eta_\tau + \eta_{xx}\varphi^2 - 2\varphi\eta_\varphi - 2\eta = 0 & (5)\\
-2\varphi\xi^\tau_\tau + \xi^\tau_{xx}\varphi^3 - 4\eta - 2\xi^\tau_\varphi\varphi^2 + 4\xi^x_x\varphi = 0 & (6)\\
-4\varphi\eta_x - 6\varphi\xi^x_\varphi - 2\eta_{xx}\varphi^2 + \xi^x_{xx}\varphi^2 - 2\xi^x_\tau = 0 & (7)\\
4\varphi^2\xi^\tau_x + 4\varphi\xi^x_\varphi + 2\xi^\tau_{\varphi x}\varphi^3 = 0 & (8)\\
\varphi\xi^x_{\varphi\varphi} - 2\xi^x_\varphi = 0 & (9)\\
\varphi\xi^x_{\varphi\varphi} + 2\xi^x_\varphi = 0 & (10)\\
-\eta_{tt}\varphi^3 + 2\varphi(\xi^x_{\varphi x}\varphi^2 - \eta_{\tau\tau}\varphi + \eta) = 0 & (11)
\end{cases}
$$

Из уравнений (3) и (4) видно, что ξ^τ зависит только от $\tau \Rightarrow \xi^\tau = a(\tau)$. Также решая (6) уравнение имеем, что $\xi^x = f_1 + f_2\varphi^3$. Учитывая полученный результат, оставшиеся уравнения системы принимают вид:

$$
\begin{cases}
\xi^t = a(\tau) & (12)\\
\xi^x = f_1 + f_2\varphi^3 & (13)\\
4\varphi f_{1,x} + 4\varphi^4 f_{2,x} - 2\eta_\tau + \eta_{xx}\varphi^2 - 2\varphi\eta_\varphi - 2\eta = 0 & (14)\\
-2\varphi a'(\tau) - 4\eta + 4\varphi f_{1,x} + 4\varphi^4 f_{2,x} = 0 & (15)\\
-4\varphi\eta_x - 18\varphi^3 f_2 - 2\eta_{xx}\varphi^2 - \varphi^2 f_{1,xx} - \varphi^5 f_{2,xx} - 2\varphi f_{1,\tau} - 2\varphi^3 f_{2,\tau} = 0 & (16)\\
12\varphi^3 f_2 = 0 & (17)\\
-\eta_{\tau\tau}\varphi^3 + 2\varphi(\xi^x_{\varphi x}\varphi^2 - \eta_{\tau\tau}\varphi + \eta) = 0 & (18)
\end{cases}
$$

Из (17) видно, что $f_1 = 0$, и сразу выражая из уравнения (18) η, имеем:

$$
\begin{cases}
\xi^\tau = a(\tau) & (19)\\
\xi^x = f_1(x,\tau) & (20)\\
\eta = -\frac{1}{2}\varphi a'(\tau) + \varphi f_{1,x} & (21)\\
\varphi a''(\tau) + 2\varphi a'(\tau) = 2\varphi f_{1,x\tau} - \varphi^3 f_{1,xxx} & (22)\\
-2\varphi^3 f_{1,xxx} - 5\varphi^2 f_{1,xx} - 2\varphi f_{1,\tau} = 0 & (23)\\
\varphi^3 a'''(\tau) - \varphi^2 a'(\tau) = 2\varphi^3 f_{1,x\tau\tau} - 2\varphi^2 f_{1,x} & (24)
\end{cases}
$$

Разделим (22) на φ:

$$
a''(\tau) + 2a'(\tau) = 2f_{1,x\tau} - \varphi^2 f_{1,xxx}. \tag{25}
$$

Видим, что $f_{1,xxx} = 0$, так как $\varphi = const \Rightarrow f_1 = g_1(\tau)x^2 + g_2(\tau)x + g_3(\tau)$. Уравнение (25) принимает вид:

$$
a''(\tau) + 2a'(\tau) = 2f_{1,x\tau}.
$$

$$
\begin{cases}
f_{1,\tau} = 0\\
f_{1,xx} = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
g_1(\tau) = 0\\
g_2(\tau) = const\\
g_3(\tau) = const
\end{cases}
\Rightarrow \xi^x = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2.
$$

Далее решая дифференциальное уравнение $a''(\tau) + 2a'(\tau) = 0$, получаем $a(\tau) = \tilde{C}_3 + \tilde{C}_4\tau + \tilde{C}_5 e^{-2\tau}$. Из (22) видно, что $\tilde{C}_4 = 0$, тогда $\xi^\tau = \tilde{C}_3 + \tilde{C}_5 e^{-2\tau}$.

Подводя итог решения системы мы видим следующий результат:

$$
\xi^\tau = \tilde{C}_3 + \tilde{C}_5 e^{-2\tau},
$$

$$
\xi^x = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2,
$$

$$
\eta = \varphi(\tilde{C}_5 e^{-2\tau} + \tilde{C}_1),
$$

где $\tilde{C}_i$ – это произвольные константы интегрирования.

Алгебра Ли и оптимальная система подалгебр

Будем рассматривать конечномерную алгебру Ли, допускаемую уравнением (1). Опираясь на решение системы определяющих уравнений имеем следующий базис инфинитезимальных операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad X_2 = e^{-2\tau}\frac{\partial}{\partial \tau} + \varphi e^{-2\tau}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + \varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{26}$$

Таблица коммутаторов алгебры выглядит следующим образом:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-2X_2$	0	0
X_2	$2X_2$	0	0	0
X_3	0	0	0	$-X_4$
X_4	0	0	X_4	0

Построим внутренние дифференцирования, отвечающие базисным операторам X_i. Их действие на произвольный элемент алгебры $X = \varepsilon^i X_i \in L$ дает результат:

$$\begin{gathered} [X_1, X] = -2\varepsilon^2 X_2, \\ [X_2, X] = 2\varepsilon^1 X_2, \\ [X_3, X] = -\varepsilon^4 X_4, \\ [X_4, X] = \varepsilon^3 X_4. \end{gathered} \tag{27}$$

Внутренние автоморфизмы, порождаемые внутренними дифференцированиями (27), вычисляются по формуле $\frac{d\overline{X}}{d\tau_i} = [X_i, \overline{X}]$, в частности для X_1 уравнения для координат принимают вид

$$\frac{d\bar{X}}{d\tau_1} = -2\bar{\varepsilon}^2 X_2, \quad \bar{\varepsilon}^i \mid_{\tau=0} = \varepsilon^i, \quad i = 1, ..., 4, \tag{28}$$

где $\overline{X} = \bar{\varepsilon}^i X$ – оператор в преобразованной алгебре, τ_i – параметр внутреннего автоморфизма соответствующий X_i. То есть достаточно вычислить внутренние автоморфизмы, порождаемые базисными элементами алгебры

L. Далее приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных элементах X_i в обеих частях равенства (28), получаем систему уравнений на координаты преобразованного оператора $\overline{X}$:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^1}{\tau_1} = 0, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}^2}{\tau_1} = -2\bar{\varepsilon}^2, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}^3}{\tau_1} = 0, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}^4}{\tau_1} = 0, \quad \bar{\varepsilon}^i\mid_{\tau=0} = \varepsilon^i, \quad i = 1, ..., 4.$$

Под действием внутреннего автоморфизма преобразования координат оператора X, соответствующего элементу X_1, имеет вид:

$$A_1(\tau_1): \quad \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1, \ \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2 e^{-2\tau}, \ \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3, \ \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4.$$

Порождаемые остальными базисными элементами внутренние автоморфизмы, вычисляются аналогичным образом:

$$A_2(\tau_2): \quad \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1, \ \bar{\varepsilon}^2 = 2\tau_2\varepsilon^1 + \varepsilon^2, \ \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3, \ \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4.$$

$$A_3(\tau_3): \quad \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1, \ \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2, \ \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3, \ \bar{\varepsilon}^4 = -\tau_3\varepsilon^4 + \varepsilon^3.$$

$$A_4(\tau_4): \quad \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1, \ \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2, \ \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3, \ \bar{\varepsilon}^4 = \tau_4\varepsilon^3 + \varepsilon^4.$$

Таким образом мы получаем следующую систему внутренних автоморфизмов:

$$A_1 : \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2 e^{-2\tau_1}$$

$$A_2 : \bar{\varepsilon}^2 = 2\varepsilon^1\tau_2 + \varepsilon 2$$

$$A_4 : \bar{\varepsilon}^3 = -\varepsilon^4\tau_3 + \varepsilon 3$$

$$A_4 : \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^3\tau_4 + \varepsilon 4$$

Найдем оптимальную систему подалгебр, считая, что произвольный оператор алгебры представим в виде разложения по базису $X = \sum\limits_{i=1}^{4} \varepsilon^i X_i$. Рассмотрим вектор координат такого оператора в базисе алгебры (26) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Подействуем на него внутренним автоморфизмом A_1 и получим $(\alpha_1, \alpha_2 e^{-2t}, \alpha_3, \alpha_4)$. Здесь возможно два случая: если $\alpha_2 = 0$, то $(\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4)$ и если $\alpha_2 \neq 0$, то $(\alpha_1, \pm 1, \alpha_3, \alpha_4)$.

В случае $\alpha_1 \neq 0$, вектор $(\alpha_1, \pm 1, \alpha_3, \alpha_4)$, под действием внутреннего автоморфизма A_2, примет вид $(\gamma, 0, \alpha_3, \alpha_4) \to (1, 0, \alpha_3, \alpha_4)$. И на данном этапе имеем три вектора:

$$(\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4), \quad (1, 0, \alpha_3, \alpha_4), \alpha_1 \neq 0, \quad (0, \pm 1, \alpha_3, \alpha_4), \alpha_1 = 0.$$

Пусть $\alpha_1 \neq 0$, тогда под действием автоморфизма A_3 получаем:

$$(\alpha_1, 0, 0, 1) \quad (1, 0, 0, \gamma), \gamma \neq 0, \quad (0, \pm 1, 0, \gamma), \gamma \neq 0,$$

$$(1, 0, \alpha_3, 0), \quad (0, \pm 1, \alpha_3, 0), \quad (\alpha_1, 0, \alpha_3, 0).$$

Где из последнего вектора, под действием внутреннего автоморфизма, получаем:

$$(1, 0, \alpha_3, 0), \alpha_1 \neq 0, \quad (0, 0, 1, 0), \alpha_3 \neq 0.$$

Таким образом оптимальную систему одномерных подалгебр алгебры с базисом (26) образуют подалгебры $\langle \alpha_1 X_1 + X_4 \rangle, \langle X_1 \rangle, \langle \pm X_2 + \gamma X_4 \rangle, \langle X_3 \rangle, \langle X_1 + \alpha_3 X_3 \rangle, \langle \pm X_2 + \alpha_3 X_3 \rangle$, где $\alpha_i \neq 0, \gamma \neq 0$.

Каждый из представителей полученной оптимальной системы одномерных подалгебр описывает класс эквивалентных между собой подалгебр. Эквивалентные подалгебры имеют одинаковые инварианты, а, следовательно, соответствуют одним и тем же инвариантным решениям уравнения (1) с точностью до преобразований допускаемой (1) группы Ли. Для получения всех инвариантных решений нужно подействовать преобразованиями группы на решения, соответствущие представленной оптимальной системой подалгебр. Найдем эти преобразования.

1. $X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau}$.

Здесь $\xi^x = 0,\ \xi^\tau = 1, \eta = 0$. Пользуясь первой основной теоремой Ли находим соответствующее оператору X_1 преобразование, как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{da_1} = 0 & \overline{x}\,|_{a_1=0} = x \\ \frac{d\overline{\tau}}{da_1} = 1 \ ; & \overline{\tau}\,|_{a_1=0} = \tau \\ \frac{d\overline{\varphi}}{da_1} = 0 & \overline{\varphi}\,|_{a_1=0} = \varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T_{a_1} : \begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{\tau} = a + \tau \\ \overline{\varphi} = \varphi \end{cases}.$$

Пусть $\varphi = \Phi(x,\tau)$ – решение исходного уравнения, тогда $\overline{\varphi} = \Phi(\overline{x},\overline{\tau})$ – также его решение; т.е.

$$\varphi(x,\tau) = \Phi(x, a+\tau)$$

. 2. $X_2 = e^{-2\overline{\tau}}\frac{\partial}{\partial\tau} + \varphi e^{-2\overline{\tau}}\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Здесь $\xi^x = 0,\ \xi^t = e^{-2\tau}, \eta = \varphi e^{-2\tau}$. Пользуясь первой основной теоремой Ли находим соответствующее оператору X_2 преобразование, как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{da_2} = 0 & \overline{x}\mid_{a_2=0} = x \\ \frac{d\overline{\tau}}{da_2} = e^{-2\tau} \quad ; & \overline{\tau}\mid_{a_2=0} = \tau \\ \frac{d\overline{\varphi}}{da_2} = \overline{\varphi}e^{-2\overline{\tau}} & \overline{\varphi}\mid_{a_2=0} = \varphi \end{cases} \Rightarrow \qquad T_{a_2} : \begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{\tau} = \frac{1}{2}\ln(2a_2 + e^{2\tau}) \\ \overline{\varphi} = \varphi e^{-\frac{1}{2}e^{-2a_2}} \end{cases}.$$

Пусть $\varphi = \Phi(x,\tau)$ – решение исходного уравнения, тогда $\overline{\varphi} = \Phi(\overline{x},\overline{\tau})$ – также его решение; т.е.

$$\varphi(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}e^{-2a_2}}\Phi(x, \frac{1}{2}\ln(2a_2 + e^{2\tau}))$$

. 3. $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + \varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Здесь $\xi^x = x,\ \xi^t = 0, \eta = \varphi$. Пользуясь первой основной теоремой Ли находим соответствующее оператору X_3 преобразование, как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{da_3} = \overline{x} & \overline{x}\mid_{a_3=0} = x \\ \frac{d\overline{\tau}}{da_3} = 0 \quad ; & \overline{\tau}\mid_{a_3=0} = \tau \\ \frac{d\overline{\varphi}}{da_3} = \overline{\varphi} & \overline{\varphi}\mid_{a_3=0} = \varphi \end{cases} \Rightarrow \qquad T_{a_3} : \begin{cases} \overline{x} = xe^{a_3} \\ \overline{\tau} = \tau \\ \overline{\varphi} = \varphi e^{a_3} \end{cases}.$$

Пусть $\varphi = \Phi(x,\tau)$ – решение исходного уравнения, тогда $\overline{\varphi} = \Phi(\overline{x},\overline{\tau})$ – также его решение; т.е.

$$\varphi(x,\tau) = e^{-a_3}\Phi(xe^{a_3}, \tau)$$

. 4. $X_4 = \frac{\partial}{\partial x}$.

Здесь $\xi^x = 1,\ \xi^\tau = 0, \eta = 0$. Пользуясь первой основной теоремой Ли находим соответствующее оператору X_4 преобразование, как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{da_4} = 1 & \overline{x}\,|_{a_4=0} = x \\ \frac{d\overline{\tau}}{da_4} = 0 \quad ; & \overline{\tau}\,|_{a_4=0} = \tau \\ \frac{d\overline{\varphi}}{da_4} = 0 & \overline{\varphi}\,|_{a_4=0} = \varphi \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad T_{a_4} : \begin{cases} \overline{x} = a_4 + x \\ \overline{\tau} = \tau \quad . \\ \overline{\varphi} = \varphi \end{cases}$$

Пусть $\varphi = \Phi(x, \tau)$ – решение исходного уравнения, тогда $\overline{\varphi} = \Phi(\overline{x}, \overline{\tau})$ – также его решение; т.е.

$$\varphi(x, \tau) = \Phi(a_4 + x, \tau)$$

.

Инвариантные решения ранга 1

Основываясь на результатах изложенных выше, получаем, что оптимальная система состоит из следующих элементов:

$$B_1 = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x},$$

$$B_2 = e^{-2\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} + \varphi e^{-2\tau} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial}{\partial x},$$

$$B_3 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$B_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$B_5 = e^{-2t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \varphi e^{-2\tau} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_3 x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_3 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$B_6 = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Построим инвариантные решения относительно групп Ли этих операторов.

1. $B_1 = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}$.

Составляем характеристическое уравнение $\frac{d\tau}{\alpha_1} = \frac{dx}{1} = \frac{d\varphi}{0}$ и попарно интегрируем, получаем универсальный инвариант $I = \{\varphi, \alpha_1 x - \tau\}$. Используя универсальный инвариант, можем записать представление B_1 – инвариантного решения в виде

$$\varphi = f(\lambda), \qquad \lambda = \alpha_1 x - \tau.$$

После подстановки его в уравнение (1) получаем фактор-уравнение в виде:

$$\frac{\alpha_1}{2} f(\lambda) f''(\lambda) + 2f'^2(\lambda) + 2f'(\lambda) + 1 = 0.$$

Вводим замену: $f(\lambda) = x,\ f'(\lambda) = y(x),\ \alpha_3 = b$, тогда уравнение получает вид:

$$\frac{b^2}{2} x y y' + y^2 + y + 1 = 0, \tag{29}$$

приводя его к уравнению Абеля второго рода

$$[y + g(x)]y' = f_2(x) y^2 + f_1(x) y + f_0(x).$$

Здесь $g(x) = 0,\ f_2(x) = \frac{b^2x}{2},\ f_1(x) = \frac{b^2x}{2},\ f_0 = \frac{b^2x}{2}$.

Как рекомендуется в справочнике [6] делаем подстановку

$$u(x) = (y+g)E,\ E = e^{-\int f_2 dx}.$$

Для уравнения (29) имеем

$$u(x) = y(x)e^{-\int f_2 dx} = y(x)e^{-\int \frac{b^2x}{2}dx} = e^{-\frac{x^2b^2}{4}}y(x).$$

Такая подстановка приводит уравнение к специальному виду

$$uu' = (f_1 + g' - 2f_2g)Eu + (f_0 - f_1g + f_2g^2)E^2,$$

и для уравнения (29)

$$uu' = \frac{b^2x}{2}\left(e^{-\frac{x^2b^2}{4}}u + e^{\frac{x^4b^4}{16}}\right). \tag{30}$$

Уравнение (30) подстановкой

$$u(x) = z(x) + F(x),\ F(x) = \int f_1 dx,$$

приводится к виду

$$(z(x)+F)z'(x) = f_0.$$

То есть

$$u(x) = z(x) + \frac{b^2x^2}{4},$$

$$\left(z(x) + \frac{b^2x^2}{4}\right)z'(x) = \frac{b^2x}{2}.$$

Пусть $f_0 \neq 0$, тогда

$$(\eta(\xi)+\xi)\eta'(\xi) = 1,\ z(x) = \eta(\xi),\ \xi = \int f_0 dx.$$

Решая дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\eta+\xi}$$

получаем

$$\eta = -z - W(C_1e^{-z-1}) - 1, \tag{*}$$

где W – функция Ламберта, которая является решением уравнения $We^W = x$. Для операторов B_3 и B_5, после ряда преобразований, приходим к такому же уравнению.

Далее поэтапно делаем обратную подстановку, учитывая полученные результаты

$$z = -\frac{b^2x^2}{4} - W(C_1 e^{-\frac{b^2x^2}{4}-1}) - 1,$$

$$u = -W(C_1 e^{-\frac{b^2x^2}{4}-1}) - 1,$$

$$f = \frac{1}{e^{-\frac{x^2b^2}{4}}} \left(-W(C_1 e^{-\frac{b^2x^2}{4}-1}) - 1\right).$$

Подставляем этот результат в равенство $\varphi = f(\lambda)$:

$$\varphi(x,\tau) = \frac{1}{e^{-\frac{x^2b^2}{4}}} \left(-W(C_1 e^{-\frac{b^2x^2}{4}-1}) - 1\right),$$

что является решением уравнения (1).

2. $B_2 = e^{-2\tau}\frac{\partial}{\partial\tau} + \varphi e^{-2t}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \gamma\frac{\partial}{\partial x}$. Составляем характеристическое уравнение $\frac{d\tau}{e^{-2\tau}} = \frac{d\varphi}{\varphi e^{-2t}} = \frac{dx}{\gamma}$ и попарно интегрируем, получаем универсальный инвариант $I = \{\frac{e^{2\tau}}{2} - \frac{x}{\gamma}, \varphi e^{-\tau}\}$. Используя универсальный инвариант, можем записать представление B_1 – инвариантного

$$\varphi = e^{\tau} f(\lambda), \qquad \lambda = \frac{e^{2\tau}}{2} - \frac{x}{\gamma}.$$

После подстановки его в уравнение (1) получаем фактор-уравнение в виде:

$$f(\lambda)f''(\lambda) - 2f'^2\lambda = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение является уравнением Лиувилля второго порядка. В результате решения получаем: $f = \frac{1}{C_1\lambda + C_2}$.

Подставляем этот результат в равенство $\varphi = e^{\tau} f(\lambda)$:

$$\varphi(x,\tau) = \frac{2\gamma e^{\tau}}{C_1(\gamma e^{2\tau} - 2x) + C_2},$$

что и является решением уравнения (1). Графическое решение можно увидеть на Рис.1.

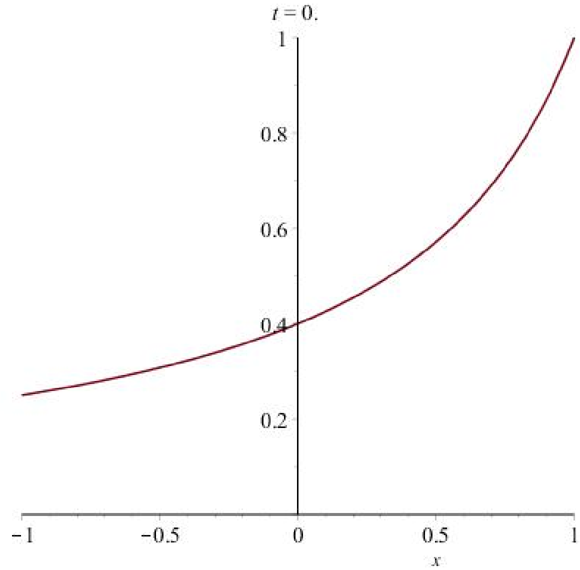

Рис. 1:

График общего решения уравнения B_2 при

$\gamma = 2; C_1 = 3; C_2 = 4;$

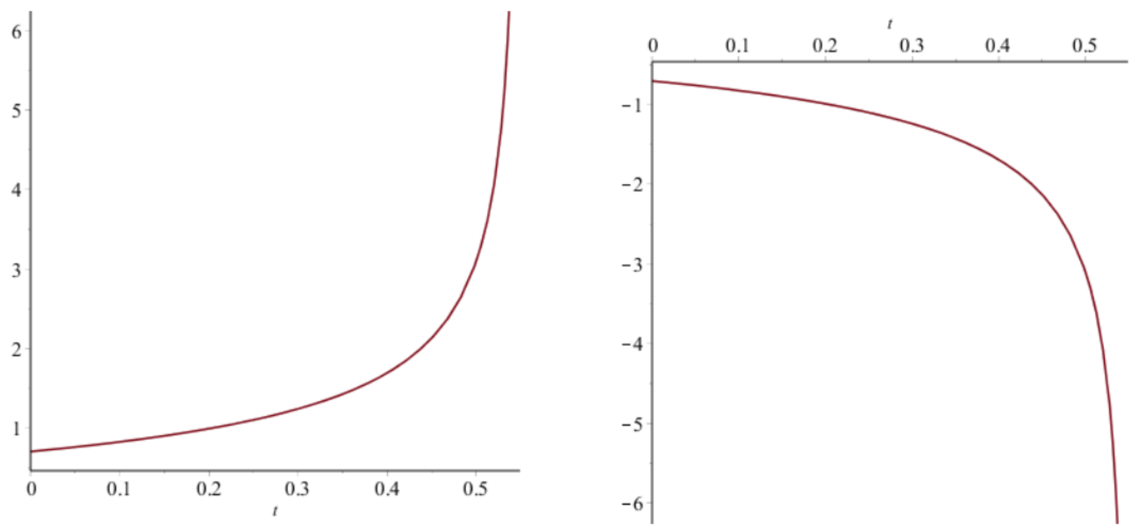

Рис. 2:

График общего решения уравнения B_4 при

$x = 1; C_1 = 3;$

3. $B_3 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Составляем характеристическое уравнение $\frac{d\tau}{1} = \frac{dx}{\alpha_3 x} = \frac{d\varphi}{\alpha_3 \varphi}$ и попарно интегрируем, получаем универсальный инвариант $I = \{\tau - \varphi_3 \ln x, \frac{x}{\varphi}\}$.

Используя универсальный инвариант, можем записать представление B_3 - инвариантного решения в виде

$$\varphi = x f(\lambda), \qquad \lambda = \tau - \varphi_3 \ln x.$$

После подстановки его в уравнение (1) получаем фактор-уравнение в виде:

$$\alpha_3^2 f^2(\lambda) f''(\lambda) + 2\alpha_3^2 f^2 f(\lambda) f'^2(\lambda) + 5\alpha_3^2 f^2 f'(\lambda) - 2f^3(\lambda) - 2f(\lambda) = 0.$$

Вводим замену: $f(\lambda) = x,\ f'(\lambda) = y(x),\ \alpha_3 = b$, тогда уравнение получает вид:

$$yy' - \frac{2}{x} y^2 - \frac{5bx + 2}{b^2 x^2} y + \frac{2(x^2 + 1)}{b^2 x} = 0, \tag{31}$$

приводя его к уравнению Абеля второго рода

$$[y + g(x)]y' = f_2(x) y^2 + f_1(x) y + f_0(x).$$

Здесь $g(x) = 0,\ f_2(x) = \frac{2}{x},\ f_1(x) = \frac{5bx+2}{b^2 x^2},\ f_0 = \frac{2(x^2+1)}{b^2 x}$.

Как рекомендуется в справочнике [6] делаем подстановку

$$u(x) = (y + g)E,\ E = e^{-\int f_2 dx}.$$

Для уравнения (31) имеем

$$u(x) = y(x) e^{-\int f_2 dx} = y(x) e^{-\int \frac{2}{x} dx} = x^{-2} y(x).$$

Такая подстановка приводит уравнение к специальному виду

$$uu' = (f_1 + g' - 2f_2 g) E u + (f_0 - f_1 g + f_2 g^2) E^2,$$

и для уравнения (31)

$$uu' = \frac{5bx + 2}{b^2 x^4} u + \frac{2(x^2 + 1)}{b^2 x^5}. \tag{32}$$

Уравнение (32) подстановкой

$$u(x) = z(x) + F(x),\ F(x) = \int f_1 dx,$$

приводится к виду

$$(z(x) + F)z'(x) = f_0.$$

То есть

$$u(x) = z(x) + \frac{-5}{2bx^2} - \frac{2}{3x^3b^b},$$

$$\left(z(x) + \frac{-5}{2bx^2} - \frac{2}{3x^3b^b}\right) z'(x) = \frac{2(x^2+1)}{b^2x^5}.$$

Далее поэтапно делаем обратную подстановку, учитывая полученные результаты в том числе (*)

$$z = -\frac{2}{b^2}(x - \frac{1}{x}) - W(C_1 e^{-\frac{2}{b^2}(x-\frac{1}{x})-1}) - 1,$$

$$u = -\frac{2}{b^2}(x - \frac{1}{x}) - W(C_1 e^{-\frac{2}{b^2}(x-\frac{1}{x})-1}) - 1 - \frac{5}{2bx^2} - \frac{2}{3x^3b^2},$$

$$f = -\frac{6b^2x^3 - 15bx - 12x^4 + 12x^2 - 4}{6b^2x} - W(C_1 e^{-\frac{2}{b^2}(x-\frac{1}{x})-1}).$$

Подставляем этот результат в равенство $\varphi = xf(\lambda)$:

$$\varphi(x,t) = -\frac{6b^2x^3 - 15bx - 12x^4 + 12x^2 - 4}{6b^2} - Wx(C_1 e^{-\frac{2}{b^2}(x-\frac{1}{x})-1}),$$

что является решением уравнения (1).

4. $B_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + \varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Составляем характеристическое уравнение $\frac{d\tau}{0} = \frac{dx}{x} = \frac{d\varphi}{\varphi}$ и попарно интегрируем, получаем универсальный инвариант $I = \{\tau, \frac{\varphi}{x}\}$.

Используя универсальный инвариант, можем записать представление B_4 - инвариантного решения в виде

$$\varphi = xf(\lambda), \qquad \lambda = \tau.$$

После подстановки его в уравнение (1) получаем фактор-уравнение в виде:

$$f'(\lambda) - f(\lambda) + f^3(\lambda) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли. В результате решения получаем: $f = \pm\sqrt{(C_1^{e^{-2\tau}} - 1)}$. Подставляем этот результат в равенство $\varphi = xf(\lambda)$:

$$\varphi(x,\tau) = \pm x\sqrt{C_1^{e^{-2\tau}} - 1},$$

что и является решением уравнения (1). Графическое решение можно увидеть на Рис.2.

5. $B_5 = e^{-2\tau}\frac{\partial}{\partial\tau} + \varphi e^{-2\tau}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \alpha_3 x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_3\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Составляем характеристическое уравнение $\frac{d\tau}{e^{-2\tau}} = \frac{d\varphi}{\varphi(e^{-2\tau}+\alpha_3)} = \frac{dx}{\alpha_3 x}$ и попарно интегрируем, получаем универсальный инвариант $I = \{\frac{e^{\frac{\alpha_3}{2}e^{2\tau}+\tau}}{\varphi}, \ln x - \alpha_3\frac{e^{2\tau}}{2}\}$.

Используя универсальный инвариант, можем записать представление B_5 - инвариантного решения в виде

$$\varphi = e^{\frac{\alpha_3}{2}e^{2\tau}+\tau}f(\lambda), \qquad \lambda = \ln x - \frac{\alpha_3}{2}e^{2\tau}.$$

После подстановки его в уравнение (1) получаем фактор-уравнение в виде:

$$f^2f'' + 2f'(\alpha_3 e^{2\lambda} - \frac{1}{2}f^2) + 2ff'^2 - 2\alpha_3 e^{2\lambda}f = 0.$$

Вводим замену: $f(\lambda) = x,\ f'(\lambda) = y(x),\ \alpha_3 = b$, тогда уравнение получает вид:

$$yy' + 2x^2y(be^{2\lambda} - \frac{1}{2}x^2) + 2x^3y^2 - 2x^3be^{2\lambda} = 0, \tag{33}$$

приводя его к уравнению Абеля второго рода

$$[y + g(x)]y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x).$$

Здесь $g(x) = 0,\ f_2(x) = 2x^3,\ f_1(x) = 2x^2(be^{2\lambda} - \frac{1}{2}x^2),\ f_0 = -2x^3be^{2\lambda}$.

Как рекомендуется в справочнике [6] делаем подстановку

$$u(x) = (y+g)E,\ E = e^{-\int f_2 dx}.$$

Для уравнения (33) имеем

$$u(x) = y(x)e^{-\int f_2 dx} = y(x)e^{-\int 2x^3 dx} = e^{\frac{x^4}{2}}y(x).$$

Такая подстановка приводит уравнение к специальному виду

$$uu' = (f_1 + g' - 2f_2g)Eu + (f_0 - f_1g + f_2g^2)E^2,$$

и для уравнения (33)

$$uu' = (2x^2be^{2\lambda} - x^4)e^{\frac{x^4}{2}}u - 2x^3be^{2\lambda}e^{\frac{x^8}{4}}. \tag{34}$$

Уравнение (34) подстановкой

$$u(x) = z(x) + F(x),\ F(x) = \int f_1dx,$$

приводится к виду

$$(z(x) + F)z'(x) = f_0.$$

То есть

$$u(x) = z(x) + \frac{2be^{2\lambda}x^3}{3} - \frac{x^5}{5},$$

$$\left(z(x) + \frac{2be^{2\lambda}x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)z'(x) = -2x^3be^{2\lambda}.$$

Далее поэтапно делаем обратную подстановку, учитывая полученные результаты в том числе (*)

$$z = be^{2\lambda}\frac{x^4}{2} - W(C_1e^{be^{2\lambda}\frac{x^4}{2}-1}) - 1,$$

$$u = be^{2\lambda}\frac{x^4}{2} - W(C_1e^{be^{2\lambda}\frac{x^4}{2}-1}) - 1 + \frac{2be^{2\lambda}x^3}{3} - \frac{x^5}{5},$$

$$f = \frac{1}{e^{\frac{x^4}{2}}}\left(be^{2\lambda}\frac{x^4}{2} - W(C_1e^{be^{2\lambda}\frac{x^4}{2}-1}) - 1 + \frac{2be^{2\lambda}x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right).$$

Подставляем этот результат в равенство $\varphi = e^{\frac{\alpha_3}{2}e^{2\tau}+\tau}f(\lambda)$:

$$\varphi(x,\tau) = e^{\frac{\alpha_3}{2}e^{2\tau}+\tau-\frac{x^4}{2}}(x^2be^{-\alpha_3e^{2\tau}}\frac{x^4}{2} - W(C_1x^2be^{-\alpha_3\frac{x^4}{2}-1}) - 1 + \frac{x^2be^{-\alpha_3e^{2\tau}}x^3}{3} - \frac{x^5}{5}),$$

что является решением уравнения (1).

6. $B_6 = \frac{\partial}{\partial\tau}$.

Составляем характеристическое уравнение $\frac{d\tau}{1} = \frac{dx}{0} = \frac{d\varphi}{0}$ и попарно интегрируем, получаем универсальный инвариант $I = \{\varphi, x\}$.

Используя универсальный инвариант, можем записать представление B_6 - инвариантного решения в виде

$$\varphi = f(\lambda), \qquad \lambda = x.$$

После подстановки его в уравнение (1) получаем фактор-уравнение в виде:

$$ff''(\lambda) + 2(f'(\lambda))^2 + 2 = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение. В результате решения получаем: $f = \pm\sqrt{(C_1\lambda^2 + C_2) \pm \sqrt{(C_1\lambda^2 + C_2)^2 + 1}}$. Подставляем этот результат в равенство $\varphi = f(\lambda)$:

$$\varphi(x, \tau) = \pm\sqrt{(C_1 x^2 + C_2) \pm \sqrt{(C_1 x^2 + C_2)^2 + 1}},$$

что и является решением уравнения (1).

Заключение

В результате проведенного исследования была найдена основная допускаемая группа Ли преобразований уравнения (1), построена оптимальная система одномерных подалгебр, позволяющая получить все инвариантные решения ранга один данного уравнения, некоторые из которых представлены выше. Данные точные решения уравнения (1) обладают симметрией и полезны для проверки численных расчетов.

Список литературы

1. Ильюшин, А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям/Ильюшин, А.А.// ПММ. –1954. Т. Вып. 3. С. 265–288.
2. Безухов В.Н. Об осадке пластического слоя некруговой формы в плане/ Канд.дисс., М., МГУ. –1955. –78с.
3. Кийко И.А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями/Кийко И.А.// ПММ. –2011. Т. 75. Вып. 1. С. 15–26.
4. С.В. Головин. Групповой анализ дифференциальных уравнений: Учебное пособие/С.В. Головин, А.А.Чесноков// Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. –2008. – 113 с.
5. Л.В. Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений: Учебник/Л.В. Овсянников.// М.: Издательство сибирского отделения АН СССР. –1962. –242 с.
6. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебник/Э.Камке.// Пер. с нем. - 4-е изд., испр. М.: Наука: Гл.ред. физ-мат. лит., –1971. –576 с.