Д.А. Андреева

Научный руководитель: Р.М. Нигматулин

Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

УДК 517.1

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДЕЛОВ

Аннотация. В статье рассматриваются способы решения математических задач повышенного уровня на построение графиков функций, заданных неэлементарно – с помощью пределов. Предложено решение обратной задачи: нахождение представления кусочно-заданной функции в виде предела.

Ключевые слова: функция, заданная с помощью предела, построение графика функции, исследование функций.

Построение и исследование графиков функций – одна из важных задач при обучении математике. Изучение графиков функций и их свойств продолжается на протяжении всего курса алгебры с 7 по 11 класс. Наиболее полно эта тема рассматривается в высших учебных заведениях при изучении математических дисциплин, в частности, математического анализа.

Трудоемкость процесса исследования и построения графика функции зависит от способа ее задания. В типовых задачах требуется исследовать функцию, заданную аналитически: формулой $y = f(x)$. Но существуют задачи на построение графиков функций, как правило, повышенного уровня сложности, которые встречаются в олимпиадах по высшей математике [1]. К ним относятся, например, задачи, в которых функция задана с помощью предела.

Для решения подобных задач необходимо исследовать предел в зависимости от значений x, а затем приступать к построению графика полученной кусочно-заданной функции. Решая задачу, нужно помнить основные пределы, которые связаны, в первую очередь, со свойствами показательной и степенной функций.

Рассмотрим наиболее важные пределы.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$.

При нахождении предела от x^n, рассматриваем промежуток $[0;+\infty)$. Поэтому получим

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1, \\ \infty, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}$.

При нахождении предела от x^{2n}, рассматриваем промежуток $(-\infty;+\infty)$, так как $(x^2)^n = x^{2n}$. Поэтому получим

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < 1, \\ 1, & \text{если } |x| = 1, \\ \infty, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Задания на построение графика или исследования функции, заданной с помощью предела, встречаются в задачниках по математическому анализу [2,3,4] и сборниках задач студенческих олимпиад [1]. Рассмотрим несколько примеров из классических сборников задач таких авторов, как Л.Д. Кудрявцев, Б.П. Демидович, Н.Я. Виленкин и др.

Пример 1 [5, §3 №2]. Построить график функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \geq 0$.

Для решения задачи необходимо рассмотреть следующие случаи:

1) Если $x = 0$, то $f(0) = 0$;

2) Если $x = 1$, то $f(1) = \frac{1}{2}$;

3) Если $0 < x < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ и $f(x) = 0$;

4) Если $x > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$ и $f(x) = 1$.

Функция претерпевает разрыв в точке $x = 1$.

Получаем кусочно-заданную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Теперь мы можем построить график (рис. 1).

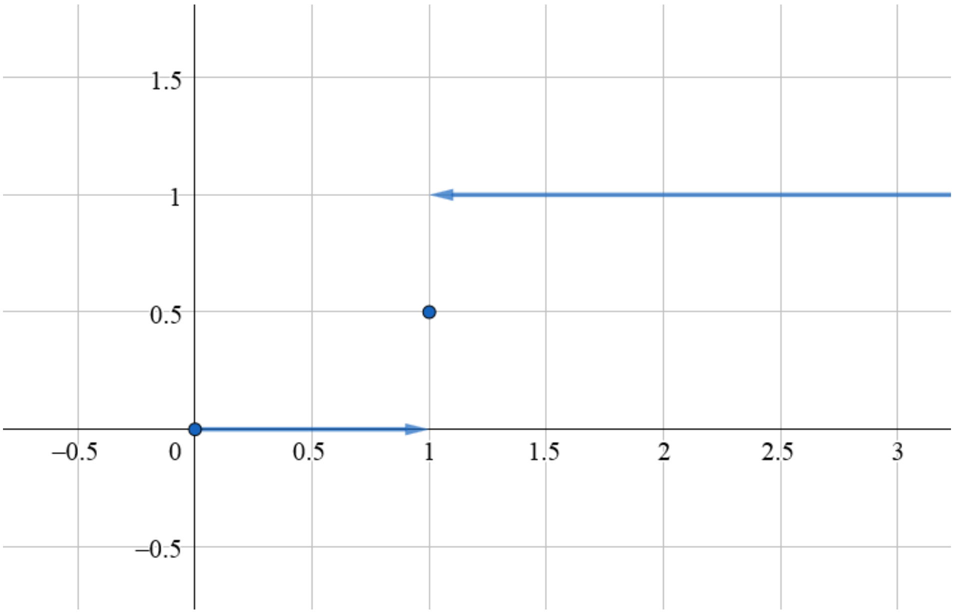

Рис. 1. График функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n},\ x \ge 0$

Пример 2 [3, №720]. Построить график функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n},\ x \ge 0.$

Для решения задачи необходимо рассмотреть следующие случаи:

1) Если $x = 0$, то $f(x) = 1$;
2) Если $x = 1$, то $f(1) = 1/2$;
3) Если $0 < x < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ и $f(x) = 1$;
4) Если $x > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$ и $f(x) = 0$.

Получаем кусочно-заданную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Теперь мы можем построить график (рис. 2).

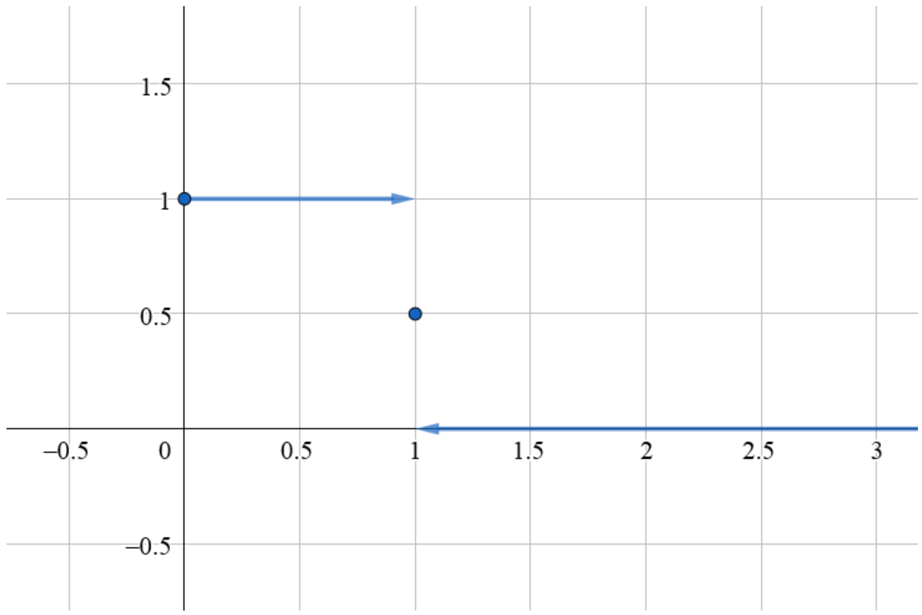

Рис. 2. График функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}, \ x \geq 0$

Пример 3 [4, §10 №64.7]. Построить график функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n}, \ x \geq 0.$

Для решения задачи необходимо рассмотреть следующие случаи:

1) Если $x = 0$, то $f(x) = 1$;
2) Если $x = 1$, то $f(1) = 1$;
3) Если $0 < x < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ и $f(x) = 1$;
4) Если $x > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$ и $f(x) = x$.

Получаем кусочно-заданную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Теперь мы можем построить график (рис. 3).

Показательные функции нечасто бывают задействованы в задачах о построении графика функции, заданной через предел. Мы составили свою задачу с использованием показательной функции и интересными особенностями графика.

Задача 1. Построить график функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^x \cdot x^{2n}+1}{x^{2n}+2^x}$.

Для решения задачи необходимо рассмотреть следующие случаи:

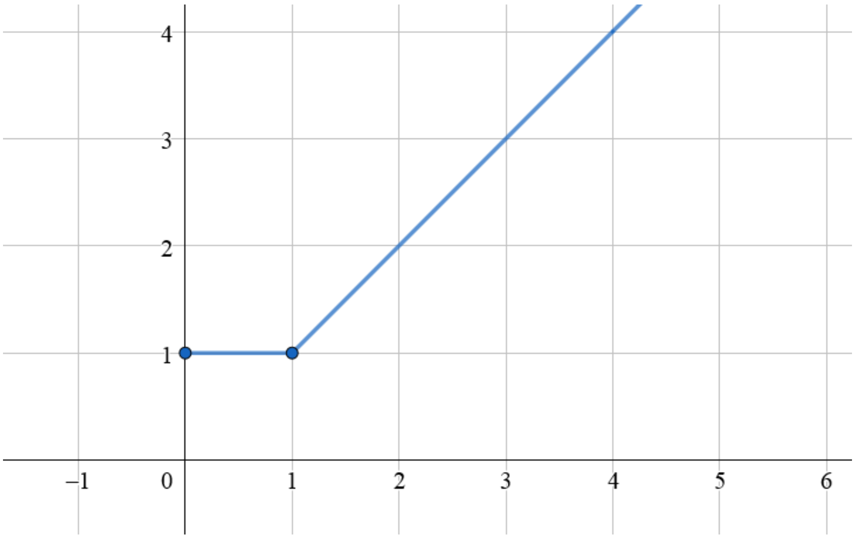

Рис. 3. График функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n},\ x \geq 0$

1) Если $|x| < 1$, то $f(x) = 2^{-x}$;
2) Если $|x| = 1$, то для $x = 1 \Rightarrow\ f(x) = 1$ и для $x = -1 \Rightarrow\ f(x) = 1$;
3) Если $|x| > 1$, то $f(x) = 2^x$.

Получаем кусочно-заданную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } |x| < 1, \\ 1, & \text{если } |x| = 1, \\ 2^x, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Теперь мы можем построить график (рис. 4).

Как и для многих математических задач, интересно рассмотреть обратную задачу: функцию, заданную кусочно, определить в виде предела. Рассмотрим один из вариантов этой задачи.

Задача 2. Пусть функция $F(x)$ задана кусочно (например, см. рис. 5)

$$F(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 < x < 1, \\ \varphi_2(x), & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Необходимо представить ее в виде предела.

Очевидно, что задача имеет различные решения. Для нахождения нужного предела могут быть использованы функции различных типов. Однако мы предлагаем найти решение, используя функции, рассмотренные ранее в примерах 1 и 2. Обозначим соответственно $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$ и $\beta(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

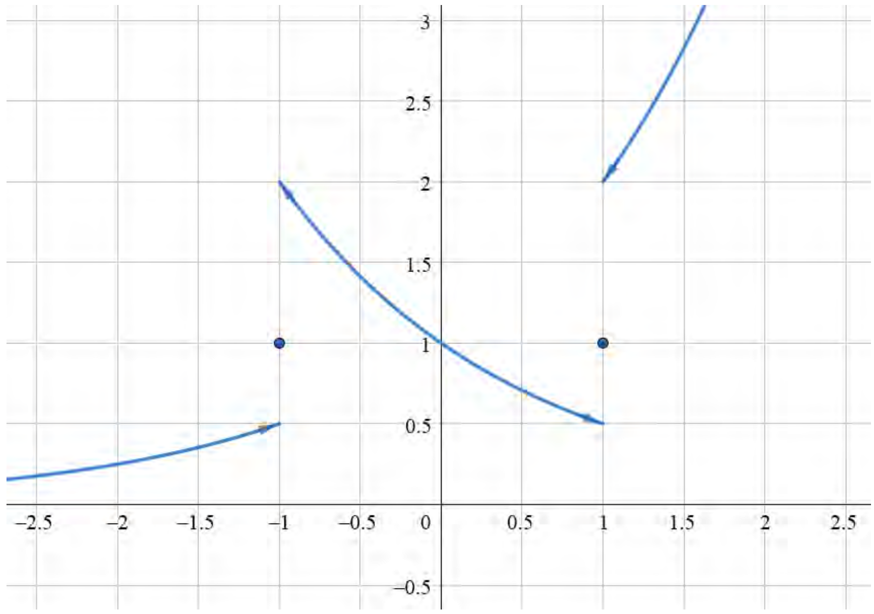

Рис. 4. График функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^x \cdot x^{2n}+1}{x^{2n}+2^x}$

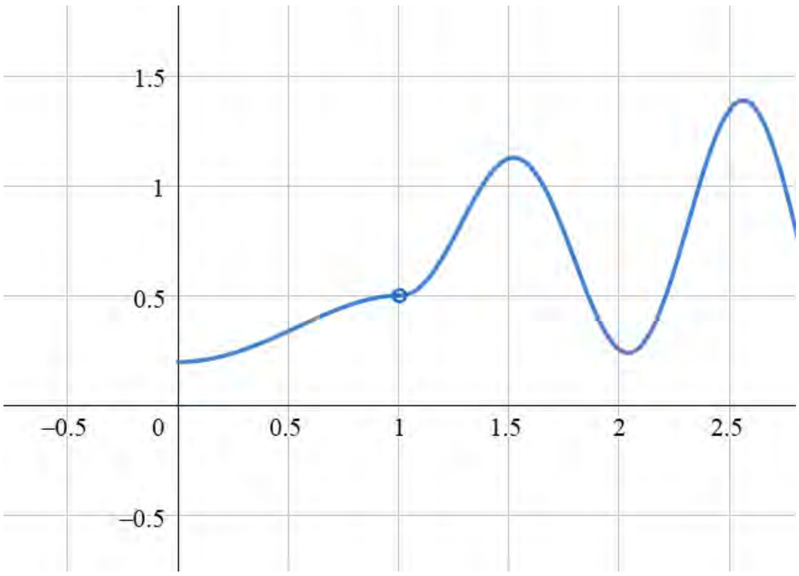

Рис. 5. График функции F(x)

Будем считать функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в некотором смысле «базисными» и выразим через них $F(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \varphi_1(x) \cdot \alpha(x) + \varphi_2(x) \cdot \beta(x)$$

Подставим вместо $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ их выражения через пределы. Получим:

$$F(x) = \varphi_1(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} + \varphi_2(x) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

Преобразуем выражение к одному пределу, используя соответствующие свойства. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ можно внести под знак предела, как константы, так как они не зависят от n. Получим:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\varphi_1(x)}{1+x^n} + \frac{\varphi_2(x) \cdot x^n}{1+x^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \cdot x^n}{1+x^n}.$$

Можно также рассмотреть функцию с точкой разрыва $x = a$:

$$F(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), 0 < x < a, \\ \varphi_2(x), a < x < +\infty. \end{cases}$$

В этом случае, сделав замену, $t = ax \Rightarrow x = \frac{t}{a}$, дальнейшие вычисления проводим аналогично.

В настоящее время, школьники и студенты часто используют компьютерные программы и другие приложения для решения математических задач, в том числе и для построения графиков. Можно ли с их помощью верно построить график функции, заданной через предел? Такие приложения как Photomath и Geogebra не могут решить эту задачу. При этом, предел при конкретном значении x будет вычислен верно.

База знаний и набор вычислительных алгоритмов Wolfram Alpha, зарекомендовавшая себя как надежная программа, разработанная для решения математических задач, также не может справиться с построением графика такой функции. На некоторых промежутках части графика изображаются верно. Рассмотрим несколько примеров (рис. 6-11).

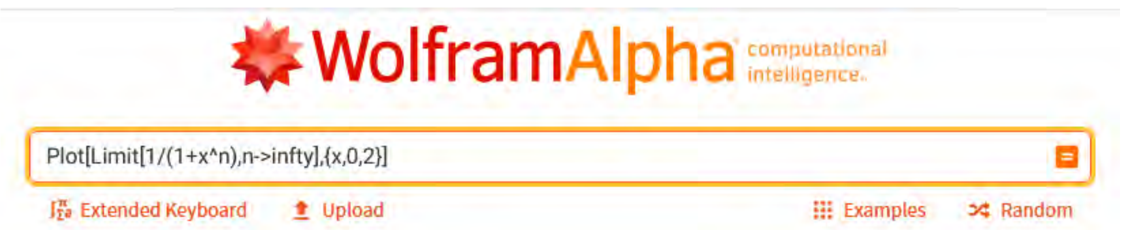

Рис. 6. Команды в Wolfram Alpha для построения графика из примера 1

Рис. 7. Изображение графика функции в Wolfram Alpha из примера 1

Рис. 8. Команды в Wolfram Alpha для построения графика из примера 2

Рис. 9. Изображение графика функции в Wolfram Alpha из примера 2

Рис. 10. Команды в Wolfram Alpha для построения графика из примера 3

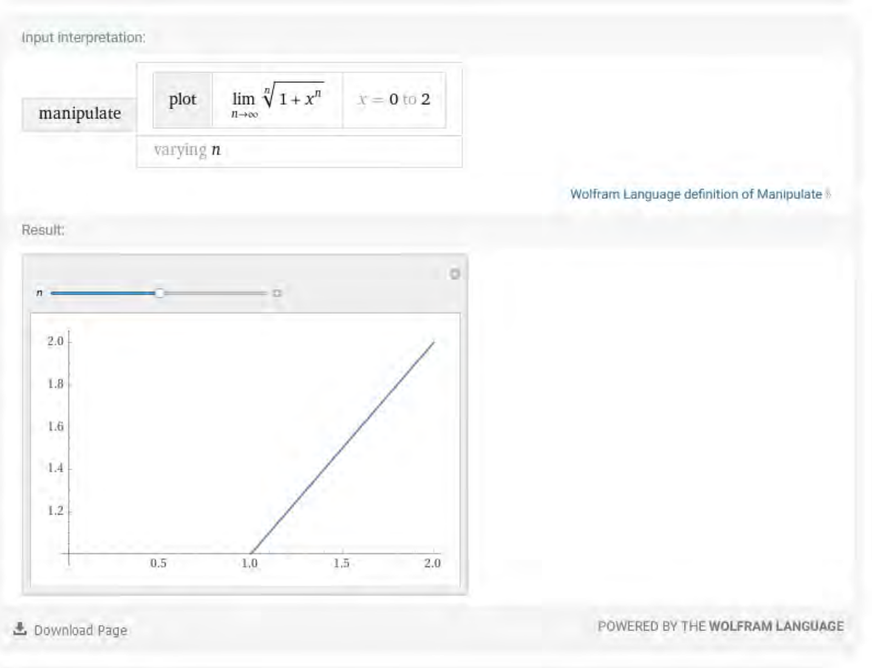

Рис. 11. Изображение графика функции в Wolfram Alpha из примера *3*

Таким образом, в общем случае компьютерные программы и приложения не способны верно построить график фукнции, заданной с помощью предела. Поэтому решение таких задач классическими методами математического анализа является, по-видимому, единственно возможным.

Решение и составление таких задач является важной составляющей в предметной подготовке будущего учителя математики. Это объясняется тем, что студенту для успешного решения таких задач необходимо знать понятие предела функции, его свойства и основные методы вычисления, а также понятие непрерывности функции; уметь использовать пределы для определения непрерывности функции и выявления точек разрыва. Кроме того, эти задачи демонстрируют будущему учителю математики достоинства, недостатки и границы применения ИКТ в обучении [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахматов В.М., Лисок А.Л., Тарбокова Т.В. Сборник олимпиадных задач по высшей математике: учеб. Пособие. Изд-во ТПУ, 2009. –144с.

2. Задачник по курсу математического анализа: учеб. пособие для студентов заочн. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов. Ч. 1 / Н.Я. Виленкин, К.А. Бохан, Н.А. Марон [и др.]. – М.: Изд-во «Просвещение», 1971. – 343 с.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. – 624 с.

4. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 496 с.

5. Райхмист Р.Б. Графики функций: справ. пособие для вузов / Р.Б. Райхмист. – М.: Высш. шк., 1991. – 160 с.

6. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю., Кипнис М.М. Особенности использования графических онлайн-калькуляторов в процессе математической подготовки бакалавров педагогического образования // Информатизация образования и методика электронного обучения. Материалы III Международной научной конференции. Сибирский федеральный университет. 2019. – С. 256-261.