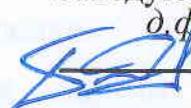


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., доцент

 Татосов А.В.

2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ХИЩНИК-ЖЕРТВА
С ТРОФИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ХОЛЛИНГА 2-ГО ТИПА

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнила работу
Студентка 2 курса
Очной формы обучения



Бондаренко
Екатерина
Андреевна

Руководитель работы
ст. преподаватель



Казанцева
Татьяна
Евгеньевна

Руководитель работы
к.п.н., доцент



Мачулис
Владислав
Владимирович

Рецензент
д-р физ.-мат. наук, профессор



Кутрунов
Владимир
Николаевич

Тюмень, 2018

Оглавление	
Введение.....	3
Глава 1. Элементы теории динамических систем.....	5
1.1. Динамические системы.....	5
1.1. Фазовое пространство.....	5
1.2. Линеаризованная система.....	8
1.3. Устойчивость положения равновесия.....	8
1.4. Исследование двумерным систем.....	9
1.5. Бифуркация положений равновесия.....	13
1.5.1. Кривая равновесия.....	13
1.5.2. Центральное многообразие.....	15
1.6. Критические состояния равновесия.....	16
1.6.1. Первый критический случай.....	16
1.6.2. Второй критический случай.....	19
1.7. Бифуркация Андронова-Хопфа.....	21
Глава 2. Исследование динамических систем.....	25
2.1. Постановка задачи.....	25
2.2. Система «Хищник – жертва».....	25
2.2.1. Описание системы.....	25
2.2.2. Исследование системы.....	26
2.2.3. Исследование критических случаев.....	31
2.2.4. Интерпретация полученных результатов.....	36
Заключение.....	40
Список литературы.....	41

Введение

Метод математического моделирования широко используется при изучении динамики популяций различных индивидуумов в задачах экологии, иммунологии, гематологии, эпидемиологии, демографии и медицины.

Ни одно из исследований, в том числе и в биологии, не может быть построено без математической модели рассматриваемого объекта или процесса. Развитие информации и компьютерной техники позволяет широко применять методы математического моделирования благодаря возможности для реализации сложнейших алгоритмов обработки результатов исследований.

По мере развития науки большинство областей используют системы дифференциальных уравнений для математического описания явлений. Однако цель определения состояния системы предполагает решение соответствующих систем дифференциальных уравнений, но такая цель достижима для очень малого количества систем. Кроме того, нахождение решения не является главной целью в нелинейной динамике систем, которая более заинтересована в «качественных» свойствах системы. Поэтому можно получить информацию о характере и свойствах системы не решая ее, а из самих уравнений, что и предполагается «качественным» исследованием.

В биологии, геологии и других "описательных" науках математика стала по-настоящему использоваться только во второй половине прошлого века. Одним из ключевых в биологии является понятие "Популяция". Первые попытки математически описать биологические процессы относятся именно к моделям популяционной динамики. Эта область науки и сегодня служит математическим полигоном, на котором "отрабатываются" модели в рамках разных биологических дисциплин, в том числе в экологии, в микробиологии, иммунологии, для эволюционных процессов и т.д.

Целью работы данной является проведение качественного исследования следующей динамической системы.

Модель динамики системы хищник - жертва с логистическим воспроизводством жертв и трофической функцией Холлинга 2-го типа:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{1+ahx} \\ \frac{dy}{dt} = b\frac{axy}{1+ahx} - my \end{cases}$$

К задачам относится:

- Изучение принципов исследования динамических систем
- Построение аналитических расчетов для систем, используя методы качественной теории (найти все особые траектории, определить их тип и устойчивость при различных значениях параметров, описать все возможные бифуркации)
 - Построение качественно различных фазовых портретов исследуемых положений равновесия
 - Интерпретирование полученных результатов с точки зрения физического смысла системы.

Глава 1. Элементы теории динамических систем.

1.1. Динамические системы.

Исследование любого динамического процесса обычно начинается с построения математической модели, соответствующей данному процессу. Благодаря модели и исходным значениям можно проследить за изменением состояния при течении времени.

Динамической системой называют систему автономных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(x), \quad (1.1)$$

Где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $X(x) = (X_1, \dots, X_n)$. $X_1, \dots, X_n - C^r$ – гладкие ($r \geq 1$) функции, в некоторой области $D \subseteq R^n$. В теории динамических систем рассматривают как время, которое может быть непрерывное $t \in R^1$, или дискретное $t \in Z$, D – как фазовое пространство, совпадающее с евклидовым пространством R^n ограниченное или неограниченное. И закон эволюции, то есть отображение любой заданной точки фазового пространства D и любого значения t на однозначное состояние $\varphi(t, x) \in D$. [3]

Для закона эволюции справедливы следующие определения:

1. $\varphi(0, x) = x$.
2. $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$.
3. $\varphi(t, x)$ непрерывно по (t, x) .

1.1. Фазовое пространство.

Пространство координат называется фазовым пространством. Изменению состояния системы во времени отвечает движение точки в фазовом пространстве вдоль некоторой линии, называемой фазовой траекторией.

Первый и простейший тип траектории в фазовом пространстве определяется условием $\frac{dx}{dt} = 0$. Эта траектория является вырожденной, т.е. она представляет собой точку, которая именуется неподвижной. Неподвижная

точка является особой точкой, т.к. в ней не определена касательная к траектории. Все иные точки фазового пространства, где $X^2(x) \neq 0$ называются регулярными точками.

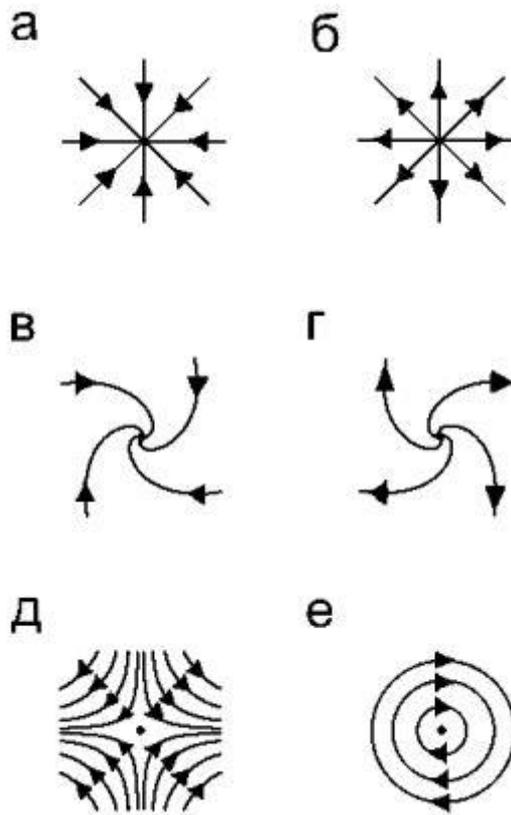


Рис.1 – Поведение фазовых траекторий вблизи особых точек.

На Рис.1 на примере двумерного фазового пространства показаны варианты поведения фазовых траекторий вблизи особых точек. В зависимости от того, как ведут себя траектории, особые точки подразделяются на (а)устойчивые и (б) неустойчивые узлы, (в) устойчивые и (г) неустойчивые фокусы, (д) седловые точки (устойчивые по одному и неустойчивые по другому направлению) и (е) центры (траектории представляют собой замкнутые линии). Совокупность фазовых траекторий образует фазовый портрет динамической системы. [1]

Траектория $x(t)$ системы (1.1), называется положением равновесия, если она не зависит от времени, то есть $x(t) \equiv const$. Координаты положения равновесия можно найти из системы:

$$X(x_0) = 0 \quad (1.2)$$

Если матрица Якоби $\frac{\partial X}{\partial x}$ не вырождена в точке x_0 , то положение равновесия является изолированным. Таким образом, в ограниченной подобласти фазового пространства R^n система (1.1) имеет конечное число положений равновесия.

Траекторию L , соответствующую периодическому решению динамической системы называют периодической.

Любая траектория, которая не является ни положением равновесия, ни периодической траекторией есть незамкнутая траектория. Незамкнутые траектории не имеют точек самопересечения. Заметим, что любая точка незамкнутой траектории делит ее на положительную и отрицательную полутраектории. [2]

Используя общую классификацию, можно перечислить все типы положительных полутраекторий на плоскости для двумерных систем:

- Положения равновесия;
- Периодические траектории;
- Полутраектории, стремящиеся к положению равновесия;
- Полутраектории, стремящиеся к периодической траектории;
- Полутраектории, стремящиеся к предельному множеству типа цикла.

Циклы, образованные положениями равновесия и траекториями, стремящимся к этим положениям равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$.

Любые два решения, отличие которых заключается лишь в выборе начального момента времени t_0 , соответствует одной и той же траектории. Что справедливо и наоборот, два различных решения для одной и той же траектории, являются одинаковыми с точностью до сдвига по времени $t \rightarrow t + C$.

Для любых траекторий, отличных от положения равновесия, можно задать направление движения, совпадающее с направлением возрастания t . Направление определяется с помощью касательного вектора.

1.2. Линеаризованная система.

При исследовании многомерных систем число положений равновесия может быть весьма большим. Поэтому изучение таких систем вблизи положения равновесия можно производить, используя стандартный метод линеаризации.

Для исследования системы (1.2) пусть точка $O(x = x_0)$ – положение равновесия. После подстановки $x = x_0 + y$ уначало координат смещается в точку O . В новых переменных систему можно представить:

$$\dot{y} = X(x_0 + y) \quad (1.3)$$

раскладывая в ряд Тейлора вблизи точки $x = x_0$:

$$\dot{y} = X(x_0) + \frac{\partial X(x_0)}{\partial x} y + o(y). \quad (1.4)$$

Так как $X(x_0) = 0$, то система (1.4) принимает вид:

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad (1.5)$$

где

$$A = \frac{\partial X(x_0)}{\partial x}$$

A есть $n \times n$ -матрица с постоянными коэффициентами, $g(y)$ удовлетворяет условию:

$$g(0) = \frac{\partial g(0)}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

Поведение траекторий системы (1.5) в малой окрестности начала координат зависит от линеаризованной системы $\dot{y} = Ay$.

1.3. Устойчивость положения равновесия.

Устойчивость положения равновесия определяется собственными значениями $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ матрица Якоби A , которые являются корнями характеристического уравнения

$$\det|A - \lambda I| = 0 \quad (1.7)$$

где I – единичная матрица.

Положение равновесия устойчиво, если все действительные части характеристических показателей $(Re\lambda_1, \dots, Re\lambda_n) < 0$.

Если действительная часть хотя бы одного собственного числа положительна, то соответствующее положение равновесия является неустойчивым.

1.4. Исследование двумерным систем.

Рассмотрим поведение двумерной системы. При $n = 2$ общий вид системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1.8)$$

Характеристическое уравнение системы (1.8) имеет вид:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

и корни выражаются как:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

В общем случае, когда матрица A является невырожденной, существуют различные типы точек равновесия:

Точка равновесия	Собственные значения λ_1, λ_2
Узел (Рис. 2)	Устойчивый, если корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ Неустойчивый, если корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$
Дикритический узел (Рис. 3)	Устойчивый, если корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ Неустойчивый, если корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$
Вырожденный узел (Рис.4)	В случае характеристических корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Но система имеет лишь один собственный вектор. Устойчивый, если корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ Неустойчивый, если корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

Седло (Рис. 5)	λ_1 и λ_2 являются действительными числами, но имеют противоположный знак $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.
Фокус (Рис. 6)	<p>λ_1 и λ_2 – пара комплексно-сопряженных корней: $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, где $a \neq 0$. Любая траектория данного вида положения равновесия имеет вид спирали.</p> <p>Устойчивый, если $a < 0$.</p> <p>Неустойчивый, если $a > 0$.</p> <p>Направление закручивания спиралей можно определить по коэффициенту a_{21}.</p> <p>$a_{21} > 0$ – соответствует закручиванию против часовой стрелки. $a_{21} < 0$ закручиванию по часовой стрелке.</p> <p>Таким образом, существуют 4 различных вида фокусов.</p>

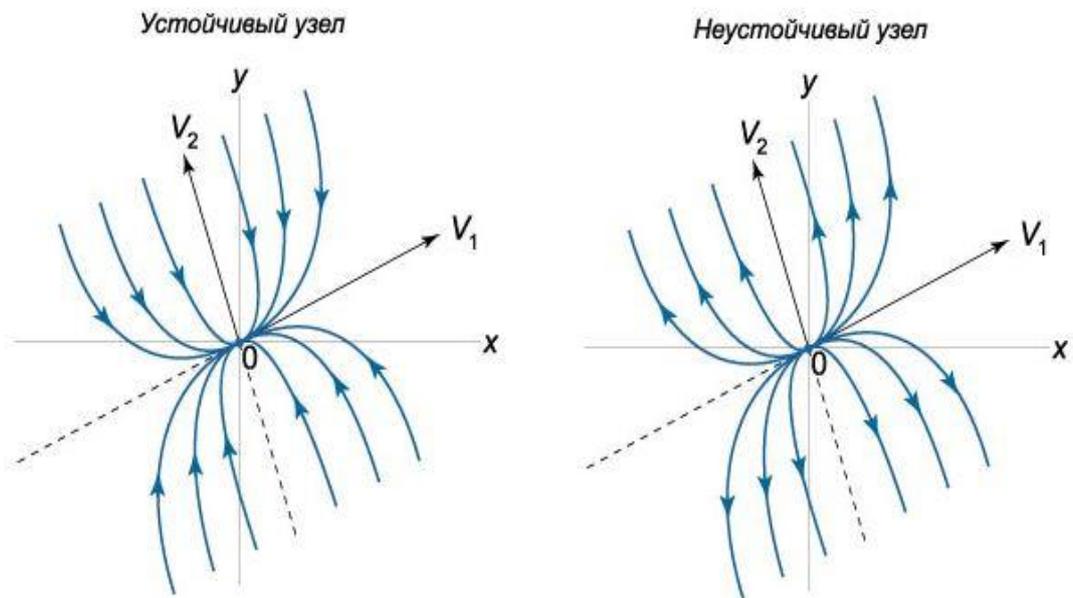
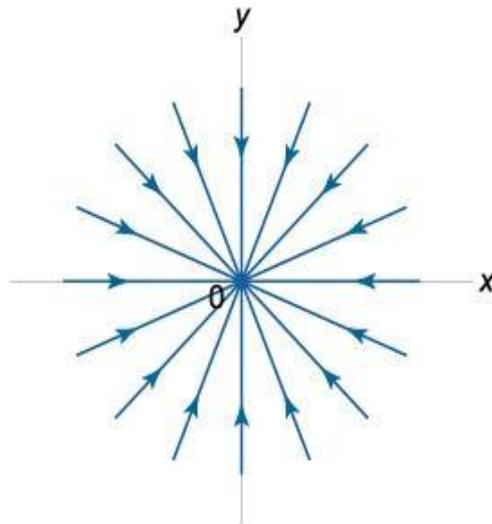


Рис.2 – Узел

Устойчивый дикритический узел



Неустойчивый дикритический узел

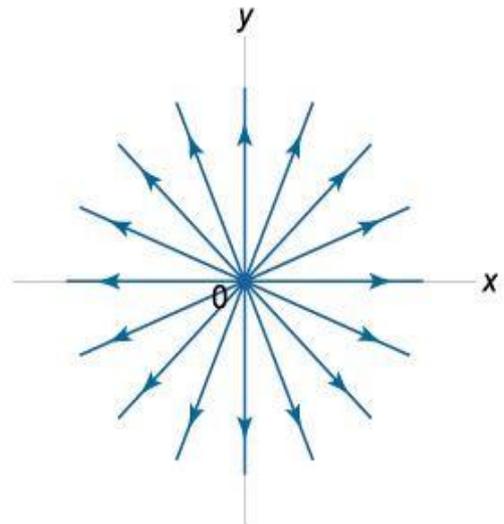
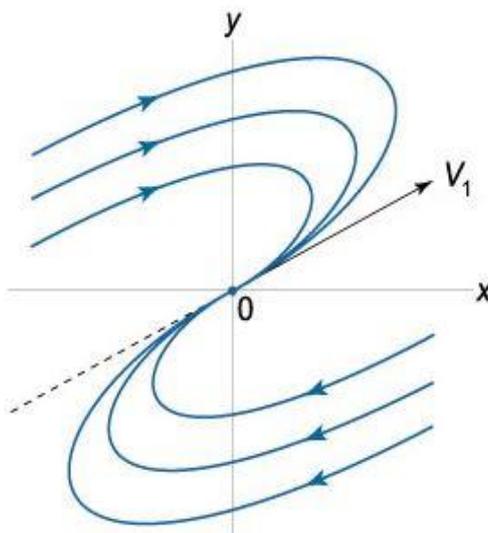


Рис.3 – Дикритический узел.

Устойчивый вырожденный узел



Неустойчивый вырожденный узел

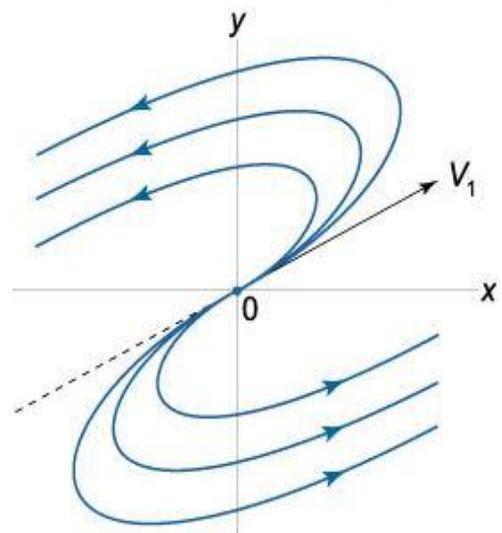


Рис.4. – Вырожденный узел.

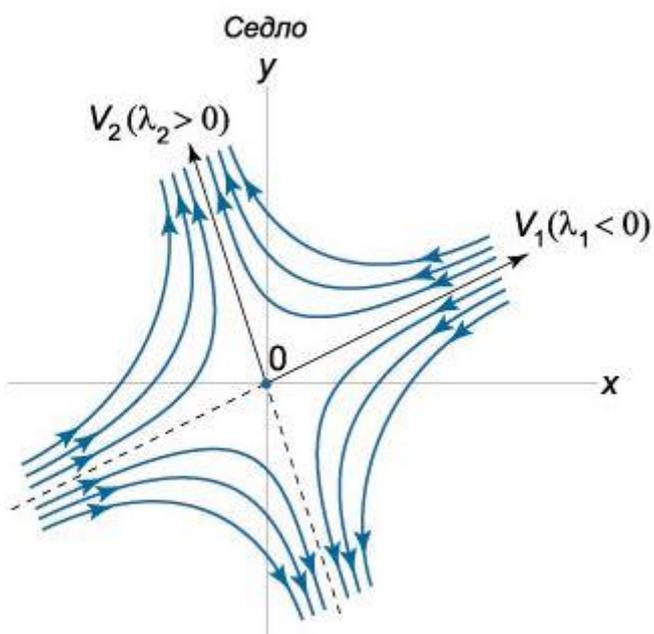


Рис.5. – Седло.

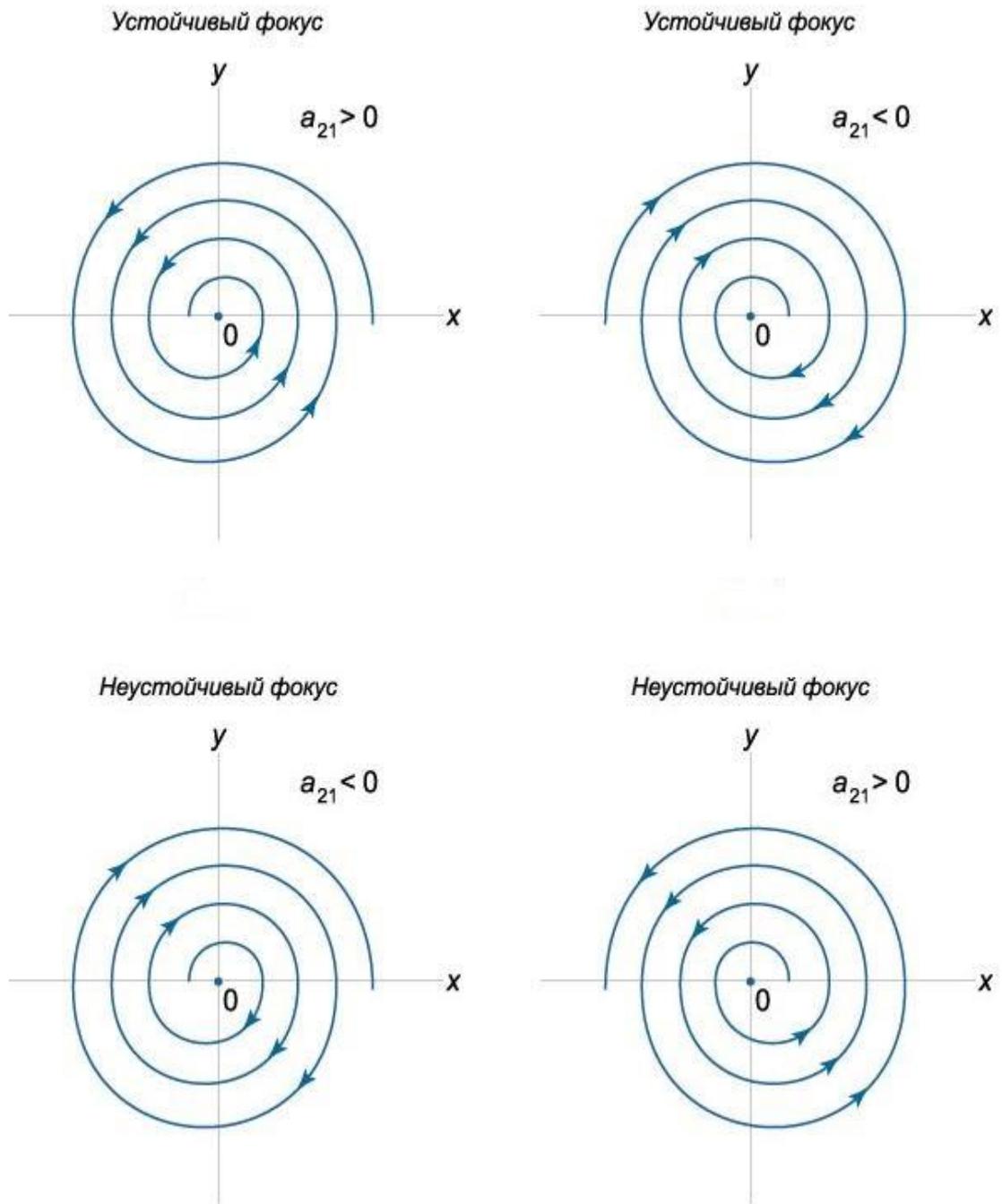


Рис. 6. – Фокус.

1.5. Бифуркация положений равновесия.

1.5.1. Кривая равновесия.

Реальные динамические системы зависят от большого количества параметров различного рода. При изменении параметра может меняться как количество положений равновесия, так и устойчивость этих положений. Некоторые внешние параметры можно рассматривать как медленно

меняющиеся во времени функции. Как правило, такие параметры не меняют качественно состояние системы, а лишь смещают положения равновесия без влияния на устойчивость.

Однако существуют и значения параметров, в окрестности которых динамика системы неодинакова. Такие значения называют бифуркационными.

Для отображения возможных бифуркаций используются кривые равновесий.

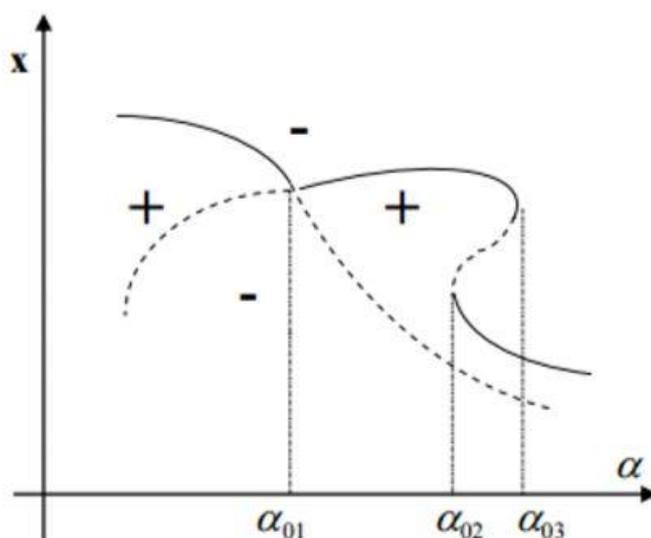


Рис.7 – Кривая равновесия.

На Рис. 7 представлена кривая равновесия для некоторой систем с одной переменной состояния и некоторым параметром a . Ветви положений равновесия разбивают график на несколько областей, в которых функции системы сохраняют знак. Используя данный график можно описать некоторые простейшие виды бифуркаций.

В точке a_{01} мы имеем бифуркацию типа «смена устойчивости» при $a < a_{01}$, точки на одной ветви устойчивы, а на другой – неустойчивы, при $a > a_{01}$, характер меняется на противоположный. В точках a_{02} и a_{03} происходит бифуркация типа «складка» или «седло-узел». При $a > a_{02}$ в окрестности имеется два положения равновесия: устойчивое и не устойчивое. Для значений $a < a_{02}$ вблизи на кривой нет точек. Что верно и для точки a_{03} .

1.5.2. Центральное многообразие.

Для изучения бифуркаций в малой окрестности U положения равновесия стандартным инструментом является теорема о центральном многообразии. В ней говорится что, существует окрестность положения равновесия, которая при всех достаточно малых значениях параметра μ содержит инвариантное центральное многообразие W^c , которое задается уравнением:

$$y = \psi(x, \mu) \quad (1.9)$$

Все траектории, не выходящие за пределы окрестности U во все моменты времени, принадлежат центральному многообразию. Размерность центрального многообразия для положений равновесия равна числу показателей с нулевой действительной частью, следовательно, задачу об исследовании бифуркаций положения равновесия можно свести к задаче о соответствующей подсистеме на центральном многообразии, тем самым существенно уменьшая размерность задачи. [1]

Рассмотрим динамические системы вида:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y, \mu) \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y, \mu) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $x \in R^m, y \in R^{n-m}, \text{spectr}A = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}, \text{Re} \lambda_j < 0 (j = m + 1, \dots, n), \text{spectr}B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \text{Re} \lambda_i = 0 (i = 1, \dots, m), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_{1p})$ – семейство параметров, f и g – C^r – гладкие функции, которые вместе их первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Существование центрального многообразия позволяет свести решение задач такого типа к исследованию m -мерной системы:

$$\dot{x} = Bx + g(x, \psi(x, \mu), \mu)$$

Инвариантность многообразия $y = \psi(x, \mu)$ означает что:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} (Bx + g(x, \psi(x, \mu), \mu)) = A\psi(x, \mu) + f(x, \psi(x), \mu)$$

Путем разложения функций, входящих в уравнение, в формальный ряд по степеням x из данного уравнения можно последовательно найти все

коэффициенты ряда Тейлора функции ψ . Таким образом, можно вычислить разложение в ряд Тейлора правой части приведенной системы.

1.6. Критические состояния равновесия.

Наиболее распространенными в исследовании положений равновесия являются два случая, в которых характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

1. Имеет один нулевой корень на мнимой оси.
2. Имеет два комплексно-сопряженных корня на мнимой оси.

Основными средствами для изучения критических случаев является приведение к центральному многообразию и ляпуновские величины, которые позволяют определить устойчивость критического положения равновесия.

Систему дифференциальных уравнений вблизи критического состояния равновесия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y) \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y) \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $x \in R^m, y \in R^{n-m}, \text{spectr}A = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$,

$\text{Re} \lambda_j < 0 (j = m + 1, \dots, n), \text{spectr}B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \text{Re} \lambda_i = 0 (i = 1, \dots, m), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_{1p})$ – семейство параметров, f и $g - C^r$ – гладкие функции, которые вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

1.6.1. Первый критический случай

Пусть есть только один характеристический показатель на мнимой оси, т.е. когда $m = 1$ и $\lambda_1 = 0$ в (1.11), используя теорему о редукции, система в стандартном виде задается как:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (A + F(x, y))y \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y) \end{aligned} \quad (1.11)$$

где x — скаляр, и функция $g(x)$ обращается в нуль в начале координат вместе с первой производной. В данном случае центральное многообразие W^c одномерно и задается уравнением $y = 0$. Система (1.12) на W^c имеет вид:

$$\dot{x} = g(x) \quad (1.13)$$

Так как $g(0) = \dot{g}(0) = 0$, то $g(x) = l_2x^2 + l_3x^3 + \dots$ где коэффициенты l_2, \dots, l_k разложения функции $g(x)$ в ряд Тейлора называются ляпуновскими величинами. Если номер первой ненулевой ляпуновской величины принять за k , тогда уравнение (1.13) можно записать в виде:

$$\dot{x} = l_k x^k (1 + o(1)) \quad (1.14)$$

Для динамики системы возможны 3 случая в зависимости от первой ненулевой ляпуновской величины:

1. Если первая отличная от нуля ляпуновская величина имеет четный порядковый номер, такое состояние равновесия называется «седло-узел». Если $l_2 \neq 0$, то его называют простым «седло-узлом». Вид «седло-узла» представлен на Рис.8.

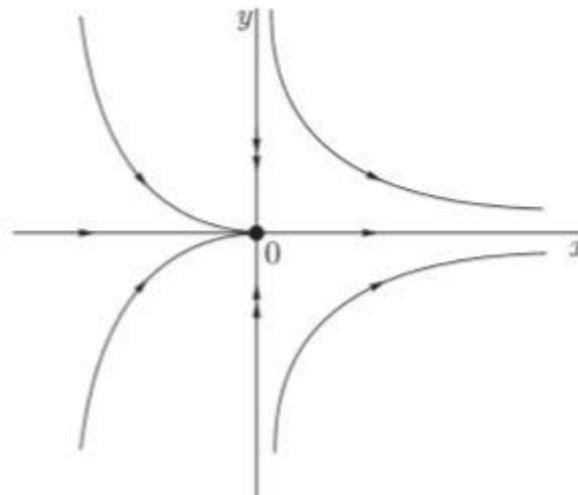


Рис. 8 – «Седло-узел»

2. Если первая отличная от нуля ляпуновская величина отрицательна и имеет нечетный порядковый номер, т. е. $\lambda_{2p+1} < 0$, то состояние равновесия устойчиво. Все траектории стремятся к O при $t \rightarrow +\infty$.

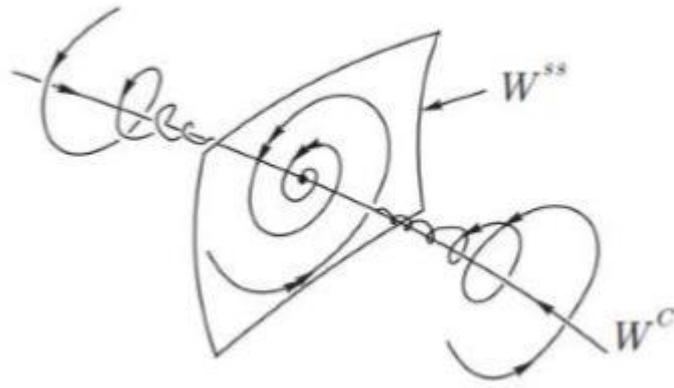


Рис. 9 – Устойчивое состояние равновесия.

3. Если у первой отличной от нуля ляпуновской величины порядковый номер нечетный и она положительна, т. е. $\lambda_{2p+1} > 0$, то состояние равновесия O имеет топологический тип седла $(n - 1, 1)$. При этом неустойчивое многообразие совпадает с центральным многообразием W^c , как проиллюстрировано на Рис. 11.

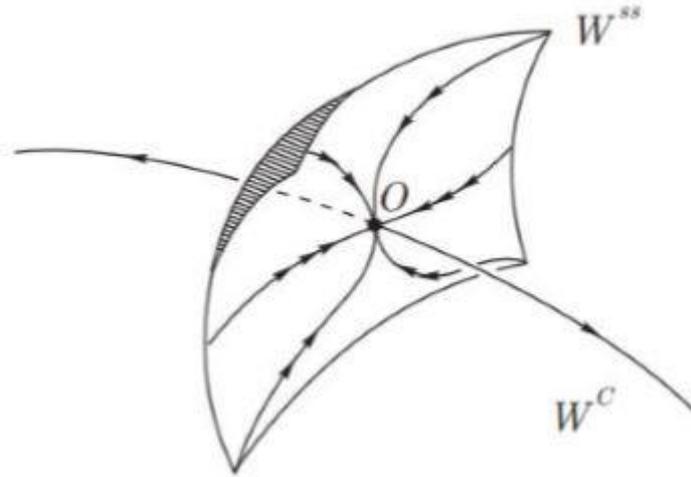


Рис. 10 – Неустойчивое многообразие.

Если все ляпуновские величины обращаются в нуль, то $g(x, \phi(x)) \equiv 0$. Отсюда, поскольку $y = \phi(x)$ является решением системы $Ay + f(x, y) = 0$, то кривая $y = \phi(x)$ заполнена положениями равновесия. Таким образом, она является инвариантным многообразием. Таким образом, система имеет аналитическое центральное многообразие $W^c: y = \phi(x)$, которое состоит из состояний равновесия, как проиллюстрировано на Рис.11. Если собственное

значение λ_2 отрицательно, то положение равновесия устойчиво, и не устойчиво в противном случае.

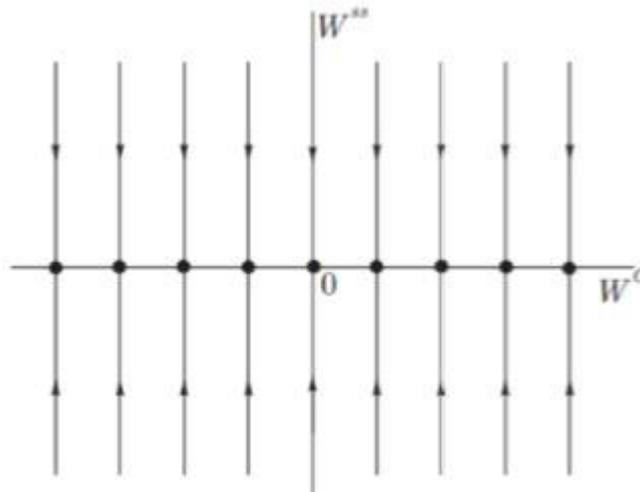


Рис. 11 – Положения равновесия.

Состояние равновесия, фазовый портрет которого не определяется через коэффициенты ряда Тейлора называется полностью вырожденным или бесконечно вырожденным в случае C^∞ -гладких систем.

1.6.2. Второй критический случай

Пусть состояние равновесия в начале координат имеет два чисто мнимых характеристических значения: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. В данном случае редукция системы на центральное многообразии W^c имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2 + g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + g_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где функции $g_{1,2}$ обращаются в нуль в начале координат вместе со своими первыми производными.

Выражение для первой ляпуновской величины через коэффициенты системы (1.18) впервые было получено Баутиным [7]. Если мы запишем систему как

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots, \\ \dot{y} &= cx + dy + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots, \end{aligned}$$

где $ad - bc > 0$, $a + d = 0$ и

$$\begin{aligned}
P_2(x, y) &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\
Q_2(x, y) &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \\
P_3(x, y) &= a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\
Q_3(x, y) &= b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3,
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
L_1 = -\frac{\pi}{4b\omega^3} \{ & [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20})] \\
& + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\
& - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] - (a^2 \\
& + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - b_{21}b)] \}, \\
& \text{где } \omega^2 = ad - bc. \tag{1.20}
\end{aligned}$$

Если $L_1 < 0$, то траектории по спирали стремятся к O при $t \rightarrow +\infty$, как показано на Рис. 12. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым сложным или слабым фокусом.

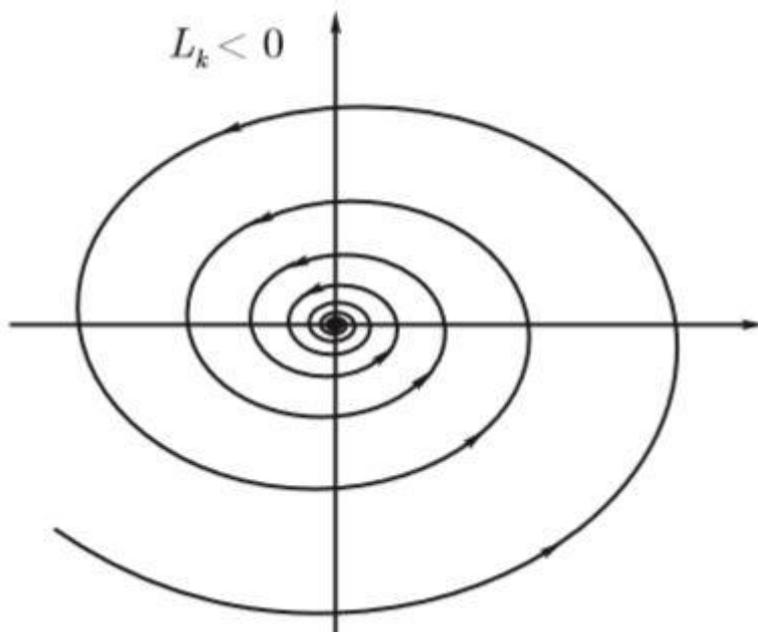


Рис.12. – Устойчивый ($L_1 < 0$) слабый фокус в \mathbb{R}^2 . Когда $L_1 > 0$, траектория покидает окрестность начала координат вдоль спирали, направленной против часовой стрелки.

Если $L_1 > 0$ начало координат является неустойчивым состоянием равновесия, так как траектории, начинающиеся вблизи него, по спирали

удаляются от него, по мере увеличения времени. Для двумерной системы (1.18) точка O называется неустойчивым сложным (слабым) фокусом.

1.7. Бифуркация Андронова-Хопфа.

Данный вид бифуркации происходит при пересечении границы устойчивости критического положения равновесия второго типа. Пара комплексно-сопряженных характеристических показателей состояния равновесия переходит через мнимую ось. При этом потеря устойчивости связана с появлением или, наоборот, исчезновением периодической орбиты. Эта бифуркация представляет простейший механизм перехода от стационарного режима к колебаниям. По этой причине она играет особую роль в теории бифуркаций.

Рассмотрим семейство систем дифференциальных уравнений, C^r - гладких по переменным $x \in R^2, y \in R^m$ и параметрам $\varepsilon \in R^p$ ($p \geq 1$). Пусть при $\varepsilon = 0$ система имеет состояние равновесия O с двумя мнимыми характеристическими показателями, а остальные лежат слева от мнимой оси. Состояние равновесия не имеет нулевых характеристических чисел, поэтому оно сохраняется в малой окрестности $\varepsilon = 0$.

На центральном многообразии $y = 0$ это семейство в полярных координатах принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R(\mu + L_1 R^2) + \Phi_1(R, \phi, \mu) \\ \dot{\phi} &= \omega(\mu) + \Omega_1(\mu) R^2 + \Phi_2(R, \phi, \mu) \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\Phi_1 = o(R^3), \Phi_2 = o(R^2)$.

Если первая ляпуновская величина $L_1 < 0$, то для малых $\mu \leq 0$ состояние равновесия O устойчиво и все траектории в некоторой окрестности U начала координат стремятся к O . Когда $\mu > 0$, состояние равновесия становится неустойчивым и возникает устойчивая периодическая орбита. [2] Рис.13.

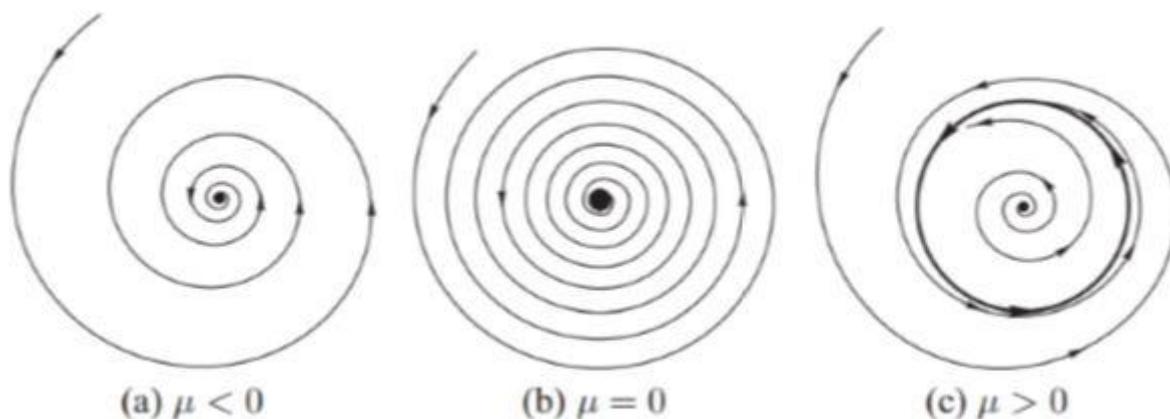


Рис. 13. – Устойчивая периодическая орбита.

Если первая ляпуновская величина $L_1 > 0$, то для малых $\mu \geq 0$ состояние равновесия O устойчиво и все траектории в некоторой окрестности U начала координат стремятся к O . Когда $\mu < 0$, состояние равновесия становится неустойчивым и возникает неустойчивая периодическая орбита. Рис.14.

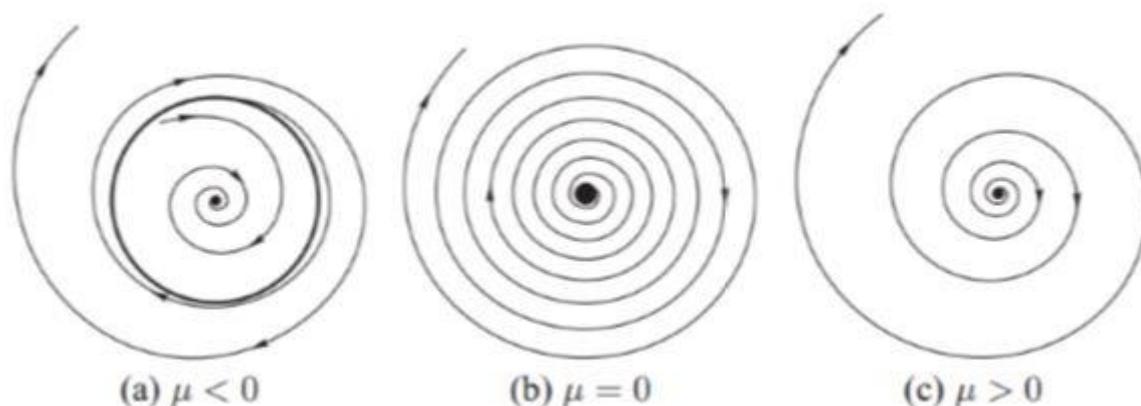


Рис. 14. – Неустойчивая периодическая орбита.

Исследуя бифуркацию Андронова-Хопфа в многомерном случае:

Если первая ляпуновская величина $L_1 < 0$, то для малых $\mu \leq 0$ состояние равновесия O устойчиво (при $\mu < 0$ – грубый фокус, а при $\mu = 0$ – слабый фокус) и оно притягивает все траектории из малой окрестности начала координат. Когда $\mu > 0$, точка O становится «седло-фокусом» с двумерным неустойчивым многообразием и m -мерным устойчивым многообразием. Данная бифуркация называется надкритической бифуркацией Андронова-Хопфа. Рис. 15.

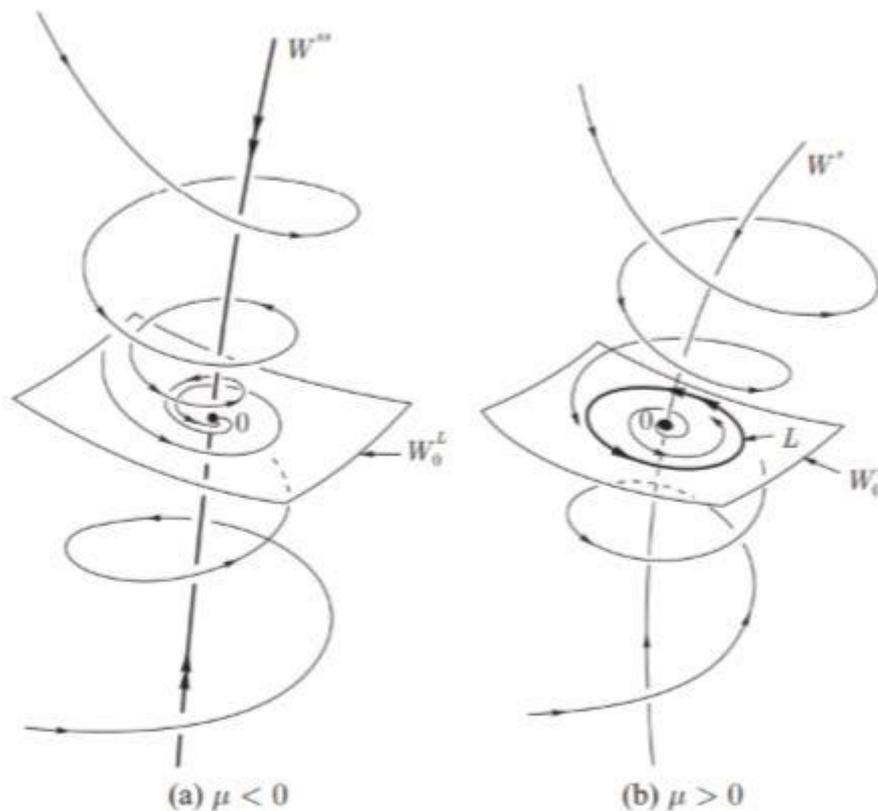


Рис. 15. – Надкритическая бифуркация Андронова-Хопфа.

Фазовые портреты при $L_1 > 0$ изображены на Рис.15. При этом, когда $\mu < 0$, существует устойчивое состояние равновесия O (фокус) и седловая периодическая орбита, m -мерное устойчивое многообразие которой является границей области притяжения точки O . Когда μ возрастает, цикл приближается к O и «влипает» в него при $\mu = 0$. Состояние равновесия O становится «седло-фокусом», когда μ переходит через нуль. Такая бифуркация называется субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа.

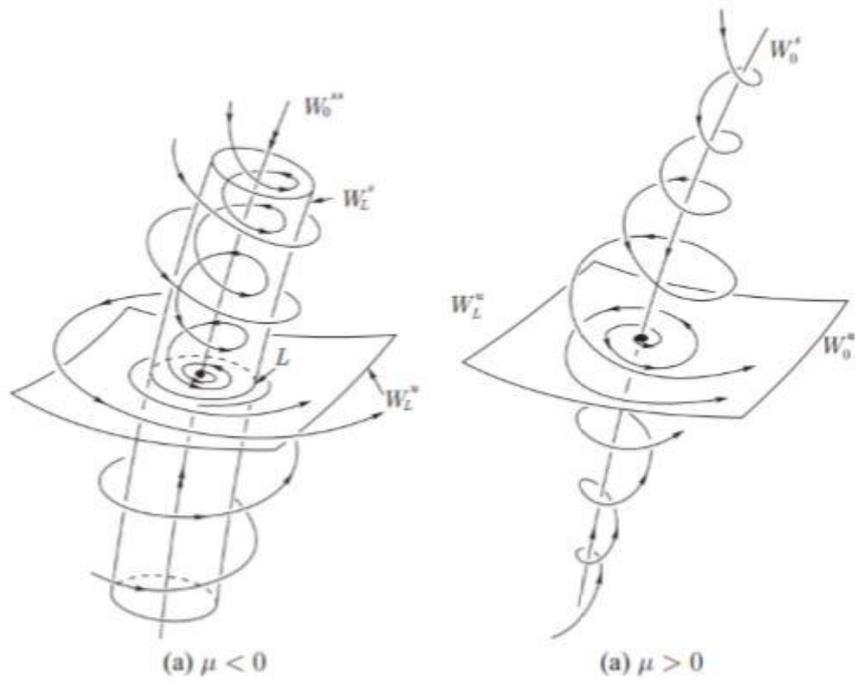


Рис. 16. – Субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа.

Глава 2. Исследование динамических систем.

2.1. Постановка задачи

Для исследования была выбрана модель динамики системы хищник - жертва с логистическим воспроизводством жертв и трофической функцией Холлинга 2-го типа.

Необходимо провести качественное исследование системы, изобразить все качественно различные фазовые портреты и интерпретировать полученные результаты. Для построения фазовых портретов используется программная среда Maple.

2.2. Система «Хищник – жертва»

2.2.1. Описание системы

Модель динамики системы хищник - жертва с логистическим воспроизводством жертв и трофической функцией Холлинга 2-го типа:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{axy}{1 + ahx} \\ \frac{dy}{dt} = b \frac{axy}{1 + ahx} - my \end{cases}, \quad (2.1)$$

где x - плотность популяции жертв;

y - плотность популяции хищников;

r - темп естественного прироста популяции жертв;

K - максимальная плотность популяции, достигаемая жертвами при отсутствии хищника (емкость среды, характеризующая первичную продуктивность трофической системы);

b - коэффициент эффективности хищничества, определяемый как отношение удельной скорости прироста популяции хищника к его индивидуальному рациону;

m - коэффициент смертности хищника.

Для физического смысла не рассматриваем отрицательные значения параметров.

2.2.2. Исследование системы

Система (2.1) учитывает:

- скорость размножения хищников, обусловленная истреблением жертв, пропорциональна выражению $\frac{xy}{1+ahx}$;
- ограниченность размножения жертвы в отсутствии хищника (внутривидовая конкуренция среди жертв).
- При отсутствии жертв хищники вымирают экспоненциально.

Для сокращения количества параметров введем замену:

$t = \frac{\tau}{r}$, $x = \frac{m}{ba}u$, $y = rv$ и получим систему

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{uv}{1+\alpha u} - \beta u^2 \\ \dot{v} = -\gamma v \left(1 - \frac{u}{1+\alpha u}\right) \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\alpha = \frac{hm}{b}$, $\beta = \frac{m}{Kab}$, $\gamma = \frac{m}{r}$

$$\alpha, \beta, \gamma > 0$$

Найдем стационарные состояния системы:

$$\begin{cases} u - \frac{uv}{1+\alpha u} - \beta u^2 = 0 \\ -\gamma v \left(1 - \frac{u}{1+\alpha u}\right) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Составим матрицу Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1-v}{1+\alpha u} + \frac{\alpha uv}{(1+\alpha u)^2} - 2\beta u & -\frac{u}{1+\alpha u} \\ -\gamma v \left(-\frac{1}{1+\alpha u} + \frac{\alpha u}{(1+\alpha u)^2}\right) & -\gamma \left(1 - \frac{u}{1+\alpha u}\right) \end{bmatrix}$$

В рассматриваемой системе (2.2) присутствуют три стационарных состояния:

$$P_1(0,0), P_2\left(\frac{1}{\beta}, 0\right) \text{ и } P_3(\xi, \eta), \text{ где } \xi = \frac{1}{1-\alpha}, \eta = \frac{1-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2}$$

Запишем систему (2.2) в окрестностях каждого из стационарных состояний:

1. $P_1(0,0)$

$$J(P_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{vmatrix}$$

Характеристическое уравнение: $(1 - \lambda)(-\gamma - \lambda) = 0$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = -\gamma < 0$

Собственные значения действительные и имеют разные знаки, значит точка $P_1(0,0)$ – седло.

2. $P_2\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)$

$$J(P_2) = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{\alpha + \beta} \\ 0 & \frac{-\gamma(\alpha - 1 + \beta)}{\alpha + \beta} \end{vmatrix}$$

Характеристическое уравнение: $(-1 - \lambda)\left(\frac{-\gamma(\alpha - 1 + \beta)}{\alpha + \beta} - \lambda\right) = 0$

Собственные значения: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{\gamma(\alpha - 1 + \beta)}{\alpha + \beta}$

Если $\varphi = (\alpha - 1 + \beta) > 0$, то P_2 – устойчивый узел.

Если $\varphi = (\alpha - 1 + \beta) < 0$, то P_2 – седло.

Если $\varphi = (\alpha - 1 + \beta) = 0$ – критический случай.

3. $P_3(\xi, \eta)$

Положение равновесия, описывающее режим сосуществования хищника и жертвы с ненулевыми численностями. При $\alpha > 1, \xi < 0 \rightarrow P_3$ не существует. При $\alpha < 1, \xi > 0$, а знак η определяется знаком $1 - \alpha - \beta \rightarrow P_3$ существует если $\beta < \beta_0 = 1 - \alpha$.

$$J(P_3) = \begin{vmatrix} \frac{\beta + \alpha^2 - \alpha + \alpha\beta}{\alpha - 1} & -1 \\ -\gamma(\alpha - 1 + \beta) & 0 \end{vmatrix}$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \left(\frac{\alpha^2 + \beta + \alpha\beta - \alpha}{1 - \alpha}\right)\lambda - \gamma(\alpha - 1 + \beta) = 0$

Свободный член характеристического уравнения положительный, значит P_3 – не седло.

Знак коэффициента при λ зависит от $\psi = (\alpha^2 + \beta + \alpha\beta - \alpha)$, $\psi = 0$ при $\beta = \beta_{00} = -\frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha + 1}$.

Если $\beta_{00} > \beta > 0 \rightarrow \psi < 0$, то точка P_3 – неустойчивый фокус.

Если $\beta_{00} < \beta < \beta_0 \rightarrow \psi > 0$, то точка P_3 – устойчивый фокус (узел).

Если $\beta = \beta_{00} \rightarrow \psi = 0$ – критический случай.

$P_1(0,0)$	$\lambda_1 = 1 > 0,$ $\lambda_2 = -\gamma < 0$	Седло (Рис. 17)
$P_2\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)$	$\varphi = (\alpha - 1 + \beta) > 0$ $\varphi = (\alpha - 1 + \beta) < 0$ $\varphi = (\alpha - 1 + \beta) = 0$	Устойчивый узел (Рис. 18) Седло(Рис. 19) Критический случай
$P_3(\xi, \eta),$ где $\xi = \frac{1}{1 - \alpha'}$ $\eta = \frac{1 - \alpha - \beta}{(1 - \alpha)^2}$	$\beta_{00} > \beta > 0 \rightarrow \psi < 0$ $\beta_{00} < \beta < \beta_0 \rightarrow \psi > 0$ $\beta = \beta_{00} \rightarrow \psi = 0$	Неустойчивый фокус (Рис. 20) Устойчивый фокус (узел)(Рис. 21) Критический случай

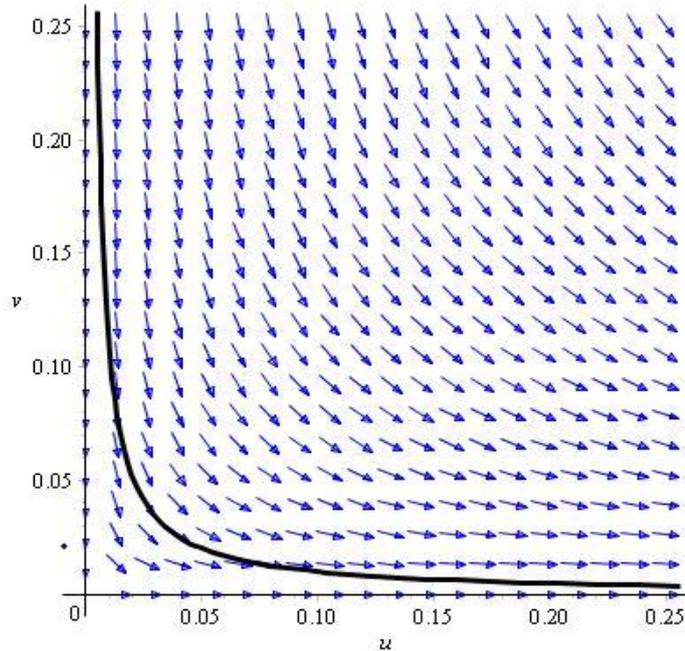


Рис. 17. –Фазовый портрет т. $P_1(0,0)$ – седло, при $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$.

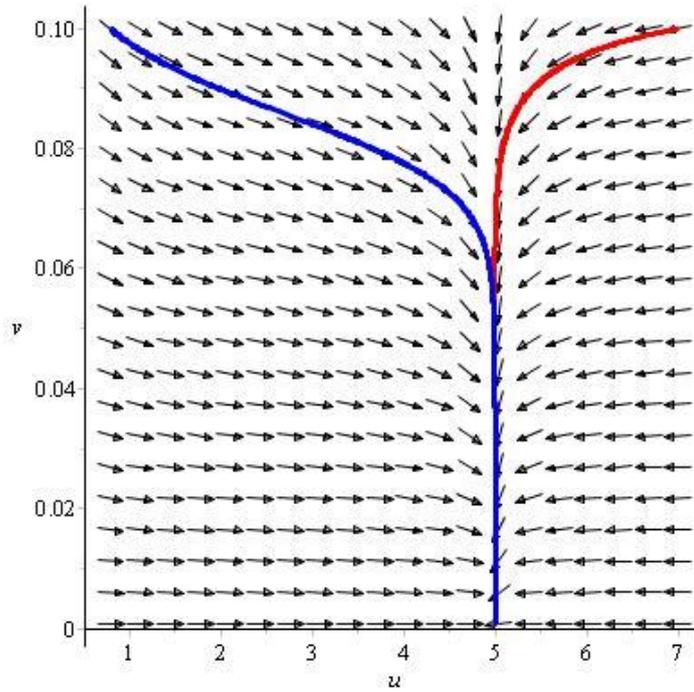


Рис. 18. –Фазовый портрет т. $P_2 \left(\frac{1}{\beta}, 0 \right)$ – устойчивый узел,
при $\alpha = 5, \beta = 0.2, \gamma = 0.1$.

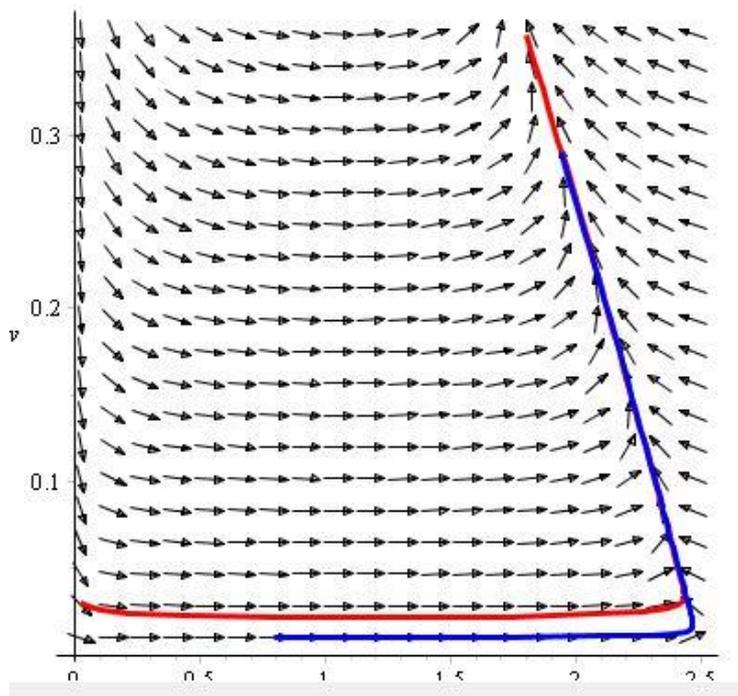


Рис. 19. –Фазовый портрет точки $P_2 \left(\frac{1}{\beta}, 0 \right)$ – седло,
при $\alpha = 0.1, \beta = 0.4, \gamma = 0.1$.

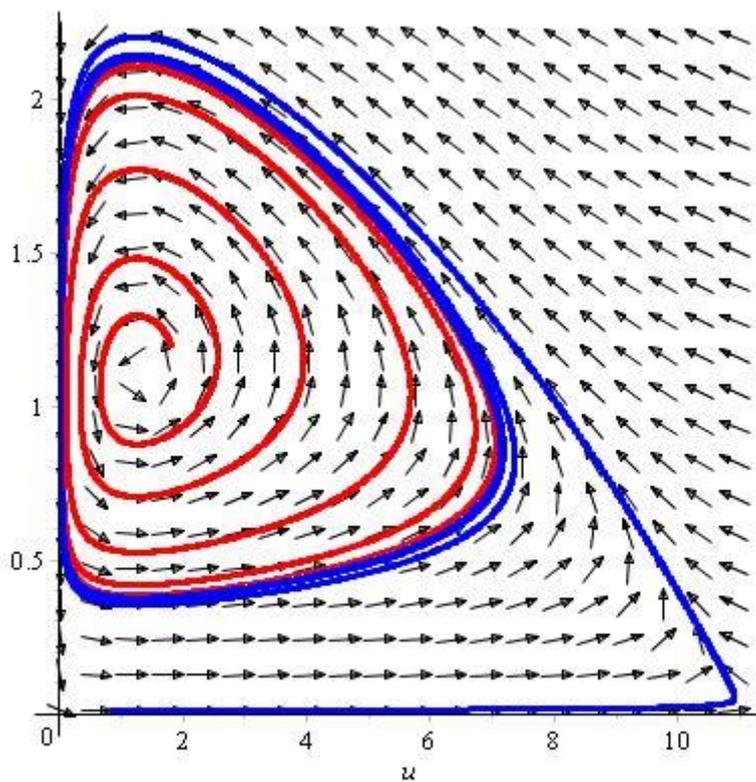


Рис. 20. – Фазовый портрет точки $P_3(\xi, \eta)$ – неустойчивый фокус,
при $\alpha = 0.2, \beta = 0.09, \gamma = 0.12$.

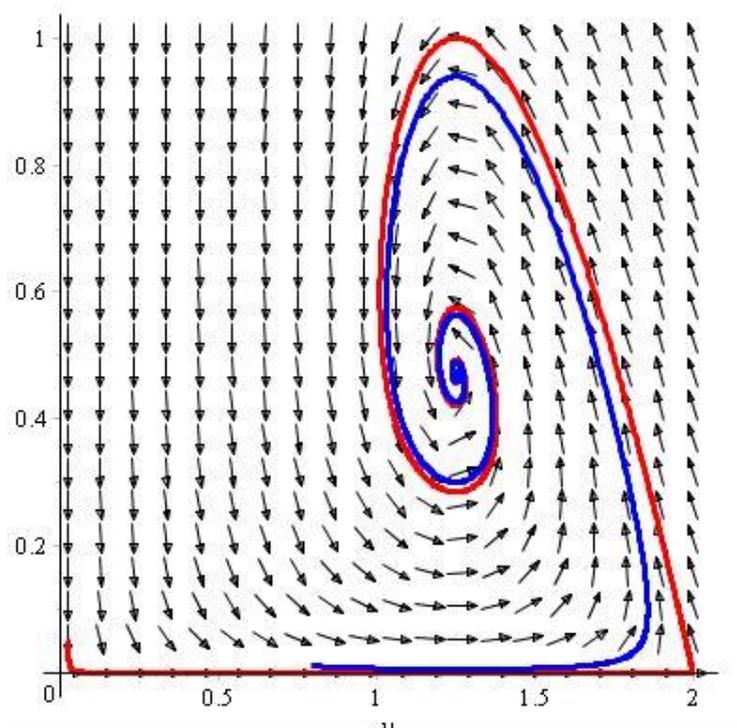


Рис. 21. – Фазовый портрет точки $P_3(\xi, \eta)$ – устойчивый фокус,
при $\alpha = 0.2, \beta = 0.5, \gamma = 5$.

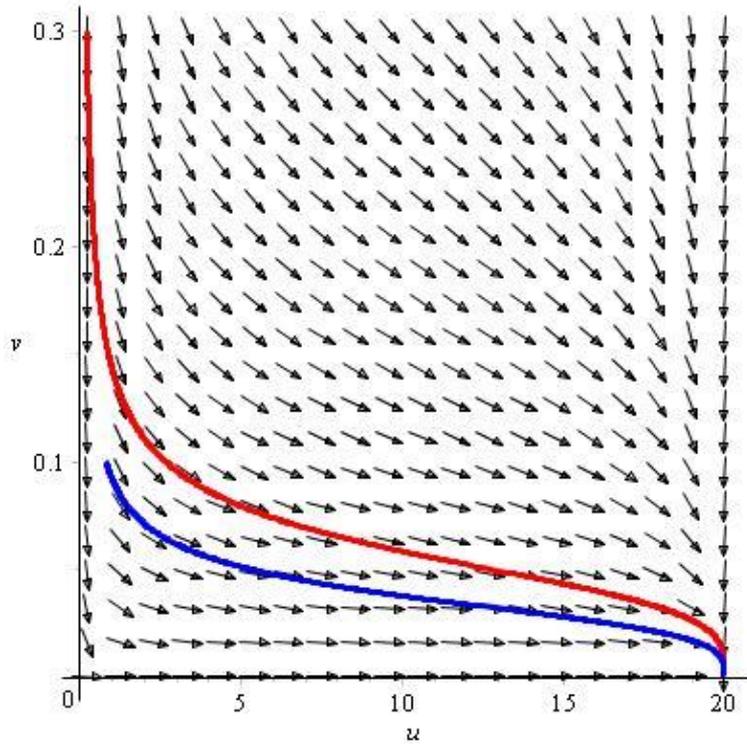


Рис. 22. – Фазовый портрет точки $P_3(\xi, \eta)$ – устойчивый узел, при $\alpha = 2, \beta = 0.05, \gamma = 0.5$.

2.2.3. Исследование критических случаев.

1. Исследуем критический случай в точке $P_2\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)$. Из собственных значений видно, что это первый критический случай. При $(\alpha - 1 + \beta) = 0$.

Перенесем точку $P_2\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)$ в начало координат: $\begin{cases} u = \bar{u} + \frac{1}{\beta} \\ v = \bar{v} \end{cases}$

Система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}} = \bar{u} + \frac{1}{\beta} - \frac{(\bar{u} + \frac{1}{\beta})\bar{v}}{1 + \alpha(\bar{u} + \frac{1}{\beta})} - \beta \left(\bar{u} + \frac{1}{\beta}\right)^2 \\ \dot{\bar{v}} = -\gamma \bar{v} \left(1 - \frac{(\bar{u} + \frac{1}{\beta})}{1 + \alpha(\bar{u} + \frac{1}{\beta})}\right) \end{cases} \quad (2.4)$$

Дифференцируем каждое уравнение по \bar{u}, \bar{v} и составляем матрицу Якоби, сразу подставляя $\bar{u} = 0, \bar{v} = 0$ и получаем матрицу следующего вида:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Теперь с помощью собственных векторов перейдем в другую систему координат, в которой матрица линейной части приняла бы нужный нам вид, а именно:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Сделаем линейную замену:

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{u} - \bar{v} \\ \bar{v} = \bar{v} \end{cases}$$

Получаем новую систему:

$$\begin{cases} \bar{u} - \bar{v} = \bar{u} - \bar{v} + \frac{1}{\beta} - \frac{(\bar{u} - \bar{v} + \frac{1}{\beta})\bar{v}}{1 + \alpha(\bar{u} - \bar{v} + \frac{1}{\beta})} - \beta \left(\bar{u} - \bar{v} + \frac{1}{\beta} \right)^2 \\ \bar{v} = -\gamma \bar{v} \left(1 - \frac{(\bar{u} - \bar{v} + \frac{1}{\beta})}{1 + \alpha(\bar{u} - \bar{v} + \frac{1}{\beta})} \right) \end{cases} \quad (2.5)$$

Приводим систему к виду:

$$\begin{cases} \bar{u} = -\frac{\bar{v}^3 \beta^2 - 3\bar{v}^2 \bar{u} \beta^3 + 3\bar{v} \bar{u}^2 \beta^3 - \bar{u}^3 \beta^3 + \gamma \bar{v}^2 \beta^2 - \gamma \bar{v} \beta^2 \bar{u} - \bar{v}^3 \beta^2 + 3\bar{v}^2 \bar{u} \beta^2 + \bar{u}^3 \beta^2 + \bar{v}^2 \beta^2 - 3\bar{v} \bar{u} \beta + 2\bar{u}^2 \beta + \bar{u}}{\bar{v} \beta^2 - \bar{u} \beta^2 - \bar{v} \beta + \bar{u} \beta + 1} \\ \bar{v} = -\frac{\beta^2 \gamma \bar{v} (\bar{v} - \bar{u})}{\bar{v} \beta^2 - \bar{u} \beta^2 - \bar{v} \beta + \bar{u} \beta + 1} \end{cases} \quad (2.6)$$

Найдем центральное многообразие $\bar{u} = \psi(\bar{v})$. Найдем его в виде формального ряда по \bar{v} :

$$\bar{u} = \psi(\bar{v}) = A\bar{v}^2 + B\bar{v}^3 + C\bar{v}^4 + \dots$$

Разложим каждое уравнение системы (2.6) в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия:

$$\begin{cases} \bar{u} = \beta^4 \gamma \bar{u}^2 \bar{v} - 2\beta^4 \gamma \bar{u} \bar{v}^2 + \beta^4 \gamma \bar{v}^3 - \beta^4 \bar{u}^2 \bar{v} + 2\beta^4 \bar{u} \bar{v}^2 - \beta^4 \bar{v}^3 - \beta^3 \gamma \bar{u}^2 \bar{v} + 2\beta^3 \gamma \bar{u} \bar{v}^2 \\ -\beta^3 \gamma \bar{v}^3 + 2\beta^3 \bar{u} \bar{v}^2 + \beta^3 \bar{v}^3 + \beta^2 \gamma \bar{u} \bar{v} - \beta^2 \gamma \bar{v}^2 - \beta^2 \bar{u} \bar{v} + \beta^2 \bar{v}^2 - \beta \bar{u}^2 + 2\beta \bar{u} \bar{v} - \beta \bar{v}^2 - \bar{u} + \dots \\ \bar{v} = \beta^4 \gamma \bar{u}^2 \bar{v} - 2\beta^4 \gamma \bar{u} \bar{v}^2 + \beta^4 \gamma \bar{v}^3 - \beta^3 \gamma \bar{u}^2 \bar{v} + 2\beta^3 \gamma \bar{u} \bar{v}^2 - \beta^3 \gamma \bar{v}^3 + \beta^2 \gamma \bar{u} \bar{v} - \beta^2 \gamma \bar{v}^2 + \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

Инвариантность многообразия $\bar{u} = \psi(\bar{v})$ означает что:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \left(B\bar{u} + g(\bar{u}, \psi(\bar{v})) \right) = A\psi(\bar{v}) + f(\bar{u}, \psi(\bar{v})) \quad (2.8)$$

Путем разложения функций, входящих в уравнение (2.8), в формальный ряд по степеням \bar{v} из данного уравнения можно последовательно найти все коэффициенты ряда Тейлора функции ψ .

Приравняем коэффициенты при \bar{v} в левой и правой частях системы (2.8)

Путем решения полученной СЛАУ найдем коэффициенты A, B, C .

$$A = -\beta^2\gamma + \beta^2 - \beta$$

$$B = -3\beta^4\gamma^2 + 5\beta^4\gamma - 2\beta^4 - 6\beta^3\gamma + 4\beta^3 - 2\beta^2$$

$$C = -14\beta^6\gamma^3 + 31\beta^6\gamma^2 - 21\beta^6\gamma - 39\beta^5\gamma^2 + 4\beta^6 + 48\beta^5\gamma - 13\beta^5 - 28\beta^4\gamma + 14\beta^4 - 5\beta^3$$

Следовательно, центральное многообразие

$$\begin{aligned} \bar{u} = \psi(\bar{v}) = & (-\beta^2\gamma + \beta^2 - \beta)\bar{v}^2 \\ & + (-3\beta^4\gamma^2 + 5\beta^4\gamma - 2\beta^4 - 6\beta^3\gamma + 4\beta^3 - 2\beta^2)\bar{v}^3 \\ & + (-14\beta^6\gamma^3 + 31\beta^6\gamma^2 - 21\beta^6\gamma - 39\beta^5\gamma^2 + 4\beta^6 + 48\beta^5\gamma - 13\beta^5 - 28\beta^4\gamma + 14\beta^4 - 5\beta^3)\bar{v}^4 + \dots \end{aligned}$$

Систему (2.7) можно ограничить на центральное многообразие в окрестности исследуемого положения равновесия.

Система на W^c имеет вид:

$$\bar{v} = -\beta^2\gamma\bar{v}^2 + \dots, \text{ где } l_2 = -\beta^2\gamma \text{—первая ляпуновская величина.}$$

$l_2 < 0$ —первая отличная от нуля ляпуновская величина имеет четный порядковый номер, что соответствует негрубому состоянию равновесия «седло-узел».

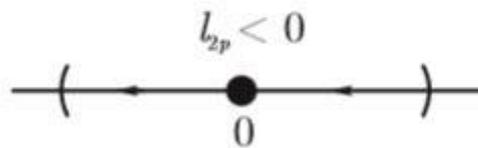


Рис. 22. – Седло-узел при $l_2 < 0$.

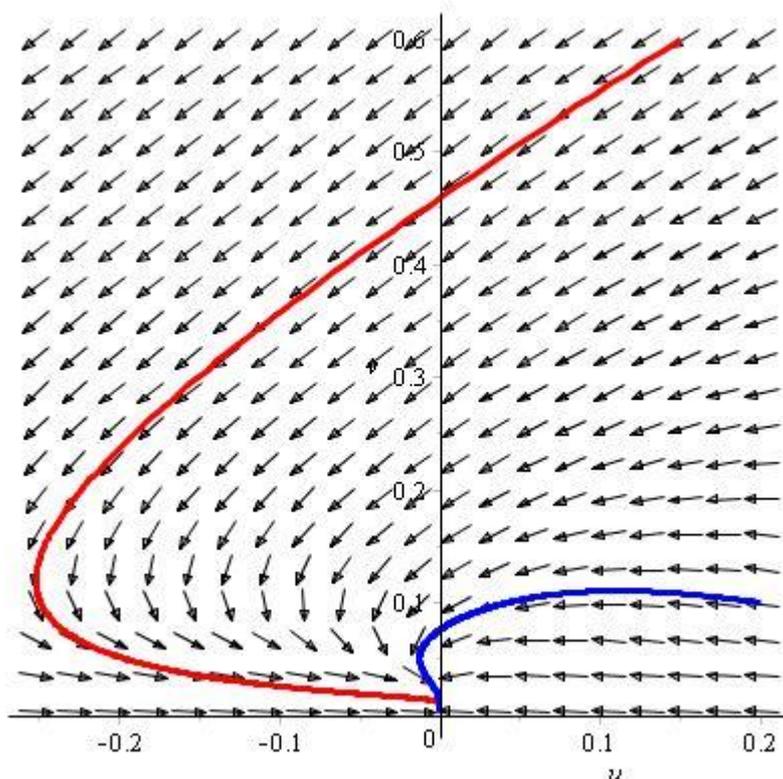


Рис. 23. – Фазовый портрет точки $P_2\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)$

– седлоузловая бифуркация,

при $\alpha = 0.15, \beta = 0.85, \gamma = 3$.

2. Исследуем критический случай в точке $P_3(\xi, \eta)$, где $\xi = \frac{1}{1-\alpha}, \eta = \frac{1-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2}$.

Из собственных значений видно, что это второй критический случай. При $\beta = \beta_{00} \rightarrow \psi = 0$, где $\psi = (\alpha^2 + \beta + \alpha\beta - \alpha)$.

Перенесем точку $P_3(\xi, \eta)$ в начало координат:
$$\begin{cases} u = \bar{u} + \frac{1}{1-\alpha} \\ v = \bar{v} + \frac{1-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2} \end{cases}$$

Система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{u}} = \bar{u} + \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\left(\bar{u} + \frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\bar{v} + \frac{1-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2}\right)}{1 + \alpha\left(\bar{u} + \frac{1}{1-\alpha}\right)} - \beta\left(\bar{u} + \frac{1}{1-\alpha}\right)^2 \\ \dot{\bar{v}} = -\gamma\left(\bar{v} + \frac{1-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2}\right)\left(1 - \frac{\left(\bar{u} + \frac{1}{1-\alpha}\right)}{1 + \alpha\left(\bar{u} + \frac{1}{1-\alpha}\right)}\right) \end{cases}$$

Разложим каждое уравнение новой системы в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{\bar{v}(-1-\alpha)}{1+\alpha} + \frac{\bar{u}\bar{v}(-\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1)}{1+\alpha} \\ &+ \bar{u}^2 \left(\frac{(\alpha^3 - \alpha^2)}{1+\alpha} + \frac{\bar{v}(-2\alpha^2 + \alpha + 2\alpha^4 - \alpha^5)}{1+\alpha} \right) \\ &+ \frac{\bar{u}^3(-3\alpha^4 + 3\alpha^3 + \alpha^5 - \alpha^2)}{1+\alpha} + \dots \\ \bar{v} &= \bar{u} \left(-\frac{\gamma(\alpha-1)}{1+\alpha} - \frac{\bar{v}(\alpha-1)\gamma(1-\alpha^2)}{1+\alpha} \right) \\ &+ \bar{u}^2 \left(-\frac{(\alpha^2 - \alpha)\gamma(\alpha-1)}{1+\alpha} - \frac{\bar{v}(-\alpha - \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2)\gamma(\alpha-1)}{1+\alpha} \right) \\ &+ \frac{\bar{u}^3(-2\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^4)\gamma(\alpha-1)}{1+\alpha} + \dots\end{aligned}$$

Найдем первую ляпуновскую величину через коэффициенты полученной системы по формуле (1.20). Получим:

$$L_1 = -\frac{1}{2} \frac{(1+\alpha)\alpha^2\pi}{\gamma^2}$$

$L_1 < 0$, то траектории по спирали стремятся к O при $t \rightarrow +\infty$, как показано на Рис.12. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым сложным или слабым фокусом. Рис. 24.

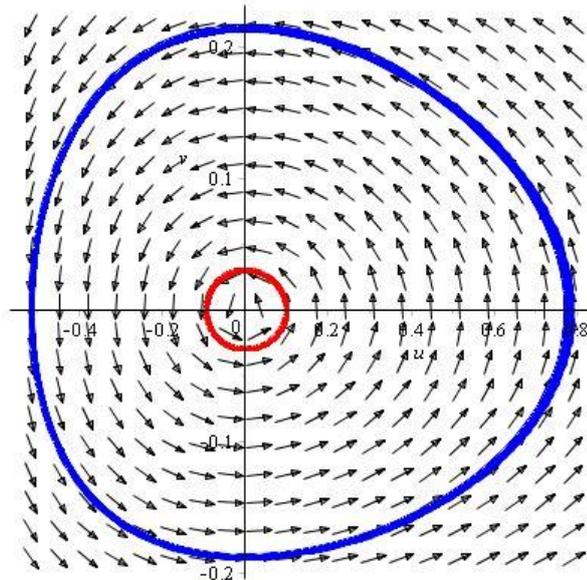


Рис. 24. – Фазовый портрет точки $P_3(\xi, \eta)$ где $\xi = \frac{1}{1-\alpha}$, $\eta = \frac{1-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2}$
– устойчивый сложный фокус, при $\alpha = 0.01$, $\beta = -\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha+1}$, $\gamma = 0.1$.

Первая ляпуновская величина отрицательна, следовательно, происходит суперкритическая бифуркация Андронова - Хопфа.

2.2.4. Интерпретация полученных результатов.

Принимая во внимание физический смысл модели, подведем итог проведенного исследования. В системе учитывается конкуренция жертв за ограниченные ресурсы и насыщение хищника (т.е. даже при очень большом числе жертв хищник не может съест больше, чем определенное количество). Несмотря на то, что система содержит три управляющих параметра α , β и γ , последний из них не оказывает значимого влияния на её качественное поведение.

Исследование показывает, что в зависимости от значений параметров α и β система может иметь либо два, либо три равновесных решения. Область, отмеченная на Рис. 25 как I, соответствует фазовым портретам с двумя положениями равновесия типа седло и устойчивый узел. Это означает, что какими бы ни были первоначальные численности обеих популяций, рано или поздно хищникам грозит вымирание, а численность жертв стабилизируется (Рис.26)

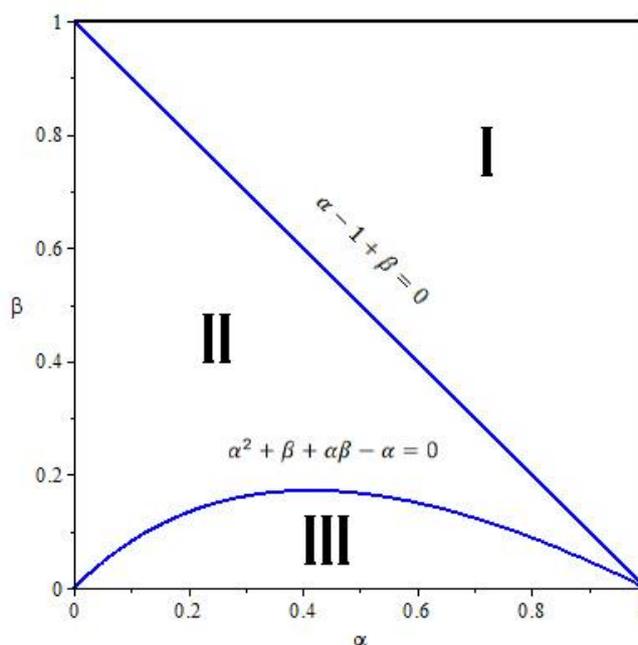


Рис. 25. – Разбиение плоскости параметров на области качественно различного поведения.

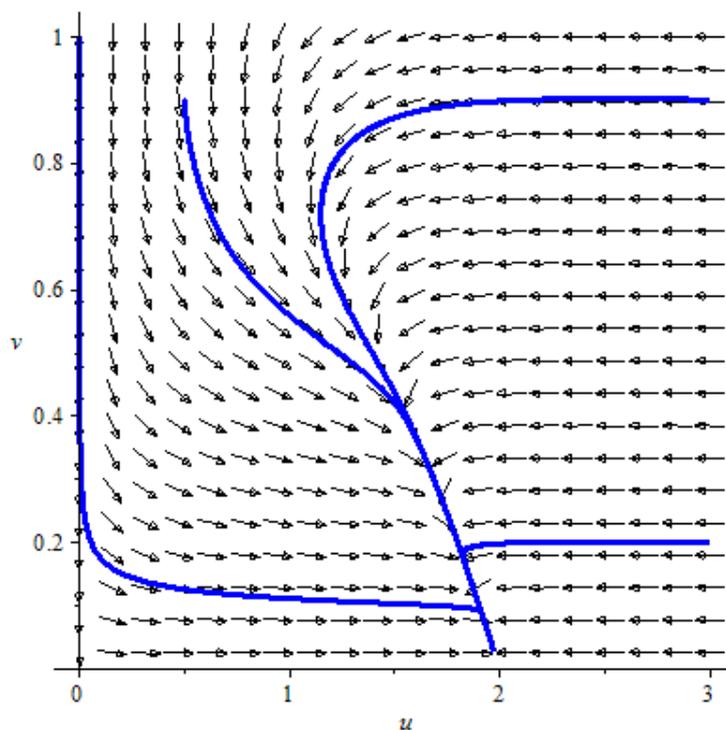


Рис. 26. - Фазовый портрет системы при $\alpha = 0.6, \beta = 0.5, \gamma = 0.2$.

Прямая $\alpha - 1 + \beta = 0$ на плоскости параметров α и β соответствует бифуркации, при которой рождается еще одно положение равновесия, притом устойчивое, соответствующее ненулевым численностям обеих популяций. При этой бифуркации положение равновесия $P_2\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)$ теряет свою устойчивость и становится седлом.

Область, отмеченная на рис.25 как II, соответствует фазовым портретам, качественно неотличимым от Рис. 27. В данном случае, если начальные численности обеих популяций не нулевые, то с течением времени система стабилизируется в окрестности положения равновесия P_3 . Что означает сохранение популяции и хищников, и жертв.

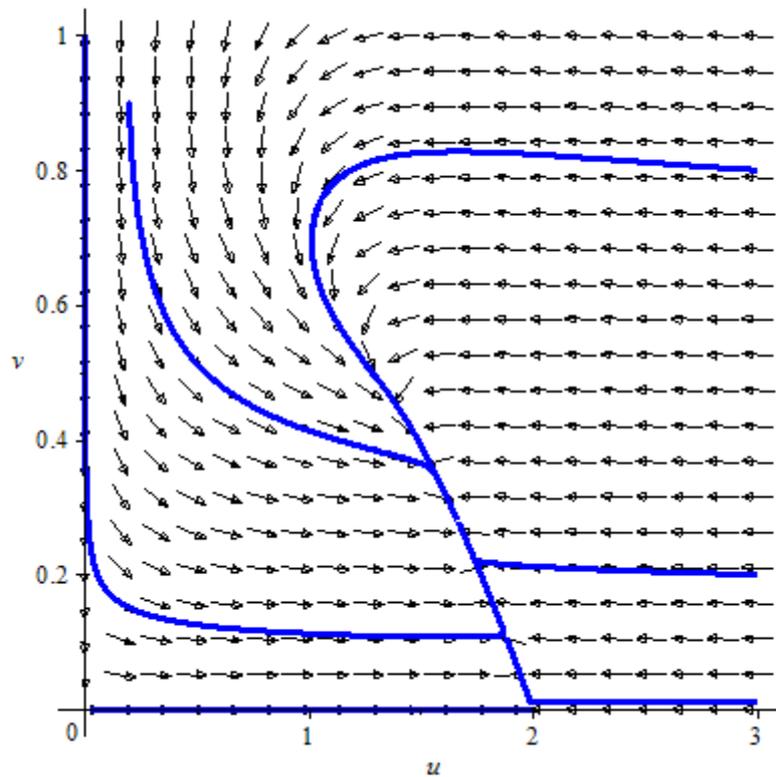


Рис. 27. - Фазовый портрет системы при $\alpha = 0.4, \beta = 0.5, \gamma = 0.2$.

При переходе через кривую $\alpha^2 + \beta + \alpha\beta - \alpha = 0$ в системе происходит еще одна бифуркация. Положение равновесия P_3 теряет устойчивость, вокруг него рождается устойчивый предельный цикл. Область, отмеченная на рис.25 как III, соответствует фазовым портретам, качественно неотличимым от Рис.28. В этом случае, если начальные численности обеих популяций не нулевые, то по прошествии некоторого времени колебания численности и хищников, и жертв становятся периодическими. Данный случай соответствует успешному сосуществованию обеих популяций, позволяющему их сохранить.

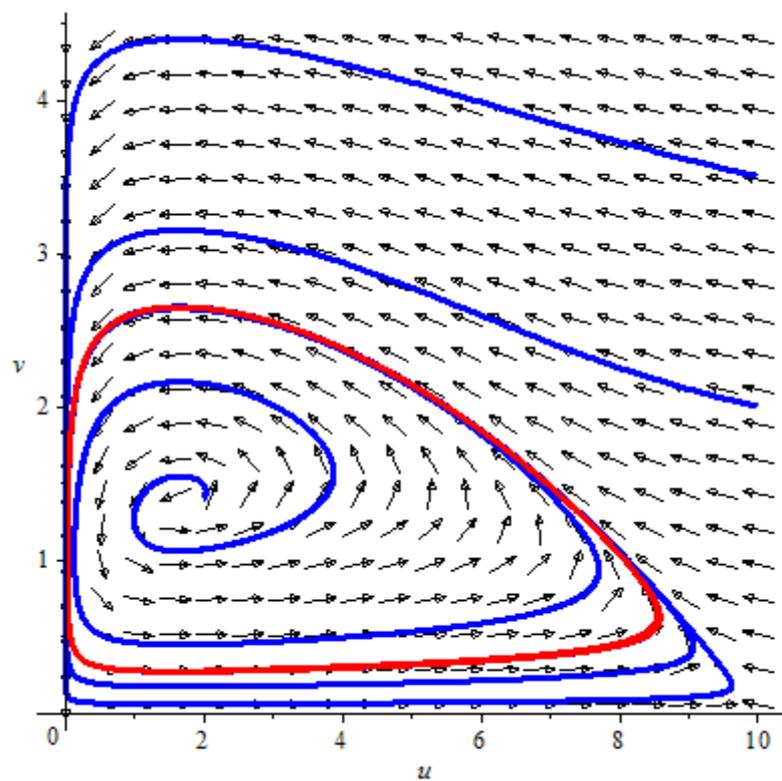


Рис. 28. - Фазовый портрет системы при $\alpha = 0.4, \beta = 0.1, \gamma = 0.2$.

Заключение

Система «хищник-жертва» — сложная экосистема, для которой реализованы долговременные отношения между видами хищника и жертвы, типичный пример коэволюции.

Во время создания данной работы была исследована модель динамики системы хищник - жертва с логистическим воспроизводством жертв и трофической функцией Холлинга 2-го типа.

Во введении определена цель исследований, перечислены задачи, необходимые для достижения поставленной цели.

В первой главе изложены теоретические основы моего исследования: теорема о линеаризации, теорема о центральном многообразии. Описаны типы положений равновесия двумерных динамических систем. Рассмотрены виды бифуркаций положений равновесия для первого и второго критических случаев в двумерных системах.

Результаты данного исследования представлены во второй главе работы. Было проведено качественное исследование системы. Для системы было найдено три положения равновесия, построены фазовые портреты, исследованы первый и второй критических случаи, интерпретированы полученные результаты.

Необходимо отметить, что исследуемая система, имея большое количество параметров, охватывает много возможных вариантов развития популяций, но даже они несут абстрактное представление о том, что может происходить в реальной ситуации. Поэтому исследование данных систем является перспективами для дальнейшей работы.

Список литературы

1. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 428 с.
2. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 548 с.
3. Мачулис В.В. Введение в динамические системы. – Тюмень, издательство ТюмГУ, 2013. – 195с.
4. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. — Москва- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 184 стр.
5. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости – М.: «Наука», 1984. – 176с.
6. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. – Казань: Казанский университет, 2013. – 298 с.
7. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, 2-е изд., - М.:«Наука», 1976. – 496с.
8. Хакен Г., Синергетика. [Электронный ресурс]. – <http://www.nehudlit.ru/books/sinergetika-ierarkhii-neustoychivostey-v-samoorganizuyushchikhsya-sistemakh-i-ustroystvakh.html> (дата обращения 22.05.2018).
9. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. [Электронный ресурс]. – http://avmaksimov.ucoz.ru/_ld/1/109_-Bratus_A-Novoz.pdf (дата обращения 25.05.2018).

10. Баутин Н.Н., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости/Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. –Москва.: Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука», 1990. – 486 с.
11. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. – 408с.
12. Недорезов Л.В., Утюпин Ю.В. Непрерывно-дискретные модели динамики численности популяций. – Новосибирск: ГПНТБ СО РАН, 2011. – 234с. – (Сер. Экология. Вып. 95).
13. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамические системы и бифуркации (задачи и примеры решений) – Саратов: издательский центр «РАТА», 2008. – 40с.
14. Разжевайкин В.Н. Модели динамики популяций – М: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, 2006. – 88с.
15. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современный проблемы нелинейной динамики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336с.
16. Комаров М.А., Осипов Г.В., Петров В.С. Конкурентная динамика живых систем. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2010. – 63с.
17. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 396с.
18. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368с.
19. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: - Наука, 1985. – 181с.
20. Андронов А.А., ЛеонтовичЕ.А., Гордон И.И., МайерА.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – Изд. «Наука», главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1967. – 485 с.

21. Асланов В.С. Нелинейная динамика: Электронное учебное пособие/Асланов В.С., Ледков А.С. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2010. – 92с.