В.А. Малыхин

Научный руководитель: Р.М. Нигматулин

Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

УДК 372.851

ФОРМИРОВАНИЕ НАВЫКОВ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. В статье обсуждается важная составляющая профессиональной подготовки будущего учителя математики – навыки исследовательской деятельности. На основе некоторых известных геометрических задач сформулированы и решены исследовательские задачи о последовательностях прямоугольников и квадратов, вписанных в данный треугольник. Составление и решение таких задач студентами с использованием динамической среды Geogebra формирует их навыки исследовательской деятельности необходимые в будущей профессиональной деятельности.

Ключевые слова: исследовательская деятельность студентов, подготовка будущих учителей математики, исследовательская задача.

Эффективная подготовка будущего учителя математики невозможна без формирования навыков исследовательской деятельности. Результативность организации и реализации такой деятельности в предметной подготовке существенно зависит от содержания, постановки и методов решения задач, с которыми будут сталкиваться студенты [1].

Вовлечение студентов в деятельность, направленную на самостоятельное составление и решение межпредметных исследовательских задач с использованием информационно-коммуникационных технологий (например, таких как GeoGebra), развивает инициативность и мотивирует их к самостоятельной поисковой и экспериментальной деятельности.

Важным моментом для мотивации студентов является знакомство с новыми современными публикациями и новыми результатами по проблеме исследования. Многие студенты зачастую теряют интерес к исследовательской деятельности, если полученные ими результаты уже известны более 1000 лет, а решение поставленных перед ними задач можно найти в Интернете.

Другим значимым моментом для успешного формирования навыков исследовательской деятельности является постепенное усложнение задач. Излишне сложные первоначальные задачи также могут снизить мотивацию к исследовательской деятельности, и, как следствие, навыки такой деятельности будут сформированы на низком уровне.

Для того чтобы обеспечить положительную динамику в работе студента необходимо обеспечить на начальном этапе простоту и наглядность в задачах. Можно начинать работу с самых часто встречающихся и хорошо изученных математических объектов.

Опишем опыт нашей работы по составлению и решению межпредметных исследовательских задач с использованием информационно-коммуникационных технологий.

На начальном этапе студенты знакомятся с задачами, которыми занимались математики еще с древних времен. Например, с такими, как задача Дидоны и задача Евклида (в данный треугольник ABC вписать параллелограмм $ADEF$ наибольшей площади) [2]. Выполняя информационный поиск, сравнение и анализ различных задач по этой теме, выясняется, что и в современной математике есть задачи (в том числе и нерешенные), связанные с наибольшими или наименьшими величинами, характеризующими какую-либо фигуру [3].

Для задач на «вырезание» или «вписывание» фигуры в фигуру очевидной становится их практическая направленность: интерес представляет, например, способы вырезания прямоугольника наибольшей площади из различных геометрических фигур. Теоретический интерес этого направления исследования подчеркивается наличием результатов, полученных в середине XX века. Немецким математиком Зюссом была доказана теорема о том, что в любую выпуклую фигуру можно вписать параллелограмм, площадь которого равна половине площади фигуры. Аналогичных результатов для вписанных в геометрические фигуры квадратов нет, поэтому многие вопросы остаются открытыми [4].

Рассмотрим исследовательские задачи, которые были нами самостоятельно сформулированы и решены.

Задача 1. Найти наибольшее значение отношения площадей квадратов, вписанных в прямоугольный треугольник с катетами a и b.

Решение. Очевидно, что вписать квадрат в прямоугольный треугольник можно двумя способами (см. рис. 1).

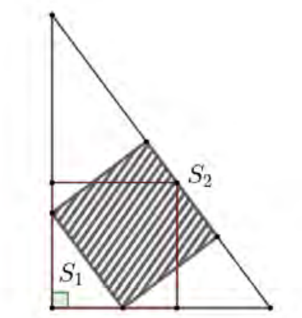

Рис. 1. Квадраты, вписанные в прямоугольный треугольник

Найдем площади для этих квадратов. Используя подобие треугольников (или координатный метод) можно получить следующие результаты. Для первого квадрата (рис. 1) получим $S_1 = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$, для второго квадрата (рис. 1) получим $S_2 = \left(\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+ab}\right)^2$, где a, b – катеты треугольника.

Для нахождения наибольшего значения отношения $\frac{S_1}{S_2}$ составим отношение:

$$r = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad a, b > 0.$$

Заметим, что при $a = b$ получим $r = \frac{a^2+a^2+a^2}{2a^2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Преобразуем r, разделив на ab числитель и знаменатель,

$$r = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}{\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{ab}}} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \cdot \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}}.$$

Сделаем замену $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = t$ (несложно проверить, что $t \geq 2$), тогда $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = t^2$. Получаем $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = t^2 - 2$. Тогда r можно рассмотреть как функцию от t:

$$r(t) = \frac{t^2 - 1}{t \cdot \sqrt{t^2 - 2}}.$$

Исследуем эту функцию при $t \geq 2$. Получаем

$$r'(t) = \frac{-2}{t^2\sqrt{(t^2-2)^3}}.$$

Следовательно, $r(t)$ монотонно убывает при $t \geq 2$ и $\max r(t) = r(2) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Тогда наибольшее отношение $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8}$. Таким образом, отношение площадей квадратов, вписанных в прямоугольный треугольник, удовлетворяет неравенству

$$\frac{S_1}{S_2} \leq \frac{9}{8}.$$

Этот результат является новым, он не встречался в изученной нами литературе или в Интернете.

Задача 2. Как из остроугольного треугольника вырезать квадрат наибольшей площади? Сколько различных способов решения этой задачи существует [3]?

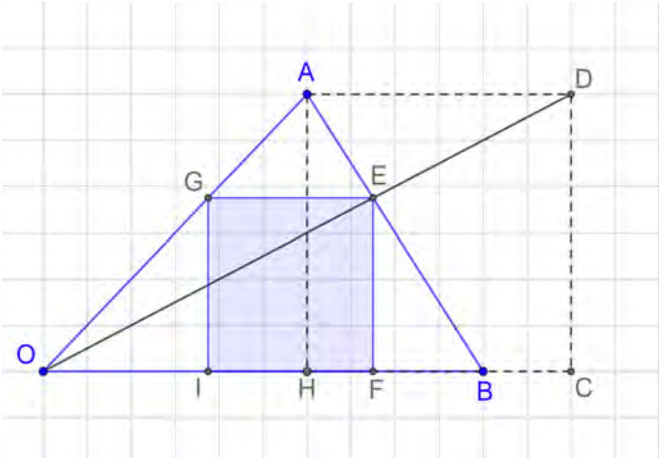

Рис. 2. Квадрат, вписанный в произвольный треугольник

Решение. Зададим остроугольный треугольник с вершинами O, A и B. Введем систему координат так, чтобы O – начало координат, ось абсцисс – OB. Проведем высоту AH (см. рис. 2). Тогда сторона $OH = \sqrt{a^2 - h^2}$. Далее получим

$$OD\colon y = \frac{h}{\sqrt{a^2-h^2}+h} \cdot x,\ AB\colon y = -\frac{h}{b-\sqrt{a^2-h^2}} \cdot (x-b)$$

Приравняем правые части уравнений и найдем из этого выражения x:

$$x = \frac{b\left(\sqrt{a^2-h^2}+h\right)}{b+h} \Rightarrow y^* = \frac{b \cdot h_b}{b+h_b}$$

Получаем три разных площади квадрата, лежащих на сторонах a, b и c

$$S_b = \left(\frac{b \cdot h_b}{b+h_b}\right)^2, S_a = \left(\frac{a \cdot h_a}{a+h_a}\right)^2, S_c = \left(\frac{c \cdot h_c}{c+h_c}\right)^2$$

Выразим из формул $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ произведение и подставим в формулу площади:

$$a \cdot h_a = 2S_\Delta \Rightarrow h_a = \frac{2S_\Delta}{a} \Rightarrow S_\square = \left(\frac{2S_\Delta}{a+h}\right)^2 = \left(\frac{2S_\Delta}{a+\frac{2S_\Delta}{a}}\right)^2$$

Определим, при каких значениях $x > 0$ выражение $x + \frac{2S}{x}$ будет наименьшим:

$$x + \frac{2S}{x} = \sqrt{2 \cdot S} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{2S}} + \frac{\sqrt{2S}}{x}\right) \geq 2\sqrt{2 \cdot S},$$

так как для любых положительных чисел x, y верно неравенство $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Причем, из равенства

$$\frac{x}{\sqrt{2S}}+\frac{\sqrt{2S}}{x}=2 \;\; \Longrightarrow x=\sqrt{2S}.$$

Найдем отношение площади такого квадрата к площади треугольника:

$$S_{\square} \le \left(\frac{2S_{\Delta}}{2\sqrt{2\cdot S_{\Delta}}}\right)^2=\frac{S_{\Delta}}{2}\Rightarrow \frac{S_{\square}}{S_{\Delta}}\le\frac{1}{2},$$

причем равенство достигается, когда сторона треугольника равна высоте, опущенной на эту сторону. Таким образом, в остроугольном треугольнике вписанный квадрат наибольшей площади нужно строить на меньшей стороне и его площадь не больше половины площади данного треугольника.

Задача 3. Какую часть площади треугольника занимает последовательность вписанных в него прямоугольников наибольшей площади (см. рис. 3)?

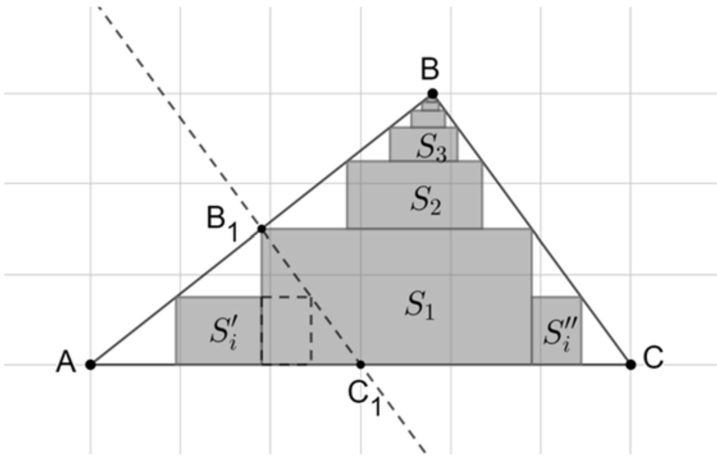

Рис. 3. Последовательность прямоугольников, вписанных в треугольник

Решение. Известно, что наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в треугольник равна половине площади этого треугольника т.е. $S_1=\frac{1}{2}S_{ABC}$ [5]. Рассмотрим последовательность $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ прямоугольников наибольшей площади, вписанных «вертикально» в данный треугольник (см. рис. 3). Выразим площади вписанных прямоугольников через площадь данного треугольника S_{Δ}. Очевидно, что коэффициент подобия соседних прямоугольников в этой последовательности равен $\frac{1}{2}$. Тогда

$$S_1=\frac{1}{2}S_{\Delta},\; S_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}S_{\Delta}\right),\; S_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}S_{\Delta}\right),\dots,\; S_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4^{n-1}}S_{\Delta}\right).$$

Следовательно, сумма площадей всех прямоугольников этой последовательности является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} S_i = \frac{S_\Delta}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots\right) = \frac{S_\Delta}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} S_\Delta.$$

Рассмотрим теперь аналогичные «горизонтальные» последовательности прямоугольников наибольшей площади, вписанные по направлению к вершинам A и C треугольника. Заметим, что $\Delta\, AB_1C_1$ и $\Delta\, ABC$ подобны и коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$. Заметим, что для $i \geq 2$ выполняется $S_i' + S_i'' = S_i$ (см. рис. 3). Тогда сумма площадей двух «горизонтальных» последовательностей будет равна:

$$\sum_{i=2}^{\infty} (S_i' + S_i'') = \sum_{i=2}^{\infty} S_i = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) S_\Delta = \frac{1}{6} S_\Delta$$

Таким образом, площадь, которую займут все последовательности прямоугольников наибольшей площади, вписанных в треугольник, равна:

$$\frac{2}{3} S_\Delta + \frac{1}{6} S_\Delta = \frac{5}{6} S_\Delta.$$

Задача 4. Рассмотрим последовательность квадратов, вписанных в прямоугольный треугольник (см. рис. 4). Какую часть площади треугольника занимает последовательность этих квадратов?

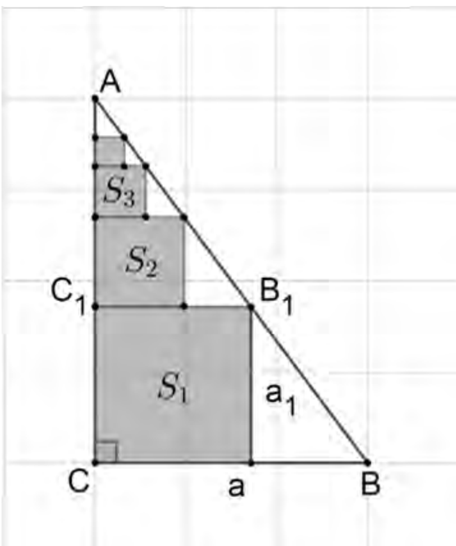

Рис. 4. Последовательность квадратов, вписанных в треугольник

Решение. Заметим, что сторона квадрата $a_1 = \frac{ab}{a+b}$ (см. рис. 4). Можно показать, что стороны вписанных квадратов можно задать рекуррентной формулой

$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n}$. Эта формула задает бесконечно убывающую геометрическую последовательность площадей квадратов $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ при $S_1 = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$ и $q = \frac{b}{a+b}$, очевидно, что $|q| < 1$. Найдем сумму площадей квадратов этой последовательности

$$S = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{b^2}{(a+b)^2}} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2-b^2} = \frac{a^2b^2}{a(a+2b)} = \frac{ab^2}{a+2b}.$$

Выясним, какую часть занимает площадь квадратов этой последовательности по отношению к площади данного прямоугольного треугольника? Так как $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, то отношение площади треугольника к площади последовательности квадратов: $\frac{S_{ABC}}{S} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{a+2b}{ab^2} = 1 + \frac{a}{2b}$.

Итак, мы установили, что последовательность квадратов вписанных в прямоугольный треугольник является бесконечно убывающей геометрической прогрессией и отношение занимаемой этой последовательностью площади внутри прямоугольного треугольника к площади самого прямоугольного треугольника равно $\frac{a}{2b} + 1$ и не превосходит $\frac{3}{2}$ для $a \leq b$ [6].

Таким образом, опыт нашей работы по составлению и решению представленных исследовательских задач позволяет утверждать, что такая деятельность способствует формированию у студентов навыков исследовательской деятельности, необходимой для их будущей профессиональной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Использование системы динамической геометрии Geogebra для организации исследовательской деятельности бакалавров педагогического

образования в курсе геометрии / Р.М. Нигматулин, Е.В. Мартынова // Материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева. 2019. С. 193-197.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 432 с.

3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Экстремальные задачи по геометрии. М.: Чистые пруды, 2007. 32 с.

4. Über Parallelogramme und Rechtecke, die sich ebenen Eibereichen einbeschreiben lassen / Suss W. // Rend. Mat. e Appl. 1955. Bd (5)14. S. 338-341.

5. Информация о задаче 109031 // Задачи problems.ru URL: https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=109031 (дата обращения: 28.5.2021).

6. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970. 336 с.