МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ
ЗАИМСТВОВАНИЯ
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
Татосов А.В.
2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Математическое моделирование»

Выполнил работу Студент 2 курса очной формы обучения	Бакалдин Геннадий Сергеевич
Руководитель работы ст. преподаватель кафедры ФМиМ	Бельмецев Николай Федорович
Руководитель работы к.ф.-м.н., доцент кафедры ФМиМ	Басинский Константин Юрьевич
Рецензент мл. научный сотрудник ИПТМ им. С.А. Христиановича СО РАН	Губкин Алексей Сергеевич

Тюмень, 2018

Оглавление

Введение

Как известно, разнообразные процессы в физике, химии, биологии и экономике, а также в важнейшей области исследования, приводящей к развитию большинства отраслей математики, могут быть представлены в виде дифференциальных уравнений. Существует множество различных способов изучения свойств и построения дифференциальных уравнений. Некоторые из них известны из таких дисциплин как функциональный анализ, линейная алгебра, численный анализ и дифференциальная геометрии.

Софус Ли (17.12.1842.г – 18.02.1899г.) – норвежский ученый конца 19 века, создал теорию непрерывных групп Ли, объединяющую многие интуитивные методики к построению решений дифференциальных уравнений и описанию их свойств. Л. В. Овсянников (22.04.1919г. – 23.05.2014г.) - выдающийся российский ученый, который внес большой вклад в развитие механики и прикладной математики, возродил интерес к групповому анализу. В своих работах он показал, что Софус Ли пользовался описанием свойств дифференциальных уравнений при помощи допускаемых групп.

Эта теория объединила методы алгебры, анализа и геометрии, а в последствии стала одним из краеугольных камней современной математики. Непрерывные группы, так же называемые группы Ли, оказали глубокое влияние на многие области математики и физики, такие как теория гравитации, гидродинамика, квантовая механика, теория управления и другие. Конструкция группы симметрий является основой применения групп Ли при изучении дифференциальных уравнений. Главное открытие С. Ли заключалось в том, что в случае непрерывных групп преобразований эти нелинейные уравнения можно заменить на более простые условия, перейдя от преобразований, близких к тождественному, к порождающим их векторным полям.

Зная однопараметрическую группу симметрий, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений можно понижать порядок уравнения на единицу. Софус Ли показал, что этот подход позволяет привести к единообразию различные частные приемы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная работа посвящена исследованию групповых свойств и построению точных инвариантных решений уравнения фильтрации в трехмерном случаи.

Определения и формулировки теорем из теории групп Ли

Общие сведения о группах Ли

Удобнее всего ввести понятие группы Ли на примере преобразования плоскости $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$, которое задается следующими формулами:

$$\begin{cases} \bar{x} = \varphi(x, y, a), \\ \bar{y} = \psi(x, y, a), \end{cases} \qquad a \in R.$$

Рассмотрим произвольную точку $P = (x, y)$ в плоскости (x, y). Переход этой точки в новое положение $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$- это изменение переменных x, y, связанное с параметром $a\ (a \in R) - T_a(P) = \bar{P}$:

$$T_a: \qquad \bar{x} = \varphi(x, y, a), \quad \bar{y} = \psi(x, y, a),$$

где функции φ и ψ удовлетворяют условиям при $a = 0$

$$T_0: \quad \varphi(x, y, 0) = x, \quad \psi(x, y, 0) = y, \tag{1}$$

а T_0 : – тождественное преобразование:

$$T_0(P) = P.$$

Функции $\varphi(x, y, a)$ и $\psi(x, y, a)$ функционально независимы, а значит их якобиан отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, существует обратное преобразование T_a^{-1} :

$$T_a^{-1}(\bar{P}) = P. \tag{2}$$

Если преобразование $T_a : (x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$, то $T_b : (\bar{x}, \bar{y}) \to (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$.. (3)

Существует композиция (произведение) преобразований $T_b T_a$, определяемое как последовательное выполнение преобразований T_a и T_b.

С геометрической точки зрения T_a перемещает точку P в точку $\bar{P}(T_a(P) = \bar{P})$, а T_b в положение $\bar{\bar{P}}(T_b(\bar{P}) = \bar{\bar{P}})$. Таким образом, произведение $T_b T_a$ переносит P в конечное положение $\bar{\bar{P}}$ без промежуточной остановки в точке $\bar{P}$.

$$T_a(P) = \overline{P}.\, T_b(\overline{P}) = (\overline{\overline{P}}) = T_b T_a(P)$$

Если условия (1, 2, 3) выполняются, то преобразования образуют группу. Группа – любое множество, на котором определена операция умножения, и выполнены следующие свойства:

1. Ассоциативность.
2. Произведение двух элементов группы дает элемент группы.
3. Существует единица группы.
4. Существует обратный элемент для каждого элемента.

Теорема. Параметр a всегда можно выбрать таким образом, чтобы, $a_0 = 0$, а $f(a,b) = a + b$. Тогда этот параметр будет называется каноническим.

Пример. Группа переносов (трансляций) вдоль вещественной прямой (оси x):

$$\bar{x} = T_a x = x + a \tag{4}$$

$$\bar{\bar{x}} = T_b \bar{x} = T_b T_a x = \bar{x} + b = (x + a) + b = x + (a + b) \tag{5}$$

Генератор группы

Генератор группы (инфинитезимальный оператор) – это оператор вида

$$\tilde{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}. \tag{6}$$

Если есть дифференцируемая функция $F(x, y)$, то действие генератора на F даст следующий результат:

$$\tilde{X}F = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}. \tag{7}$$

Теорема Ли

Зная генератор, можно восстановить полную группу преобразований, то есть по бесконечно малому преобразованию можно восстановить конечное преобразование. Для этого нужно решить систему уравнений Ли:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x}, \bar{y}), & \bar{x}(a = 0) = x, \\ \dfrac{d\bar{y}}{da} = \eta(\bar{x}, \bar{y}), & \bar{y}(a = 0) = y. \end{cases}$$

Инвариант группы

Инвариантом группы называется функция $F(x, y)$, вид которой не меняется при групповых преобразованиях: $F(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y)$.

Необходимое и достаточное условие инвариантности – действие генератора на функцию должно давать 0:

$$\tilde{X}F = 0 \tag{8}$$

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

Решение такого уравнения эквивалентно решению системы дифференциальных уравнений (уравнений характеристик):

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} \tag{9}$$

Решение всегда можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &J_i(x) = C_i \\ &F(J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}), \end{aligned} \tag{10}$$

где $i = 1,2,..., (n-1)$ – номер уравнения, $(n-1)$ – количество уравнений в системе.

Функция $J(x)$– базисный инвариант. Следовательно, любая достаточно гладкая функция $F(J)$, зависящая от базисного инварианта, тоже будет инвариантом.

Многопараметрические группы Ли. Алгебры Ли.

Рассмотрим пространство L линейных дифференциальных операторов: $L = \{\xi^i_\alpha(x)\partial_{x^i}, \alpha = 1..r\}$, (r-мерный базис в пространстве). Коммуникатором операторов: $\mathrm{X} = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \in L$; $Y = \eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \in L$ называется оператор $[\mathrm{X,Y}]$, определяемый формулой:

$$[\mathrm{X,Y}] = \mathrm{XY - YX} = \xi^i(x)\frac{\partial \eta^j(x)}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \eta^i(x)\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^j} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Для любых трех операторов $X_1, X_2, X_3 \in L$ выполнены свойства коммутатора:

1) $[C_1X_1 + C_2X_2, X_3] = C_1[X_1, X_3] + C_2[X_2, X_3]$ - билинейность.

2) $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$ - антисимметричность.

3) $[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$ -второе тождество Якоби.

4) Пусть при замене $(x) \to (y)$ операторы переписываются, как $X \leftrightarrow X'$. Тогда, $[X_1', X_2'] = [X_1, X_2]'$ - Инвариантность относительно замены координат:

5) $\underset{k}{[X_1, X_2]} = \left[\underset{k}{X_1}, \underset{k}{X_2}\right], \forall\, k \in N$ - инвариантность относительно продолжения.

6) Сохранение инвариантности многообразия: если многообразие $\mathrm{M} \subset R^n$ инвариантно относительно операторов X_1, X_2, то оно инвариантно и относительно их коммутатора $[X_1, X_2]$.

Определение: Если линейное пространство L_r, $\dim L_r = r$ (где $\dim L_r = r$ - размерность), замкнуто относительно операции коммутирования – оно называется алгеброй Ли операторов.

Из свойств коммутатора следует, что линейное пространство L_r операторов, допускаемых произвольной системой дифференциальных уравнений, образует алгебру Ли. Если $0 < r < \infty$, то в алгебре L_r можно выделить базис операторов $\{X_1,..., X_r\}$, тогда любой оператор $X \in L_r$ можно разложить по этому базису. В виду того, что $Y \in L_r$ $,[X, Y] \in L_r$, тогда $\lfloor X_i, X_j \rfloor$ можно разложить по базису $= C_{ij}^k X_k$,где $i, j, k, = 1,..,r.$ C_{ij}^k - константы, которые называются структурными константами алгебры Ли L_r.

Определение: Совокупность однопараметрических преобразований, построенных для каждого оператора из алгебры Ли L_r, называется локальной r-параметрической группой Ли преобразований G_r.

Определение: Две подалгебры $H, K \subset L$ - подобные, если существует внутренний автоморфизм $A \subset IntL, K = AH$.

$\overline{X}^i = f^i(x,a),\; X \in R^n, a \in R.$

Для этой однопараметрической группы есть оператор: $X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Этот оператор в новых координатах $\overline{X} \to X'$. Пусть A – внутренний автоморфизм и пусть $J : R^n \to R$ инвариант оператора X.

Лемма: Если функция $J(\overline{X})$является инвариантом оператора AX в координатах $\{\overline{X}^i\}$. Так как инварианты подалгебр (H, K)одинаковы, то соответствующие фактор-системы эквивалентны.

Совокупность класса представителей не подобных подалгебр (по одной из каждого класса) называется оптимальной системой подалгебр и обозначается ΘL. Совокупность неподобных подалгебр размерности $S : \Theta_s L$.

Рассмотрим случай конечно мерной алгебры Ли. Кажыдй элемент алгебры может быть разложен по базису: $X = \varepsilon^i X_i$. $M = H_\alpha = \varepsilon^i_\alpha X_i, \{\alpha = 1,..,S\}$. Каждая подалгебра m имеет матрицу коэффициентов вида:

$$\xi = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1,..,\varepsilon_1^n \\ ..... \\ \varepsilon_s^1,..,\varepsilon_s^n \end{pmatrix}.$$

Пусть M имеет размерность S, тогда $rank\xi = S$. Если выполнено $[H_\alpha, H_\beta] = K^\gamma_{\alpha\beta} H_\gamma$ для матрицы ξ имеется матрица эквивалентная по строкам и $H'_\alpha = \omega^\beta_\alpha H_\beta$, где $\det\|\omega^\beta_\alpha\| \neq 0$. Такие преобразования строк называются β преобразованиями. Они представляют собой линейное преобразование базиса L.

Помимо β-преобразований на координаты ε_{ij} действуют внутренние метоморфизмы. Они действуют на столбцах матрицы ξ. Под действием β и α преобразований подалгебра M переходит в подобную подалгебру. Это даёт возможность упростить матрицу ξ, сохраняя инварианты группы.

Афтоморфизмы алгебр Ли.

Автоморфизмом алгебры Ли называется невырожденное линейное преобразование $L \to L$, сохраняющее коммутатор.

$$A[X,Y]=[AX,AY], \forall\ X\in L \tag{11}$$

Среди всех автоморфизмов алгебры L выберем зависящее от параметра, образующие группы Ли с каноническим параметром: $A(t): L\to L$.

$$A(t+s)=A(t)A(s);\quad A(0)=I.\text{При } t=0. \tag{12}$$

Группа линейных преобразований, удовлетворяющих свойствам (11) и (8) называется грппой автоморфизмов алгебры Ли $L: AutL.$

Дифференцируя (11) по параметру t в точке $t=0$ тождественного преобразования получим: дифференцированием алгебры Ли L называется $d: L\to L$, удовлетворяющее свойству:

$$d[X,Y]=[dX,Y]+[X,dY],\quad \forall\ X,Y\in L. \tag{13}$$

Множество всех дифференцирований алгебры Ли L само образует алгебры Ли с коммутатором $[d_1,d_2]=d_1d_2-d_2d_1$. Эту алгебру называют алгеброй дифференцирования алгебры Ли L и обозначают D_L, здесь $[d_1,d_2]\in D_L$.

d_1-линейное преобразование; $d_1\ d_2$ - последовательное действие преобразований $[d_1,d_2]\in D_L$.

D_L-играет роль алгебры Ли для внутренних автоморфизмов.

Для любой однопараметрической подгруппы группы автоморфизмов отображения

$a=\frac{dA(t)}{dt}|t=0$ - является дифференцированием алгебры Ли $L\in D_L$.

Для любого дифференцирования из алгебры Ли можем восстановить однопараметрическую группу автоморфизмов $A(t)\subset AutL$ как решение уравнения Ли:

$$\frac{dA}{dt}=aA,\ A(0)=I. \tag{14}$$

I – тождественное преобразование.

(10) удобно переписать в виде действия его любого $X\in L;\ \overline{X}=AX$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\overline{X}}{dt} = d\overline{X} \\
&\overline{X}\Big|_{t=0} = X
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

$X = \varepsilon^i X_i$; $\{X_i\}$-базис L.

Уравнение Ли для поиска внутренних автоморфизмов можно записать в виде:

$(ad\,Y) \in ad\,L$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\overline{X}}{dt} = [Y, \overline{X}] \\
&\overline{X}\Big|_{t=0} = X
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Для конечномерной алгебры Ли L $X = \varepsilon^i X_i$; $\overline{X} = \overline{\varepsilon}^i X_i$ $Y = \alpha^i X^i$,

где $\overline{\varepsilon}^i = \overline{\varepsilon}^i(t)$.

$[\alpha^i X_i, \overline{\varepsilon}^k X_k] = \alpha^i \overline{\varepsilon}^k [X_i, X_k] = \alpha^i \overline{\varepsilon}^k = \alpha^i \overline{\varepsilon}^k C_{ik}^j X_j$, тогда

$$
\begin{aligned}
&X_j \frac{d\overline{\varepsilon}^j}{dt} = X_j \alpha^i \overline{\varepsilon}^k C_{ik}^j; \quad \overline{\varepsilon}^i\Big|_{t=0} X_i = \varepsilon^i X_i \\
&\frac{d\overline{\varepsilon}^j}{dt} = \alpha^i \overline{\varepsilon}^k C_{ik}^j, \qquad Y = \alpha^i X_i \\
&\overline{\varepsilon}^j\Big|_{t=0} = \varepsilon^j
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

$Y = X_i$ тогда имеем набор базисных автоморфизмов.

$$
\begin{aligned}
&A_1(t_1): \left[\begin{aligned} &\frac{d\overline{\varepsilon}^j}{dt_1} = C_{1k}^j \overline{\varepsilon}^k \\ &\overline{\varepsilon}^j\Big|_{t_1=0} = \varepsilon^j \end{aligned}\right. \\
&\ldots \\
&A_i(t_i): \left[\begin{aligned} &\frac{d\overline{\varepsilon}^j}{dt_i} = C_{ik}^j \overline{\varepsilon}^k \\ &\overline{\varepsilon}^j\Big|_{t_i=0} = \varepsilon^j \end{aligned}\right.
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

(14) является уравнением поиска внутренних автоморфизмов.

Инвариантные решения

Решение F – инвариантное H решение уравнений E, если F является инвариантным многообразием группы $H \subset G_r$.

Условия существования инвариантных решений:

1) Необходимое $\left\|\frac{\partial I^{\tau}}{\partial u^{j}}\right\| = m$

2) $r_*(\xi) = r_*(\xi,\eta)$ - это условие проще для проверки.

Теорема: Пусть система дифференциальных уравнений E допускает группу H, для которой выполнено одно из условий, тогда существует фактор-система $\frac{E}{H}$, связывающая только инварианты $I^{\tau}(\tau = 1,\dots,t)$, функции от них $F^{k}(I), k = 1,\dots,m$ и функции, производные по их инвариантам. При этом система $\frac{E}{H}$ обладает свойствами:

1) Любое H-инвариантное решение, записанное в виде $F^{k}(I) = 0, (k = 1,\dots m)$, такое что F^{k} удовлетворяет система $\frac{E}{H}$.

2) Любое решение фактор-системы $\frac{E}{H}$, для которого $\left\|\frac{\partial F^{k}}{\partial I^{\tau}}\right\| = m$ даёт инвариантное H-решение системы E, в виде $F^{k}(I(x,u)) = 0, (k = 1,\dots, m)$.

Инвариант $\frac{E}{H}$ удобно записывать в виде:

$$I : \begin{cases} I^{1}(x,u),\dots,I^{m}(x,u) \\ \lambda^{1} = I^{m+1}(x),\dots,\lambda^{\rho} = I^{t}(x) \end{cases}$$

Число $\rho = n - r_*$ является рангом H-инвариантного решения.

H-инвариантное решение можно представить в виде:

$$I^{k}(x,u) = U^{k}\left(\lambda^{1}(x),\dots, \lambda^{\rho}(x)\right), (k = 1,\dots, m)$$

После приведения подобных и сокращения на ненулевые коэффициенты получим фактор-систему $\frac{E}{H}$, зависящую от $\lambda^{i}, U^{k}\left(\lambda^{1},\dots, \lambda^{\rho}\right)$ и производных по $\lambda_{k^{i}}$. Следует отметить, что $\frac{E}{H}$ проще исходной системы E, так как связывает функции от меньшего числа независимых переменных.

Если $\rho = 1$, то фактор-система $\frac{E}{H}$ является системой обыкновенного дифференциального уравнения.

Если $\rho = 0$, то фактор-система $\frac{E}{H}$ будет системой алгебраических уравнений, связывающая константы.

Инвариантное H-решение называется частным решением уравнений $E,$ связанное с симметриями рассматриваемой группы H.

Постановка задачи

В соответствии с моделью, предложенной Баренблаттом Г.И. с соавторами [1], трещиновато-пористый коллектор состоит из слабо сжимаемых пористых блоков, слабодеформируемых трещин, причем $k_1 >> k_2$, а $m_2 >> m_1$. Здесь индекс 1 относится к трещинам, а индекс 2 к блокам. Скоростью фильтрации в блоках пренебрегают по сравнению со скоростью фильтрации в трещинах $(w_1 >> w_2 >> 0)$, при этом фильтрация по трещинам подчиняется закону Дарси. Обмен жидкостью между блоками и трещинами предполагается пропорциональным разности давления в блоках и трещинах.

Таким образом, неустановившуюся плоско-радиальную фильтрацию в трещиновато-пористой среде можно описывать системой уравнений (1,2):

$$w_1 = -\frac{k_1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial r},\ w_2 = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\rho_o}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_1) + \frac{\partial}{\partial t}(m_1\rho) - q = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(m_2\rho) + q = 0 \qquad (2)$$

где w - скорость фильтрации, k - проницаемость, p - давление, μ - вязкость, r - радиальная координата, m - пористость, ρ - плотность жидкости, t - время, q - массовый обмен жидкостью между блоками и трещинами.

Уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u \qquad (3)$$

первоначально было получено в теории фильтрации жидкости[1]. Данное уравнение моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде. Позже выяснилось, что уравнение (3) моделирует также процесс влагопереноса в почве [2] и процесс теплопроводности с "двумя температурами".

Модельное представление Баренблатта–Желтова–Кочиной фильтрации жидких и газообразных углеводородов в анизотропных трещиновато-пористых и слоисто-неоднородных пластах приводит ([3], гл. 7, § 1) к дифференциальному уравнению в частных производных. Пренебрегая в нем изменением по времени фильтрационного потока в поперечном к пласту направлении, приходим к уравнению относительно давления в трещинах пласта:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \omega\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 V}{\partial y^2 \partial t}\right) - \chi\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = \chi_0 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \tag{4}$$

что соответствует уменьшению размеров блоков и возрастанию плотности трещиноватости в этом направлении ([4], гл. 5, § 5.1), где

$$\omega = \frac{k}{ab},\ \chi = c\omega,\ \omega_0 = \frac{k_0}{ab},\ \chi_0 = c\omega_0. \tag{5}$$

a, b и c – положительные постоянные, зависящие от геометрических характеристик пласта и свойств фильтрующейся жидкости.

После введения замены вида:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\tilde{x}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\tilde{y}; \quad z = \sqrt{\frac{c}{\chi_0}}\tilde{z}; \quad t = \tilde{c}t; \quad V = u. \tag{6}$$

и далее опуская у $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{c}$ волну, уравнение (4) примет вид:

$$u_t - u_{xxt} - u_{yyt} - u_{yy} - u_{xx} - u_{zz} = 0 \tag{7}$$

Используя замену (6) можно вернуться к уравнению вида (4).

Уравнение (7) является псевдопараболическим соболевского типа, которое неразрешено относительно производной по времени. Основным объектом исследования в данной работе является уравнение (7).

Основная допускаемая группа Ли и внутренние автоморфизмы

Пользуясь критерием инвариантности дифференциального многообразия найдем основную допускаемую группу Ли уравнения (4). Оператор допускаемой группы будем искать в виде:

$$\xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y \frac{\partial}{\partial y} + \xi^z \frac{\partial}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

Действие продолженного оператора[6] на дифференциальное многообразие (4) в точках этого многообразия позволяет получить систему определяющих уравнений для поиска коэффициентов оператора X :

$$\eta_{t,u} = 0, \eta_{u,u} = 0, \eta_{u,x} = 0, (\eta_{u,y} = 0, \eta_{u,z} = 0, \eta_{x,t,x} = \frac{1}{\omega}\left(-\chi\eta_{x,x} - \chi\eta_{y,y} - \eta_{y,t,y}\omega - \chi_0\eta_{z,z} + \eta_t\right),$$

$$\xi^t{}_t = 0, \xi^t{}_u = 0, \xi^t{}_x = 0, \xi^t{}_y = 0, \xi^t{}_z = 0, \xi^x{}_t = 0, \xi^x{}_u = 0, \xi^x{}_x = 0, \xi^x{}_y = -\xi^y{}_x, \xi^x{}_z = 0, \xi^y{}_t = 0,$$

$$\xi^y{}_u = 0, \xi^y{}_y = 0, \xi^y{}_z = 0, \xi^y{}_{x,x} = 0, \xi^z{}_t = 0, \xi^z{}_u = 0, \xi^z{}_x = 0, \xi^z{}_y = 0, \xi^z{}_z = 0.$$

Решение системы имеет вид:

$$\xi^x = -C_1 y + C_2; \xi^y = C_1 + C_3; \xi^z = C_4; \xi^t C_5;$$

$$\eta = \left(\frac{1}{e^{\sqrt{c_2}x}e^{\sqrt{c_3}y}}\left(C_6 e^{c_1 t} C_7\left(\left(e^{\sqrt{c_2}x}\right)^2 C_8 + C_9\right)\left(C_{10}e^{\sqrt{c_3}y}\right)^2 + C_{11}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{(\omega c_2 + \omega c_3 - 1)c_1 + (c_2 + c_3)\chi z}}{\sqrt{\chi_0}}\right) +\right.$$

$$+ C_{12}e^{c_1 t}C_7\left(\left(e^{\sqrt{c_2}x}\right)^2 C_8 + C_9\right)\left(C_{10}\left(e^{\sqrt{c_3}y}\right)^2 + C_{11}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{(\omega c_2 + \omega c_3 - 1)c_1 + (c_2 + c_3)\chi z}}{\sqrt{\chi_0}}\right) +$$

$$+ C_{12}e^{c_1 t}C_7\left(C_{13}ue^{\sqrt{c_2}x}e^{\sqrt{c_3}y}\right) + u_0(t, x, y, z)$$

где $u_0(t, x, y, z)$ – произвольное решение исследуемого уравнения (7).

Конечную часть группы Ли можно представить в виде шестимерной алгебры Ли L_6, порождаемая операторами:

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}; \mathrm{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x}; \mathrm{X}_3 = \frac{\partial}{\partial y}; \mathrm{X}_4 = \frac{\partial}{\partial z}; \mathrm{X}_5 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}; \mathrm{X}_6 = u\frac{\partial}{\partial u}; \qquad (8)$$

Таблица коммутаторов шестимерной алгебры имеет вид L_6 (9):

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	0	X_1	0
X_3	0	0	0	0	$-X_2$	0
X_4	0	0	0	0	0	0
X_5	0	$-X_1$	X_2	0	0	0
X_6	0	0	0	0	0	0

(9)

Ненулевые структурные константы имеют вид:

$$C_{25}^1 = 1;\ C_{52}^1 = -1;$$
$$C_{53}^2 = 1;\ C_{35}^2 = -1;$$

В виду замкнутости набора $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ относительно операции коммутации эти операторы образуют базис шестимерной группы L_6.

Для данной алгебры Ли базисные внутренние автоморфизмы имеют вид:

$$A_1(t_1): \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1; \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2; \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3; \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4; \bar{\varepsilon}^5 = \varepsilon^5; \bar{\varepsilon}^6 = \varepsilon^6; \tag{10}$$

$$A_2(t_2): \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^5 t_2 + \varepsilon^1; \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2; \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3; \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4; \bar{\varepsilon}^5 = \varepsilon^5; \bar{\varepsilon}^6 = \varepsilon^6; \tag{11}$$

$$A_3(t_3): \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1; \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2 - \varepsilon^5 t_3; \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3; \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4; \bar{\varepsilon}^5 = \varepsilon^5; \bar{\varepsilon}^6 = \varepsilon^6; \tag{12}$$

$$A_4(t_4): \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1; \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2; \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3; \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4; \bar{\varepsilon}^5 = \varepsilon^5; \bar{\varepsilon}^6 = \varepsilon^6; \tag{13}$$

$$A_5(t_5): \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2 + t_5\varepsilon^3; \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1 - \varepsilon^2 t_5 - \dfrac{t_5^2}{2}\varepsilon^3; \\ \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3; \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4; \bar{\varepsilon}^5 = \varepsilon^5; \bar{\varepsilon}^6 = \varepsilon^6; \end{array} \tag{14}$$

$$A_6(t_6): \bar{\varepsilon}^1 = \varepsilon^1; \bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2; \bar{\varepsilon}^3 = \varepsilon^3; \bar{\varepsilon}^4 = \varepsilon^4; \bar{\varepsilon}^5 = \varepsilon^5; \bar{\varepsilon}^6 = \varepsilon^6. \tag{15}$$

ε^i-координаты произвольного оператора в алгебре L_6. $\bar{\varepsilon}^i$-преобразованные координаты.

Оптимальные системы подалгебр

С помощью внутренних автоморфизмов и линейных преобразований операторов (домножения на константы и сложения) найдём элементы оптимальной системы подалгебр, представляющие классы эквивалентности алгебры Ли L_6.

Найдем оптимальную систему одномерных подалгебр. Координаты операторов зададим в виде:

$(\alpha^1\, \alpha^2\, \alpha^3\, \alpha^4\, \alpha^5\, \alpha^6)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $\alpha^5 \neq 0$, тогда оператор примет вид: $(\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4 1\,\alpha^6)$.

При помощи автоморфизмов (11) и (12) подбирая $t_3 = \alpha^2; t_2 = -\alpha^1$ получаем $\tilde{\alpha}^1 = 0; \tilde{\alpha}^2 = 0$. Переобозначив $\tilde{\alpha}^1 = \alpha^1; \tilde{\alpha}^2 = \alpha^2$ можем упростить координаты, таким образом, оператор примет вид:

$\left(0 \quad 0 \quad \alpha^3 \quad \alpha^4 \quad 1 \quad \alpha^6\right)$.

2) $\alpha^5 = 0$, тогда $\left(\alpha^1 \quad \alpha^2 \quad \alpha^3 \quad \alpha^4 \quad 0 \quad \alpha^6\right)$. С помощью автоморфизмов (12),(13),(15) упростить нельзя.

2.1) $\alpha^5 = 0, \alpha^3 \neq 0 \Rightarrow \left(\alpha^1 \quad \alpha^2 \quad 1 \quad \alpha^4 \quad 0 \quad \alpha^6\right)$. Аналогично, при помощи автоморфизма (21) упрощаем координаты, таким образом:

$\left(\alpha^1 \quad 0 \quad 1 \quad \alpha^4 \quad 0 \quad \alpha^6\right)$.

2.2) При $\alpha^5 = \alpha^3 = 0, \alpha^2 \neq 0$, тогда $\left(\alpha^1 \quad \alpha^2 \quad 0 \quad \alpha^4 \quad 0 \quad \alpha^6\right)$. После упрощения имеет вид: $\left(0 \quad 1 \quad 0 \quad \alpha^4 \quad 0 \quad \alpha^6\right)$.

2.3) При $\alpha^5 = \alpha^3 = \alpha^2 = 0$, тогда $\left(\alpha^1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha^4 \quad 0 \quad \alpha^6\right)$.

Автоморфизмами упростить нельзя, поэтому рассмотрим следующие случаи:

1) $\alpha^5 = \alpha^3 = \alpha^2 = 0, \alpha^6 \neq 0 \Rightarrow \left(\alpha^1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha^4 \quad 0 \quad 1\right)$;

2) $\alpha^5 = \alpha^3 = \alpha^2 = \alpha^6 = 0, \alpha^4 \neq 0 \Rightarrow \left(\alpha^1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\right)$;

3) $\alpha^5 = \alpha^3 = \alpha^2 = \alpha^6 = \alpha^4 = 0, \alpha^1 \neq 0 \Rightarrow \left(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)$

Оптимальная система θ_1 одномерных подалгебр представлена в таблице №1.

№	Базис подалгебры
1	$\alpha^3 X_3 + \alpha^4 X_4 + X_5 + X_6 \alpha^6$
2	$\alpha^1 X_1 + X_3 + X_4 \alpha^4 + X_6 \alpha^6$
3	$X_2 + X_4 \ \alpha^4 + X_6 \alpha^6$
4	$\alpha^1 X_1 + X_4 \alpha^4 + X_6$
5	$\alpha^1 X_1 + X_4$
6	X_1

Таблица № 1

Теперь найдем оптимальную систему θ_2 двумерных подалгебр. Для этого поочередно выберем базисные векторы одномерных подалгебр и найдем второй приемлемый базисный вектор для двумерной алгебры. Тогда,

1.1) при $\beta^5 = 0$ и упрощая координаты с помощью автоморфизмов векторы примут вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 1 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ \beta^1 & \beta^2 & 0 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие подалгебры:

$$\begin{cases} H_1 = \alpha^1 X_1 + X_3 + \alpha^4 X_4 + \alpha^6 X_6 \\ H_2 = \beta^1 X_1 + \beta^2 X_2 + \beta^4 X_4 + \beta^6 X_6 \end{cases}.$$

$$[H_1, H_2] = [\alpha^1 X_1 + X_3 + \alpha^4 X_4 + \alpha^6 X_6, \beta^1 X_1 + \beta^2 X_2 + \beta^4 X_4 + \beta^6 X_6] =>$$

$$\alpha^1 [X_1, \beta^1 X_1 + \beta^2 X_2 + \beta^4 X_4 + \beta^6 X_6] + [X_4, \beta^1 X_1 + \beta^2 X_2 + \beta^4 X_4 + \beta^6 X_6] + \alpha^4 [X_4, \beta^1 X_1 + \beta^2 X_2 + \beta^4 X_4 + \beta^6 X_6] + \alpha^6 [X_6, \beta^1 X_1 + \beta^2 X_2 + \beta^4 X_4 + \beta^6 X_6].$$

Таким образом, $[H_1, H_2] = 0$ => является группой.

1.2) При $\beta^5 \neq 0$ $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 1 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^4 & 1 & \beta^6 \end{pmatrix}$.

Проверим условие подалгебры. Действуя аналогично получаем $[H_1, H_2] = -X_2$.

Условие не выполнено, отсюда следует оно не дает группы Ли, а значит не включаем в оптимальную систему.

Аналогично будем действовать при нахождении остальных подалгебр и проверять условие подалгебр. Тогда

1.3) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha^6 \\ \beta^1 & \beta^2 & 0 & 1 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

1.4) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 1 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

1.5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

1.6) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 1 & \alpha^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

2.1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ \beta^1 & 0 & \beta^3 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

2.2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & \beta^3 & \beta^4 & 1 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = X_1$.

2.3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ \beta^1 & 0 & 1 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

2.4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ 1 & 0 & 0 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

2.5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

2.6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

3.1) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \alpha^4 & 0 & 1 \\ \beta^1 & 0 & \beta^3 & \beta^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

3.2) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \alpha^4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^3 & \beta^4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

3.3) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \alpha^4 & 0 & 1 \\ \beta^1 & 0 & 1 & \beta^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

3.4) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

3.5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha^4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

4.1) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 & 0 & \beta^5 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

4.2) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^3 & 0 & 1 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

4.3) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta^1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

4.4) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

4.5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

4.6) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

5.1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 & \beta^5 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

5.2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^3 & \beta^4 & 1 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

5.3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

5.4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

5.5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

6.1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & \alpha^6 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

6.2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & \alpha^6 \\ \beta^1 & \beta^2 & 0 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = -\beta^2 X_1$. Тогда $\beta^2 = 0$ =>

6.2.1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & 0 \\ \beta^1 & 0 & 0 & \beta^4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 6.2.2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & 0 & 1 & \alpha^6 \\ \beta^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

6.2.3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & \alpha^6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha^4 & 1 & \alpha^6 \\ \beta^1 & 0 & 1 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = X_2$.

6.4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & \alpha^6 \\ 0 & 1 & 0 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

6.5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & \alpha^6 \\ 1 & 0 & 0 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

6.6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & 0 & 1 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta^6 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

6.7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^3 & \alpha^4 & 1 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $[H_1, H_2] = 0$.

Оптимальная система θ_2 двумерных подалгебр представлена в таблице №2.

№	Базис подалгебры	
1.1	$\alpha^1 X_1 + X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_2\beta^2 + X_4\beta^4 + X_6\beta^6$
1.2	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_4\beta^4 + X_5 + X_6\beta^6$
1.3	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_2\beta^2 + X_4 + X_6\beta^6$
1.4	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_2 + X_6\beta^6$
1.5	$X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_1 + X_6\beta^6$
1.6	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_4\alpha^4$	X_6
2.1	$X_2 + X_4\ \alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_3\beta^3 + X_4\beta^4 + X_6\beta^6$
2.2	$X_2 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_3\beta^3 + X_4\beta^4 + X_5 + X_6\beta^6$
2.3	$X_2 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_3 + X_4\beta^4 + X_6\beta^6$
2.4	$X_2 + X_4\ \alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_3 + X_4\beta^4 + X_6\beta^6$
2.5	$X_2 + X_6\alpha^6$	$X_4 + X_6\beta^6$
2.6	$X_2 + X_4\alpha^4$	X_6
3.1	$X_1\alpha^1 + X_4\ \alpha^4 + X_6$	$X_1\beta^1 + X_3\beta^3 + X_4\beta^4$
3.2	$X_1\alpha^1 + X_4\alpha^4 + X_6$	$X_3\beta^3 + X_4\beta^4 + X_5$
3.3	$X_1\alpha^1 + X_4\ \alpha^4 + X_6$	$X_1\beta^1 + X_3 + X_4\beta^4$
3.4	$X_1\alpha^1 + X_6$	$X_1\beta^1 + X_4$
3.5	$X_4\alpha^4 + X_6$	X_1
4.1	$X_1\alpha^1 + X_4$	$X_1\beta^1 + X_2\beta^2 + X_3\beta^3 + X_5\beta^5 + X_6\beta^6$
4.2	$X_1\alpha^1 + X_4$	$X_3\beta^3 + X_5 + X_6\beta^6$
4.3	$X_1\alpha^1 + X_4$	$X_1\beta^1 + X_3 + X_6\beta^6$
4.4	$X_1\alpha^1 + X_4$	$X_2 + X_6\beta^6$
4.5	X_4	$X_1 + X_6\beta^6$

4.6	$X_1\alpha^1+X_4$	X_6
5.1	X_1	$X_2\beta^2+X_3\beta^3+X_4\beta^4+X_5\beta^5+X_6\beta^6$
5.2	X_1	$X_3\beta^3+X_4\beta^4+X_5+X_6\beta^6$
5.3	X_1	$X_3+X_4\beta^4+X_6\beta^6$
5.4	X_1	$X_4+X_6\beta^6$
5.5	X_1	X_6
6.1	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1+X_2\beta^2+X_3\beta^3+X_4\beta^4+X_6\beta^6$
6.2.1	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1+X_4\beta^4+X_6$
6.2.2	$X_3\alpha^3+X_5+X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1+X_4$
6.2.3	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	X_1
6.3	$X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1+X_3+X_4\beta^4+X_6\beta^6$
6.4	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_2+X_4\beta^4+X_6\beta^6$
6.5	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_1+X_4\beta^4+X_6\beta^6$
6.6	$X_3\alpha^3+X_5+X_6\alpha^6$	$X_4+X_6\beta^6$
6.7	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5$	X_6

Таблица № 2

Найдем оптимальную систему θ_3 трехмерных подалгебр.

1.1) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 1 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ \beta^1 & \beta^2 & 0 & \beta^4 & 0 & \beta^6 \\ \gamma^1 & \gamma^2 & 0 & \gamma^4 & \gamma^5 & \gamma^6 \end{pmatrix}$

Проверим условие подалгебры:

1.2) $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 & 1 & \alpha^4 & 0 & \alpha^6 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^4 & 1 & \beta^6 \\ \gamma^1 & \gamma^2 & 0 & \gamma^4 & 0 & \gamma^6 \end{pmatrix}$

$[H_2H_3]=-\gamma^2X_1$.

$[A_{23}\alpha^1+C_{23}\gamma^1-\gamma^2)X_1+(C_{23}\gamma^2)X_2+A_{23}X_3+(A_{23}\alpha^4+B_{23}\beta^4+C_{23}\gamma^4)X_4+B_{23}X_5+$
$(A_{23}\alpha^6+B_{23}\beta^6+C_{23}\gamma^6)X_6$

Тогда запишем систему:

$\{A_{23}=0;\ B_{23}=0;\ C_{23}\gamma^1+\gamma^2=0\ C_{23}\gamma^2=0;\ C_{23}\gamma^4=0;\ C_{23}\gamma^5=0\}$

Полагая $C_{23}=0$ следует, что $\gamma^2=0$;

Далее, поступая аналогичным образом, проверяя условие подалгебр получаем оптимальную систему трёхмерных подалгебр (см. табл. №3).

№	Базис подалгебры		
1.1.1	$\alpha^1 X_1 + X_3 + X_4\alpha^4$	$X_1\beta^1 + X_2\beta^2 + X_4\beta^4$	$X_1\gamma^1 + X_2\gamma^2 + X_4\gamma^4 + X_6$
1.1.2	$\alpha^1 X_1 + X_3 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_2\beta^2 + X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1 + X_2\gamma^2 + X_4$
1.1.3	$\alpha^1 X_1 + X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_4\beta^4 + X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1 + X_2$
1.1.4	$X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_2\beta^2 + X_4\beta^4 + X_6\beta^6$	X_1
1.2.1	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_4\alpha^4$	$X_4\beta^4 + X_5$	$X_1\gamma^1 + X_4\gamma^4 + X_6$
1.2.2	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_6\alpha^6$	$X_5 + X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1 + X_4$
1.2.3	$X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_4\beta^4 + X_5 + X_6\beta^6$	X_1
1.3.1	$X_1\alpha^1 + X_3$	$X_1\beta^1 + X_2\beta^2 + X_4$	$X_1\gamma^1 + X_2\gamma^2 + X_6$
1.3.2	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_4 + X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1 + X_2$
1.3.3	$X_3 + X_6\alpha^6$	$X_2\beta^2 + X_4 + X_6\beta^6$	X_1
1.4.1	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_4\alpha^4$	X_2	$X_1\gamma^1 + X_4\gamma^4 + X_6$
1.4.2	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_6\alpha^6$	$X_2 + X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1 + X_4$
1.4.3	$X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_2 + X_6\beta^6$	X_1
1.5.1	$X_3 + X_4\alpha^4$	X_1	$X_2\gamma^2 + X_4\gamma^4 + X_6$
1.5.2	$X_3 + X_6\alpha^6$	$X_1 + X_6\beta^6$	$X_2\gamma^2 + X_4$
1.5.3	$X_3 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_1 + X_6\beta^6$	X_2
1.6.1	$X_1\alpha^1 + X_3$	X_6	$X_1\gamma^1 + X_2\gamma^2 + X_4$
1.6.2	$X_1\alpha^1 + X_3 + X_4\alpha^4$	X_6	$X_1\gamma^1 + X_2$
1.6.3	$X_3 + X_4\alpha^4$	X_6	X_1
2.1.1	$X_2 + X_4\alpha^4$	$X_3\beta^3 + X_4\beta^4 + X_5$	$X_1\gamma^1 + X_4\gamma^4 + X_6$
2.1.2	$X_2 + X_6\alpha^6$	$X_3\beta^3 + X_5 + X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1 + X_4$
2.1.3	$X_2 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_3\beta^3 + X_4\beta^4 + X_5 + X_6\beta^6$	X_1
2.2.1	$X_2 + X_4\alpha^4$	$X_1\beta^1 + X_3\beta^3 + X_4\beta^4 + X_5\beta^5$	$X_1\gamma^1 + X_4\gamma^4 + X_5\gamma^5 + X_6$
2.2.2	$X_2 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_3\beta^3 + X_4\beta^4 + X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1 + X_4\gamma^4 + X_5$
2.2.3	$X_2 + X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1 + X_3\beta^3 + X_5\beta^5 + X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1 + X_4$
2.2.4	$X_2 + X_4\alpha^4 + X_6\alpha^6$	$X_3\beta^3 + X_4\beta^4 + X_5\beta^5 + X_6\beta^6$	X_1
2.3.1	$X_2 + X_4\alpha^4$	$X_1\beta^1 + X_3 + X_4\beta^4$	$X_1\gamma^1 + X_4\gamma^4 + X_6$

2.3.2	$X_2+X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1+X_3+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_4$
2.3.3	$X_2+X_4\alpha^4+X_6\alpha^6$	$X_3+X_4\beta^4+X_6\beta^6$	X_1
2.4.1	$X_2+X_4\ \alpha^4$	$X_1+X_4\beta^4$	$X_4\gamma^4+X_6$
2.4.2	$X_2+X_6\alpha^6$	$X_1+X_6\beta^6$	X_4
2.5.1	X_2	X_4	$X_1\gamma^1+X_3\gamma^3+X_6$
2.5.2	$X_2+X_6\alpha^6$	$X_4+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_3$
2.5.3	$X_2+X_6\alpha^6$	$X_4+X_6\beta^6$	X_1
2.6.1	$X_2+X_4\alpha^4$	X_6	$X_1\gamma^1+X_3$
2.6.2	$X_2+X_4\alpha^4$	X_6	X_1
3.1.1	$X_1\alpha^1+X_6$	$X_3\beta^3+X_5$	$X_1\gamma^1+X_3\gamma^3+X_4$
3.1.2	$X_1\alpha^1+X_4\alpha^4+X_6$	$X_4\beta^4+X_5$	$X_1\gamma^1+X_3$
3.1.3	$X_4\alpha^4+X_6$	$X_3\beta^3+X_4\beta^4+X_5$	X_1
3.2.1	$X_1\alpha^1+X_6$	$X_1\beta^1+X_3$	$X_1\gamma^1+X_2\gamma^2+X_4$
3.2.2	$X_1\alpha^1+X_4\ \alpha^4+X_6$	$X_1\beta^1+X_3+X_4\beta^4$	$X_1\gamma^1+X_2$
3.2.3	$X_4\ \alpha^4+X_6$	$X_3+X_4\beta^4$	X_1
4.1.1	$X_1\alpha^1+X_4$	$X_1\beta^1+X_2\beta^2+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_2\gamma^2+X_3+X_6\gamma^6$
4.1.2	$X_1\alpha^1+X_4$	$X_1\beta^1+X_2\beta^2+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_2\gamma^2+X_6$
4.1.3	$X_1\alpha^1+X_4$	$X_1\beta^1+X_3\beta^3+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_2$
4.1.4	X_4	$X_3\beta^3+X_6\beta^6$	X_1
4.2.1	$X_1\alpha^1+X_4$	$X_3\beta^3+X_5$	$X_1\gamma^1+X_3\gamma^3+X_6$
4.2.2	$X_1\alpha^1+X_4$	$X_5+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_3$
4.2.3	X_4	$X_3\beta^3+X_5+X_6\beta^6$	X_1
4.3.1	$X_1\alpha^1+X_4$	X_2	$X_1\gamma^1+X_3\gamma^3+X_6$
4.3.2	$X_1\alpha^1+X_4$	$X_2+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_3$
4.3.3	X_4	$X_2+X_6\beta^6$	X_1
5.1.1	X_1	$X_2\beta^2+X_4\ \beta^4+X_5\beta^5+X_6\beta^6$	$X_2\gamma^2+X_3+X_4\gamma^4+X_6\gamma^6$
5.1.2	X_1	$X_3\beta^3+X_4\ \beta^4+X_5\beta^5+X_6\beta^6$	$X_2+X_4\gamma^4+X_6\gamma^6$
5.1.3	X_1	$X_2\beta^2+X_3\beta^3+X_5\beta^5+X_6\beta^6$	$X_4+X_6\gamma^6$
5.1.4	X_1	$X_2\beta^2+X_3\beta^3+X_4\beta^4+X_5\beta^5$	X_6
5.2.1	X_1	$X_4\ \beta^4+X_5+X_6\beta^6$	$X_3+X_4\gamma^4+X_6\gamma^6$
5.2.2	X_1	$X_3\beta^3+X_5+X_6\beta^6$	$X_4+X_6\gamma^6$
5.2.3	X_1	$X_3\beta^3+X_4\ \beta^4+X_5$	X_6
5.3.1	X_1	$X_2\beta^2+X_3$	$X_2\gamma^2+X_4+X_6\gamma^6$

5.3.2	X_1	$X_3+X_4\beta^4+X_6\beta^6$	$X_2+X_6\gamma^6$
5.3.3	X_1	$X_3+X_4\beta^4$	X_6
6.1.1	$X_3\alpha^3+X_5$	$X_1\beta^1+X_6$	$X_1\gamma^1+X_3\gamma^3+X_4$
6.1.2	$X_4\alpha^4+X_5$	$X_1\beta^1+X_4\beta^4+X_6$	$X_1\gamma^1+X_3$
6.1.3	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5$	$X_4\beta^4+X_6$	X_1
6.2.1	$X_4\alpha^4+X_5$	$X_1\beta^1+X_3+X_4\beta^4$	$X_1\gamma^1+X_4\gamma^4+X_6$
6.2.2	$X_5+X_6\alpha^6$	$X_1\beta^1+X_3+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_4$
6.2.3	$X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_1+X_4\beta^4+X_6\beta^6$	X_1
6.3.1	$X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_2+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_3$
6.3.2	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_2+X_4\beta^4+X_6\beta^6$	X_1
6.4.1	$X_3\alpha^3+X_5+X_6\alpha^6$	$X_2+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_4+X_6\gamma^6$
6.4.2	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5$	$X_2+X_4\beta^4$	$X_1\gamma^1+X_6$
6.4.3	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_2+X_4\beta^4+X_6\beta^6$	X_1
6.5.1	$X_3\alpha^3+X_5+X_6\alpha^6$	$X_1+X_6\beta^6$	$X_2\gamma^2+X_4+X_6\gamma^6$
6.5.2	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5$	$X_1+X_4\beta^4$	$X_2\gamma^2+X_6$
6.5.3	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5+X_6\alpha^6$	$X_1+X_4\beta^4+X_6\beta^6$	X_2
6.6.1	$X_3\alpha^3+X_5$	X_4	$X_1\gamma^1+X_2\gamma^2+X_6$
6.6.2	$X_3\alpha^3+X_5+X_6\alpha^6$	$X_4+X_6\beta^6$	$X_1\gamma^1+X_2$
6.6.3	$X_3\alpha^3+X_5+X_6\alpha^6$	$X_4+X_6\beta^6$	X_1
6.7.1	$X_3\alpha^3+X_5$	X_6	$X_1\gamma^1+X_2\gamma^2+X_4+X_6\gamma^6$
6.7.2	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5$	0	$X_1\gamma^1+X_2\gamma^2+X_6$
6.7.3	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5$	X_6	$X_1\gamma^1+X_2$
6.7.4	$X_3\alpha^3+X_4\alpha^4+X_5$	X_6	X_1

Таблица № 3

Инвариантное решение

Рассматривая подалгебру 3.2.1 из таблицы №3, найдём инварианты соответствующей ей группы и построим инвариантное решение ранга 1.

Универсальный инвариант имеет вид:

$$I = \left\{ \frac{z\gamma_2 - x}{\gamma_2}, ue^{\frac{(y\beta_1 - t)\gamma_2 + \gamma_1 x}{\gamma_2 \alpha_1}} \right\}.$$

Тогда решение можно представить в виде:

$$u(t,x,y,z) = e^{\frac{-(y\beta_1 - t)\gamma_2 - \gamma_1 x}{\alpha_1 \gamma_2}} f(\rho), \quad \rho = \frac{z\gamma_2 - x}{\gamma_2} \tag{16}$$

После подстановки в исходное уравнение (4) получаем фактор-уравнение:

$$(\alpha_1^3 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3\gamma_2^2) f_{\rho,\rho} + \gamma_1(2\alpha_1^2 + 2\alpha_1) f_\rho + ((\alpha_1\beta_1^2 - \alpha_1^2 + \beta_1^2)\gamma_2^2 + (\alpha_1 + 1)\gamma_1^2) f = 0 \tag{17}$$

После подстановки в (16) и решения этого выражения при константах $\alpha_1 = 1, \gamma_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_2 = 1$ инвариантное решение примет вид:

$$u(t,x,y,z) = e^t \left(e^{\frac{1}{3}\sqrt{3}(z-x)} + e^{-\frac{1}{3}\sqrt{3}(z-x)} \right) \tag{18}$$

Заключение

В ходе проведенной работы для исследуемого уравнения была найдена основная допускаемая группа Ли, построена алгебра этих операторов и оптимальная система одномерных, двухмерных и трехмерных подалгебр. Построено инвариантное решение ранга 1, которое позволяет сводить исходное уравнение к обычному дифференциальному уравнению.

Список литературы

1. Баренблатт Г.И., Желтое Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Приклад, математика и механика. 1960. Т. 24, 5. С. 58-73.
2. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer // Inst. Rech. Agronom. 1964. 3. С. 60-72.
3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
4. В.Е. Фёдоров, А.В. Панов, А.С. Карабаева «Симметрии одного класса квазилинейных уравнений псевдопараболического типа. Инвариантные решения» 91-97с.
5. Умаров Х.Г. Явный вид решения задачи Коши для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 2. С. 211–224.
6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений // М.: Наука, 1978. – 339 с.