МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
Татосов А.В.
2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ОБОБЩЕНИЕ УСЛОВИЙ КОШИ-РИМАНА

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнила работу
Студентка 2 курса
очной формы обучения
Немирова Анастасия Андреевна

Руководитель работы
д.ф.-м.н.
профессор
Латфуллин Тагир Гумерович

Рецензент
к.ф.-м.н.
доцент
Иванов Дмитрий Иванович

Тюмень, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель магистерской диссертации заключается в написании работы по теме: «Обобщение условий Коши-Римана».

Задачи:

- описать основные понятия, используемые в работе
- рассмотреть отображения, имеющие односторонние производные в нормированном кольце;
- показать, как правило умножения порождает условия Коши-Римана
- показать, как из аналога условий Коши-Римана восстанавливается правило умножения в конечномерном кольце;
- доказать, что если кольцо коммутативно, то множество дифференцируемых отображения содержит многочлены любых степеней;
- для некоммутативных колец показать случай, когда класс дифференцируемых отображений не содержит многочленов, степень которых выше некоторого числа;
- получить алгоритм вычисления такого числа

Данная работа состоит из введения, пяти глав, некоторые их которых разделены на параграфы, заключения и списка использованной литературы.

В первой главе излагаются основные определения, необходимые для решения рассматриваемых задач.

Во второй главе показано как правило умножения порождает условия Коши-Римана.

В третьей главе показано, как из условий Коши-Римана восстанавливается правило умножения.

Четвертая глава посвящена доказательству того, что если кольцо коммутативно, то множество дифференцируемых отображений содержит многочлены любых степеней.

Пятая глава показывает, что для некоммутативных колец, класс дифференцируемых отображений не содержит многочленов, степень которых выше некоторого числа, а также получен алгоритм нахождения такого числа.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Линейным функционалом f на линейном нормированном пространстве E называют числовую функцию $f(x)$, определённую для всех x из E и обладающую следующими свойствами:

1) $f(x)$ линейна, т. е. $f\big((x)+(y)\big)=f(x)+f(y)$,

где x и y — любые элементы из E;

2) $f(x)$ непрерывна.

Определение 2. Пусть X – нормированные пространство под полем $\mathbb{R}$ и $F: X \times X \to \mathbb{X}$ – ограниченное билинейное отображение.

Обозначим $x \odot y = F(x, y)$ и операцию $\odot$ умножением в X, а X вместе с умножением назовем кольцом (нормированным кольцом).

Определение 3. Кольцо X называется коммутативным если $x \odot y = y \odot x \ \forall\, x, y \in X$.

Примеры коммутативных колец:

$$\mathbb{R},\ \mathbb{C}, \mathrm{C}[0;1].$$

Примеры некоммутативных колец:

кватернионы, матрицы $n \times n$, линейные ограниченные операторы из X в X.

Определение 4. Пусть X – кольцо и G – область в X. Отображение $f: G \to X$ называется лево-дифференцируемым в точке x, если существует $a \in X$, с которым

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - b \odot h}{\|h\|} = 0$$

Определение 5. Вектор b называется левой производной отображения f в точке x $\ (f'(x) = b)$

Определение 6. Отображение называется лево-дифференцируемым, если оно дифференцируемо в любой точке $x \in G$.

ГЛАВА 2.

2.1 Дифференцируемые отображения конечномерных коммутативных колец

На пространстве $\mathbb{R}^n$ можно задать умножение векторов путем задания n билинейных форм $L_1, L_2, \dots, L_n$. Тогда для $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \odot y = (L_1(x,y), L_2(x,y), \dots, L_n(x,y)). \qquad (1)$$

$\mathbb{R}^n$ вместе с так определенным умножением называется -мерным кольцом. Это кольцо обозначим $\mathbb{K}$.

Пусть $L_k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k x_i y_j$, тогда $x \odot y$ примет вид

$$x \odot y = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^1 x_i y_j, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 x_i y_j, \dots, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^n x_i y_j \right] \qquad (2)$$

Умножение коммутативно тогда и только тогда, когда все формы симметричны, то есть $L_k(x,y) = L_k(y,x)$ для всех $k = 1,2,\dots,n$. Это условие эквивалентно тому, что для любого k имеет место равенство $a_{ij}^k = a_{ji}^k$.

Отображение f области $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ называется лево-дифференцируемым в точке $x \in G$, если найдется $b \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$f(x+h) - f(x) = b \odot h + \alpha(h),$$

где $\alpha(h)$ бесконечно-малая относительно h (в евклидовой норме $\mathbb{R}^n$).

f – право-дифференцируемо в точке x, если найдется $b \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$f(x+h) - f(x) = h * b + \beta(h), \quad \beta(h) = o(h)$$

2.2 Условия Коши-Римана для отображения колец

Обозначение $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ класса C^1: $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1^1(x) & f_2^1(x) & \cdots & f_n^1(x) \\ f_1^2(x) & f_2^2(x) & \cdots & f_n^2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^n(x) & f_2^n(x) & \cdots & f_n^n(x) \end{pmatrix} \text{– матрица Якоби.}$$

Пусть f лево-дифференцируемо в точке $x \in \mathbb{R}^n$, это значит, что найдется $b \in \mathbb{R}^n$ с которым

$$f'(x) * h = b \odot h.$$

Слева стоит произведение матрицы Якоби на столбец h, равный транспонированной строке $(h_1, h_2, \dots, h_n)$. Чтобы избежать недоразумений, будем считать, что упорядоченные наборы чисел b и h представляют из себя столбцы. Элементы столбцов $f'(x) * h$ и $b \odot h$, стоящие на местах с номером k обозначим A_k и B_k.

$$A_k = \sum_{i=1}^n f_i^k(x) h_i, \quad B_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^k b_i h_j.$$

Рассмотрим представление B_k. Так как i и j играют служебную роль, являясь индексами суммирования, поменяем их местами

$$B_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji}^k b_j h_i$$

Поменяем порядок суммирования

$$B_k = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n a_{ji}^k b_j \Big) h_i \tag{3}$$

Так как $A_k = B_k$ при любых h сравнивая представление для A_k и представление (3) для B_k, убеждаемся, что

$$f_i^k(x) = \sum_{j=1}^n a_{ji}^k b_j \tag{4}$$

Обозначим

$$F_i^k(b_1, b_2, \dots, b_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^k b_j$$

F_i^k – линейные функционалы определенные в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Замечания.

1) Числа b_j определяются точкой $x \in \mathbb{R}$, поэтому справа в (4) записана линейная комбинация функций $b_j(x)$.

2) Правые части равенства (4) представляют собой линейные функционалы, аргумент которых $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим эти функционалы

$$F_i^k(b) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^k b_j$$

$A_i^k = (a_{1i}^k, a_{2i}^k, \dots, a_{ni}^k) \in \mathbb{R}^n$ – набор коэффициентов, определяющих функционал F_i^k.

2.3 Условия Коши-Римана, порожденные умножением в кольце

Пусть f – лево-дифференцируемое отображение, тогда частные производные первого порядка координатных функций $f_i^k = \frac{\partial f^k}{\partial x_i}$ удовлетворяют n^2 равенствам (4). В правых частях равенств стоят значения линейных функционалов F_i^k. Систему этих функционалов обозначим $\mathcal{F}$, а ее ранг $\mathcal{R}$.

Возьмем какое-нибудь множество функционалов, образующих базис в $\mathcal{F}$ и переобозначим их как $F_1, F_2, \dots, F_{\mathcal{R}}$, оставшиеся функционалы тоже переобозначим: $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n^2-\mathcal{R}}$

Любой функционал Φ_k представим в виде линейной комбинации

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{\mathcal{R}} \lambda_i F_i = \Lambda(F_1, F_2, \dots, F_{\mathcal{R}}) \tag{5}$$

Каждый из функционалов F_i^k соответствует одной частной производной f_i^k(см.(4)). Частные производные, соответствующие функционалам F_i из базиса переобозначим f_i, а частные производные, соответствующие функционалам Φ_k переобозначим φ_k. Тогда системе равенств (5) будет соответствовать система равенств

$$\varphi_k = \Lambda(f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}}), \qquad k = 1,2, \dots, n^2 - \mathcal{R} \tag{6}$$

Здесь $f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}}$ - нумерованный набор частных производных f_i^j, линейными комбинациями которых представлены оставшиеся $n^2 - \mathcal{R}$ частных производных, φ_k, которые тоже, как видно, занумерованы.

Вернув частным производным прежние обозначения, получим систему из $n^2 - \mathcal{R}$ равенств, которую назовем условиями Коши-Римана.

Пример 1. $\mathbb{C}$ - пространство комплексных чисел. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, умножение в $\mathbb{C}$:

$$z * w = (x + iy) * (u + iv) = x * u - y * v + i(x * v + y * u).$$

Отождествим $\mathbb{C}$ с пространством $\mathbb{R}^2$, умножение определяется формулой

$$(x, y) \odot (u, v) = (x * u - y * v, x * v + y * u)$$

Тогда $\mathbb{R}$ превращается в кольцо.

Отображение $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ лево-дифференцируемо в точке $x \in G$, если найдется $b \in \mathbb{R}^n$ такое, что $f'(x) * h = b \odot h$. Пусть $f(x_1, x_2) = (f^1(x_1, x_2), f^2(x_1, x_2))$.

Так как

$$f'(x) * h = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 * h_1 + f_2^1 * h_2 \\ f_1^2 * h_1 + f_2^2 * h_2 \end{pmatrix},$$

$$b \odot h = \begin{pmatrix} b_1 * h_1 - b_2 * h_2 \\ b_2 * h_1 + b_1 * h_2 \end{pmatrix},$$

$$f_1^1 = b_1,\ f_2^1 = -b_2,\ f_1^2 = b_2,\ f_2^2 = b_1.$$

Итак, имеем четыре линейных функционала

$$F_1^1(b_1, b_2) = b_1,\ F_2^1(b_1, b_2) = -b_2,\ F_1^2(b_1, b_2) = b_2,\ F_2^2(b_1, b_2) = b_1.$$

Система функционалов $\{F_1^1, F_2^1\}$ линейно независима и $F_1^2 = -F_2^1$, $F_2^2 = F_1^1$.

Переходя к соответствующим формулам для частных производных, получим условие Коши-Римана

$$f_1^2 = -f_2^1,\ f_2^2 = f_1^1$$

В традиционной записи частных производных получаем

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_1} = -\frac{\partial f^1}{\partial x_2}, \frac{\partial f^2}{\partial x_2} = \frac{\partial f^1}{\partial x_1}.$$

ГЛАВА 3. ПОЛУЧЕНИЕ ПРАВИЛА УМНОЖЕНИЯ ИЗ УСЛОВИЙ КОШИ-РИМАНА

Пусть $f = (f^1,\ f^2, \dots, f^n): \mathbb{R}^n \ \to \mathbb{R}^n$ отображение класса C^1, частные производные первого порядка координатных функций f^k удовлетворяют условиям Коши-Римана (6).

Пусть система функций $f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}}, \varphi_1, \dots, \varphi_{n^2-\mathcal{R}}$ удовлетворяет равенствам (6).

Получим систему равенств

$$\begin{gathered}
f^1 = f^1, \\
f^2 = f^2, \\
\dots\dots\dots\dots, \\
f^{\mathcal{R}} = f^{\mathcal{R}}, \\
\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\mathcal{R}} \lambda_1^i f_i, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\varphi_{n^2-\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{\mathcal{R}} \lambda_{n^2-\mathcal{R}}^i f_i,
\end{gathered} \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что в правых частях равенств (7) стоят линейные функционалы переменных $f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}}$ и на то, что множество левых частей биективно соответствует множеству частных производных f_i^j. Линейный функционал, стоящий справа от f_i^jобозначим Γ_i^jперепишем тогда систему (7): (порядок строк может измениться)

$$\begin{gathered}
f_1^1 = \Gamma_1^1(f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}}), \\
f_1^2 = \Gamma_1^2(f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}}), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
f_n^{n-1} = \Gamma_n^{n-1}(f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}}), \\
f_n^n = \Gamma_n^n(f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}})
\end{gathered}$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} f_1^j h^j = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_1^j\, h^j$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_2^j h^j = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_2^j\, h^j$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_n^j h^j = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_n^j\, h^j$$

Таким образом,

$$f' * h = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_1^j\,(f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}})h^j \\ \sum_{j=1}^{n} \Gamma_2^j\,(f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}})h^j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} \Gamma_n^j\,(f_1, f_2, \dots, f_{\mathcal{R}})h^j \end{bmatrix}$$

Определим умножение в $\mathbb{R}^n$

$$p \odot h = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_1^j\,(p_1, p_2, \dots, p_{\mathcal{R}})h^j \\ \sum_{j=1}^{n} \Gamma_2^j\,(p_1, p_2, \dots, p_{\mathcal{R}})h^j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} \Gamma_n^j\,(p_1, p, \dots, p_{\mathcal{R}})h^j \end{bmatrix} \tag{8}$$

Таким образом, если отображение f удовлетворяет условиям Коши-Римана (6), то оно дифференцируемо в кольце с умножением $p \odot h$, определенным в (8).

ГЛАВА 4.

4.1 Дифференцируемые отображения в коммутативных кольцах

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задано умножение $x \odot y$ то есть, задано кольцо $\mathbb{K}$.

Определение 7. Пусть $k \in \mathbb{R}$ и $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция, определенная правилом

$$f(x) = x \odot x \odot \dots \odot x,$$

где умножение применяется k раз, называется возведением в степень k.

Используется обозначение: $f(x) = x^k$.

Замечание. Определение функции x^k корректно как для коммутативных, так и для некоммутативных колец.

Определение 8. Функция вида

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

называется многочленом степени m.

Лемма 1. Пусть $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - билинейная форма, тогда существует число $C > 0$, с которым для любых $x, y \in \mathbb{K}$ выполнено

$$(P(x,y))^2 \leq C\|x\| * \|y\|$$

Доказательство: Так как $P(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x^i * y^j$

$$|P(x,y)| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| * |x^i| * |y^j| \leq A \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x^i| * |y^j|$$

где $A = max\,|c_{ij}|$.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x^i| * |y^j| = \sum_{i=1}^{n} \left(|x^i| \sum_{j=1}^{n} |y^j| \right) = \sum_{i=1}^{n} |x^i| * \sum_{j=1}^{n} |y^j|$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского для сумм

$$\sum_{i=1}^{n} |x^i| = \sum_{i=1}^{n} 1 * |x^i| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} = \sqrt{n}\|x\|$$

Также доказывается неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} |y^j| \leq \sqrt{n}\|y\|$$

Соединяя полученные неравенства, находим, что $P(x,y) \leq nA\|x\| * \|y\|$.

Наконец, положим $C = nA$. ■

Лемма 2. Существует число $M > 0$, с которым для любых $x, y \in \mathbb{K}$ выполнено $\|x \odot y\| \leq M\|x\| * \|y\|$.

Доказательство:

$$x \odot y = (P_1(x,y), P_2(x,y), \dots, P_n(x,y))$$

где P_i - билинейные формы.

$$\|x \odot y\|^2 = P_1^2(x,y) + P_2^2(x,y) + \dots + P_n^2(x,y)$$

Согласно лемме 1, для каждого P_i найдется число $C_i > 0$, с которым $|P_i(x,y)| \leq C_i\|x\| * \|y\|$. Пусть C - максимальное из этих чисел, тогда

$$\|x \odot y\|^2 \leq nC^2\|x\|^2 * \|y\|^2$$

Положив $M = C\sqrt{n}$, получим $\|x \odot y\| \leq M\|x\| * \|y\|$. ■

Теорема 1. Если кольцо $\mathbb{K}$ коммутативно, то многочлен любой степени является лево-дифференцируемой функцией в кольце.

Доказательство. Проверим сначала, что функция $\varphi_m(x) = x^m$ лево-дифференцируема.

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = (x+h)^m - x^m = mx^{m-1} \odot h + \sum_{i=2}^{m} C_m^i x^{m-i} \odot h^i \qquad (9)$$

где C_m^i - биномиальный коэффициент.

Заметим, что здесь была применена формула, аналогичная формуле для числовой функции. Правомерность такого применения обусловлена коммутативностью умножения.

Убедимся, что при фиксированном x функция $\alpha(h) = \sum_{i=2}^{m} C_m^i x^{m-i} \odot h^i$ является бесконечно малой относительно h. Применим для оценок лемму 2:

$$\|h^i\| = \|h^{i-1} \odot h\| \leq M \|h^{i-1}||^{i-1}\| * \|h\| \leq M^2 \|h^{i-2}||^{i-1}\| * \|h\|^2 \leq \cdots M^n \|h\|^i = o(h)$$

Следовательно, $\alpha(h) = o(h)$ (как сумма бесконечно малых нужного порядка) и функция φ_m лево-дифференцируемая. ■

Так как многочлен является линейной комбинацией функций возведения в степень φ_m, которые лево-дифференцируемы, он также лево-дифференцируем.

Следствие. Если множество лево-дифференцируемых отображений содержит не все многочлены, то умножение $\odot$ не коммутативно.

4.2 Исследование дифференцируемости с помощью условия Коши-Римана

Понять насколько богато множество лево-дифференцируемых отображений для данного кольца $\mathbb{K}$ можно используя условия Коши-Римана.

Пусть G - область в $\mathbb{R}^n$ и $f = (f^1,\ f^2, \dots, f^n)$ - отображение области G в $\mathbb{R}^n$ класса C^1.

Условия Коши-Римана для отображения f, это система однородных линейных уравнений относительно частных производных первого порядка функций f^j, $j = 1,2, \dots, n$, то есть, система вида:

$$\begin{matrix} a_{11}^1 f_1^1 + a_{12}^1 f_2^1 + \cdots + a_{1n}^1 f_n^1 + \cdots + a_{11}^n f_1^n + a_{12}^n f_2^n + \cdots + a_{1n}^n f_n^n = 0 \\ a_{21}^1 f_1^1 + a_{22}^1 f_2^1 + \cdots + a_{2n}^1 f_n^1 + \cdots + a_{21}^n f_1^n + a_{22}^n f_2^n + \cdots + a_{2n}^n f_n^n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}^1 f_1^1 + a_{m2}^1 f_2^1 + \cdots + a_{mn}^1 f_n^1 + \cdots + a_{m1}^n f_1^n + a_{m2}^n f_2^n + \cdots + a_{mn}^n f_n^n = 0 \end{matrix} \qquad (S^{(1)})$$

В слагаемом $a_{ki}^j f_i^j$ индексы означают следующее: i - номер переменной x_i, по которой берется частная производная, j - номер координатной функции, k - номер уравнения. Полагаем, что матрица $A^{(1)} = \{a_{ki}^j\}$ имеет ранг m, иначе систему можно заменить эквивалентной с меньшим количеством строк. Условия Коши-Римана $S^{(1)}$ будем также именовать производной системой первого порядка.

4.3 Производные системы высших порядков

Пусть u - функция от n переменных. Обозначим $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Продифференцируем каждое из уравнений системы $S^{(1)}$ по всем переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$ и получим систему $S^{(2)}$. Предполагаем, что функции f^j принадлежат классу C^2, поэтому $f^j_{\alpha\beta} = f^j_{\beta\alpha}$. При записи будем следовать правилу $\alpha \le \beta$.

$$
\begin{aligned}
&a^1_{11}f^1_{11} + a^1_{12}f^1_{12} + \dots + a^1_{1n}f^1_{1n} + \dots + a^n_{11}f^n_{11} + a^n_{12}f^n_{12} + \dots + a^n_{1n}f^n_{1n} = 0\\
&a^1_{11}f^1_{12} + a^1_{12}f^1_{22} + \dots + a^1_{2n}f^1_{1n} + \dots + a^n_{11}f^n_{12} + a^n_{12}f^n_{22} + \dots + a^n_{2n}f^n_{1n} = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a^1_{11}f^1_{1n} + a^1_{12}f^1_{2n} + \dots + a^1_{1n}f^1_{nn} + \dots + a^n_{11}f^n_{1n} + a^n_{2n}f^n_{12} + \dots + a^n_{1n}f^n_{nn} = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a^1_{m1}f^1_{11} + a^1_{m2}f^1_{12} + \dots + a^1_{mn}f^1_{1n} + \dots + a^n_{m1}f^n_{11} + a^n_{m2}f^n_{12} + \dots + a^n_{mn}f^n_{1n} = 0\\
&a^1_{m1}f^1_{12} + a^1_{m2}f^1_{22} + \dots + a^1_{mn}f^1_{2n} + \dots + a^n_{m1}f^n_{12} + a^n_{m2}f^n_{22} + \dots + a^n_{mn}f^n_{2n} = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a^1_{m1}f^1_{1n} + a^1_{m2}f^1_{2n} + \dots + a^1_{mn}f^1_{nn} + \dots + a^n_{m1}f^n_{1n} + a^n_{m2}f^n_{2n} + \dots + a^n_{mn}f^n_{nn} = 0
\end{aligned}
\qquad (S^{(2)})
$$

Эту систему назовем производной системой второго порядка, матрицу системы $S^{(2)}$ обозначим как $A^{(2)}$.

Замечание. Система ($S^{(1)}$) однозначно определяет систему ($S^{(2)}$), также как система ($S^{(2)}$) однозначно определяет систему ($S^{(1)}$).

Подобным образом можно определить производные системы любого конечного порядка. Пусть $S^{(p)}$- производная система порядка p. Система $S^{(p+1)}$ такова, что каждое ее уравнение получается из некоторого уравнения системы $S^{(k)}$ дифференцированием по некоторому переменному x_i .

Пример 2. $n = 2$. Исходная система (производная система первого порядка)

$$2f^1_1 + 3f^1_2 + 4f^2_1 + 5f^2_2 = 0$$
$$5f^1_1 + 4f^1_2 + 3f^2_1 + 2f^2_2 = 0$$

Запишем ее с использованием традиционных обозначений производных:

$$2\frac{\partial f^1}{\partial x_1}+3\frac{\partial f^1}{\partial x_2}+4\frac{\partial f^2}{\partial x_1}+5\frac{\partial f^2}{\partial x_2}=0$$

$$5\frac{\partial f^1}{\partial x_1}+4\frac{\partial f^1}{\partial x_2}+3\frac{\partial f^2}{\partial x_1}+2\frac{\partial f^2}{\partial x_2}=0$$

Матрица системы:

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

Производная система второго порядка:

$$2\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_1x_1}+3\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_1x_2}+4\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_1x_1}+5\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_1x_2}=0$$

$$2\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_1x_2}+3\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_2x_2}+4\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_1x_2}+5\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_2x_2}=0$$

$$5\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_1x_1}+4\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_1x_2}+3\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_1x_1}+2\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_1x_2}=0$$

$$5\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_1x_2}+4\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_2x_2}+3\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_1x_2}+2\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_2x_2}=0$$

Матрица системы

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0 & 4 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 4 & 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

Производная система третьего порядка (в сокращенных обозначениях)

$$2f^1_{111}+3f^1_{112}+4f^2_{111}+5f^2_{112}=0 \qquad (c1)$$

$$2f^1_{112}+3f^1_{122}+4f^2_{112}+5f^2_{122}=0 \qquad (c2)$$

$$2f^1_{112}+3f^1_{122}+4f^2_{112}+5f^2_{122}=0 \qquad (c3)$$

$$2f^1_{122}+3f^1_{222}+4f^2_{122}+5f^2_{222}=0 \qquad (c4)$$

$$5f^1_{121}+4f^1_{122}+3f^2_{121}+2f^2_{122}=0 \qquad (c5)$$

$$5f^1_{112}+4f^1_{122}+3f^2_{112}+2f^2_{122}=0 \qquad (c6)$$

$$5f^1_{112}+4f^1_{122}+3f^2_{112}+2f^2_{122}=0 \qquad (c7)$$

$$5f^1_{112}+4f^1_{222}+3f^2_{122}+2f^2_{222}=0 \qquad (c8)$$

Уравнения $(c2)$ и $(c3)$, а также $(c6)$ и $(c7)$ одинаковые. Из каждой пары уберем по одному уравнению, получим систему из 6 уравнений:

$$2f_{111}^1 + 3f_{112}^1 + 4f_{111}^2 + 5f_{112}^2 = 0$$
$$2f_{112}^1 + 3f_{122}^1 + 4f_{112}^2 + 5f_{122}^2 = 0$$
$$2f_{122}^1 + 3f_{222}^1 + 4f_{122}^2 + 5f_{222}^2 = 0$$
$$5f_{121}^1 + 4f_{122}^1 + 3f_{121}^2 + 2f_{122}^2 = 0$$
$$5f_{112}^1 + 4f_{122}^1 + 3f_{112}^2 + 2f_{122}^2 = 0$$
$$5f_{112}^1 + 4f_{222}^1 + 3f_{122}^2 + 2f_{222}^2 = 0$$

Матрица системы

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ГЛАВА 5.

5.1 Полиномиальные решения системы Коши-Римана

Пусть G - область в $\mathbb{R}^n$ и $f = (f^1,\ f^2, \dots, f^n)$ - отображение, удовлетворяющее условиям Коши-Римана:

$$\left.\begin{array}{c}
a_{11}^1 f_1^1 + a_{12}^1 f_2^1 + \cdots + a_{1n}^1 f_n^1 + \cdots + a_{11}^n f_1^n + a_{12}^n f_2^n + \cdots + a_{1n}^n f_n^n = 0 \\
a_{21}^1 f_1^1 + a_{22}^1 f_2^1 + \cdots + a_{2n}^1 f_n^1 + \cdots + a_{21}^n f_1^n + a_{22}^n f_2^n + \cdots + a_{2n}^n f_n^n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}^1 f_1^1 + a_{m2}^1 f_2^1 + \cdots + a_{mn}^1 f_n^1 + \cdots + a_{m1}^n f_1^n + a_{m2}^n f_2^n + \cdots + a_{mn}^n f_n^n = 0
\end{array}\right. \qquad (S^{(1)})$$

Систему $S^{(1)}$ будем рассматривать как алгебраическую относительно переменных f_i^j, $A^{(1)}$ - матрица системы $S^{(1)}$.

Число уравнений в этой системе не превосходит n^2 и строки матрицы $A^{(1)}$ линейно независимы.

Теорема 2. Постоянные отображения являются решениями любой системы $S^{(1)}$.

Если матрица $A^{(1)}$ квадратная (строки ее линейно независимы), то только постоянные отображения являются решениями системы $S^{(1)}$.

Доказательство: Пусть $f: G \to \mathbb{R}^n$ - постоянное отображение. Тогда все частные производные первого порядка всех его координатных функций f^j равны нулю. При подстановке нулей в систему уравнений $S^{(1)}$ получаем систему тождеств. То есть любое постоянное отображение есть решение системы.

Пусть матрица $A^{(1)}$ квадратная. Тогда линейная алгебраическая система $S^{(1)}$ имеет единственное решение $f_i^j = 0$ для любых i и j. То есть, все частные производные первого порядка координатных функций f^j равны нулю, следовательно, эти функции постоянны. ■

Теорема 3. Если число строк матрицы $A^{(1)}$ меньше числа столбцов, то система $S^{(1)}$ имеет ненулевое решение, состоящее из линейных функций.

Доказательство: Пусть m - число строк матрицы $A^{(1)}$. Так как система строк линейно независима, найдется не равный нулю минор, составленный из некоторого набора из m столбцов. В системе $S^{(1)}$ оставим слагаемые, соответствующим выбранным столбцам на месте, а оставшиеся слагаемые перенесем в правую часть уравнений, изменив знак. Те f_i^j, которые оказались справа, заменим произвольными числами, отличными от нуля. Тогда получится невырожденная система из m линейных уравнений относительно переменных f_i^j, которые остались в левой части уравнений. Такая система имеет единственное решение. В результате получится, что каждой переменной f_i^j приписано некоторое число q_i^j. ■

Рассмотрим уравнения, соответствующее первой координатной функции:

$$f_1^1 = q_1^1, f_2^1 = q_2^1, \dots , f_n^1 = q_n^1$$

Функция

$$f^1(x) = q_1^1 x_1 + q_2^1 x_2 + \dots + q_n^1 x_n + r_1$$

где r_1 - произвольное число.

Подобным образом можно найти оставшиеся линейные функции $f^j(x)$.

Ясно, что набор функций $f^1,\ f^2, \dots, f^n$ является решением системы $S^{(1)}$.

Определение 9. Отображение $f: G \to \mathbb{R}^n$ называется полиномиальным степени m, если его координатные функции являются многочленами переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ степени не выше m.

Теорема 4. Пусть матрица $A^{(p)}$ производной системы $S^{(p)}$ такова, что система ее столбцов линейно независима. Тогда решениями системы Коши-Римана $S^{(1)}$ являются полиномиальные отображения степени не выше $p-1$.

Доказательство: Пусть $f = (f^1,\ f^2, \dots, f^n)$ - решение системы $S^{(1)}$. Тогда система $S^{(p)}$, у которых переменными являются частные производные порядка p функций f^j превращается в систему тождеств.

Пусть матрица $A^{(p)}$ имеет q столбцов. Так как система столбцов линейно независима, количество строк в матрице не меньше количества столбцов и существует ненулевой минор M размерами $q \times q$. Рассмотрим подсистему S^* системы $S^{(p)}$, образованную тождествами, соответствующими строкам указанного минора

$$B * F = 0,$$

здесь B - матрица системы S^*, F - столбец составленный из частных производных порядка p функций f^j. Так как матрица B невырожденная, $F = B^{-1} * 0 = 0$, то есть, все частные производные порядка p равны нулю, а это значит, что все функции f^j являются многочленами степени не выше $p - 1$.

Замечание. То, что матрица $A^{(p)}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, не означает, что множество решений системы Коши-Римана $S^{(1)}$ содержит полиномиальные отображения степени $p - 1$. Такое возможно, когда система столбцов матрицы $A^{(p-1)}$ также линейно независима. В этом случае решения системы $S^{(1)}$. являются полиномиальными отображениями степени не выше $p - 2$.

Необходимым условием линейной независимости столбцов матрицы является то, что количество столбцов не превосходит количества строк матрицы.

5.2 Формулы количества строк и столбцов

Через $S(p,n)$ обозначим количество разных частных производных порядка p у функции класса C^p от n переменных. Так как частная производная не зависит от порядка дифференцирования, число $S(p,n)$ равно количеству наборов по p предметов из предметов n сортов, или, другими словами, числу сочетаний с повторениями [Виленкин, с. 49]

$$S(p,n)=\frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

Производная система порядка p для n функций, удовлетворяющих условию Коши-Римана, содержит

$$V(n,p)=nS(p,n)=n\frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

переменных.

Пусть система Коши-Римана (производная система первого порядка) состоит из m уравнений. Так как уравнения системы S^p (производной системы порядка p) являются частными производными порядка $(p-1)$ уравнений системы Коши-Римана, а таких производных ровно $S(p-1,n)$, число уравнений в системе S^p равно

$$E(n,p,m)=mS(p-1,n)=m\frac{(p+n-2)!}{(p-1)!\,(n-1)!}$$

Итак, имеем

Теорема 5. Пусть отображение $f\colon G\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Коши-Римана и матрица $A^{(1)}$ имеет $m\le n^2$ линейно независимых строк.

Тогда количество столбцов матрицы $A^{(p)}$ равно

$$V(n,p)=nS(p,n)=n\frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

а количество строк матрицы $A^{(p)}$ равно

$$E(n,p,m)=mS(p-1,n)=m\frac{(p+n-2)!}{(p-1)!\,(n-1)!}$$

Пусть столбцов матрицы $A^{(p)}$ не больше, чем строк, то есть,

$$n\frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!} \leq m\frac{(p+n-2)!}{(p-1)!\,(n-1)!}$$

Следовательно

$$\frac{n}{m} \leq \frac{p}{p+n-1} \qquad (n1)$$

Если же число столбцов матрицы $A^{(p-1)}$ не меньше, чем строк, то $V(n,p-1) \geq E(n,p-1,m)$, то есть,

$$n\frac{(p+n-2)!}{(p-1)!\,(n-1)!} \geq m\frac{(p+n-3)!}{(p-2)!\,(n-1)!}$$

после сокращений получим

$$\frac{n}{m} \geq \frac{p-1}{p+n-2} \qquad (n2)$$

Итак, если столбцов матрицы $A^{(p-1)}$ не меньше, чем строк, а столбцов матрицы $A^{(p)}$ не больше, чем строк, то

$$\frac{p-1}{p+n-2} \leq \frac{n}{m} \leq \frac{p}{p+n-1} \qquad (n3)$$

Теорема 6. Если числа n, m и p удовлетворяют условию $(n3)$, то решения системы Коши-Римана S^1 полиномиальные отображения степени не выше $p-1$.

Доказательство: Истинность этого теоремы следует из теоремы 4. ■

Пример 3. Отображение $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям Коши-Римана

$$f_1^1 + f_3^2 - f_1^3 + f_2^3 - f_3^3 = 0$$
$$f_2^1 + f_3^2 + 2f_1^3 + f_2^3 + 3f_3^3 = 0$$
$$f_3^1 - f_3^2 + f_1^3 + 3f_2^3 + 2f_3^3 = 0$$
$$f_1^2 + 2f_3^2 - f_1^3 + 3f_2^3 + f_3^3 = 0$$
$$f_2^2 + 3f_3^2 + 5f_1^3 - f_2^3 + f_3^3 = 0$$

Матрица

$$A^{(1)} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$n = 3, m = 5$.

Пусть $p = 2$.

Количество столбцов матрицы $A^{(2)}$ равно

$$V(3,2) = 3\frac{4!}{2!\,2!} = 18$$

количество строк матрицы $A^{(2)}$ равно

$$E(3,2,5) = 5\frac{3!}{1!\,2!} = 15$$

Столбцов больше, чем строк, поэтому среди решений системы S^1 не только линейные функции.

Пусть $p = 3$. Количество столбцов матрицы $A^{(3)}$ равно

$$V(3,3) = 3\frac{5!}{2!\,2!} = 30$$

а количество строк матрицы $A^{(3)}$ равно

$$E(3,3,5) = 5\frac{4!}{2!\,2!} = 30$$

Проверкой можно убедиться, что столбцы матрицы $A^{(3)}$ линейно независимы.

Следовательно, решения системы $S^{(3)}$ - полиномиальные отображения степени не более 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В Диссертации рассмотрены основные определения, необходимые для решения рассматриваемых задач. Показано, как правило умножения порождает условия Коши-Римана, и как из условий Коши-Римана восстанавливается правило умножения. Доказано, что если кольцо коммутативно, то множество дифференцируемых отображения достаточно богато. Для некоммутативных колец показана ситуация, когда класс дифференцируемых отображений не содержит многочленов, степень которых выше некоторого числа. Получен алгоритм вычисления такого числа.

Таким образом, цель данной работы была достигнута, поставленные задачи выполнены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский; Под ред. В. А. Садовничего. — 6-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. — (Высшее образование: Современный учебник). Т.3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — 512 с.
2. А.Б.Гордиенко, А.В.Копытов «Основы комплексного анализа и операционного исчисления»: Электронное учебно-методическое пособие. Зарегистр. ФГУП НТЦ "ИНФОРМРЕГИСТР" 09.07.2008, №032080149
3. А.Н. Дёгтев. АЛГЕБРА и ЛОГИКА: Учебной пособие. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. 88 с.
4. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. - М. : Наука, 1973. - 144 с.
5. Sudbery A. Quaternionic analysis. // Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society, V. 85, Issue 02, March 1979, Pp. 199 - 225.
6. Латфуллин Т.Г. Когда однородная система УЧП первого порядка имеет линейное решение. Сборник научных статей Международной школы-семинара ”Ломоносовские чтения на Алтае” Барнаул, 20-23 ноября, 2012, с. 314 - 318
7. Латфуллин Т.Г. Полиномиальные решения систем типа Коши-Римана. Тезисы доклада на Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева 18-24 августа
8. 2013 г. Новосибирск, Россия, с. 180.
9. Ошоров Б.Б. Об одном четырехмерном аналоге системы уравнений Коши–Римана/ Неклассические уравнения математической физики 2007. С. 212-220.