К.В. Шишлина, О.Н. Бердюгина

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 372.851

РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ

Аннотация. В статье рассматривается роль чертежа при решении геометрических задач, а также затрагивается проблема обучения учащихся решению планиметрических задач методом дополнительных построений, представлена классификация дополнительных построений на плоскости по основанию виду геометрических фигур.

Ключевые слова: учащиеся, геометрия, планиметрия, чертеж, планиметрическая задача, метод дополнительных построений.

Одной из значимых задач школьного математического образования является мобилизация внимания учащихся к изучению геометрии. Анализ результатов решения геометрических задач в государственной итоговой аттестации показывает, что учащиеся зачастую с трудом справляются с данными задачами. Действительно, статистические данные Тюменской области по результатам ЕГЭ по математике (профильного уровня) за 2020 г. показывают: в среднем с планиметрической задачей (задача № 16) на максимальный балл (3 балла) справилось 1,15% учащихся, 2 балла – 0,28%, 1 балл – 7,25%.

В геометрии решение задач является одним из важнейших инструментов формирования у учащихся качеств, присущих творческой личности. Уметь решать задачи – это не только владение теоретическим материалом, но и умение самостоятельно находить способ ее решения и осуществлять его.

Решить задачу значит найти соотношение между тем что дано в задаче и что необходимо найти. В некоторых задачах эта связь очевидна, и для решения задачи лишь требуется произвести определенные операции с использованием конкретных формул. В других же задачах, в которых связь не так явна, требуется либо выбор способа решения, либо использование ряда теорем или определений, применение которых, приводит к решению задачи.

При решении геометрических задач важную роль играет правильно построенный чертеж к задаче, акцентирует внимание в своих работах В.А. Далингер. В исследованиях Е.В. Кондратьевой отмечается, что работать с чертежом значит: уметь анализировать чертеж с разных точек зрения, уметь осуществлять верный выбор фигур, необходимых для решения задачи, уметь построить различные дополнительные линии, которые не загромождают чертеж, а позволяют рационально решить задачу. В свою очередь неумение работать с чертежом приводит к ошибочным выводам или рассмотрению частных случаев решения.

Интерес к геометрическим задачам как к средству обучения учащихся прослеживается в методических исследованиях (Далингер В.А., Саранцев Г.И., Якиманская И.С. и др.). В научной литературе геометрические задачи допускают классификацию по различным основаниям. Так, например, в качестве основания можно рассмотреть метод решения (векторный, координатный и т.д.). Отдельным классом, в таком случае, можно выделить задачи, при решении которых необходимо использовать различные преобразования. К таким задачам Далингер В.А. относит те из них, которые решаются методами геометрических преобразований, геометрических мест точек, а также с использованием дополнительных построений.

В работах Герасимовой А.Д., Готмана Э.Г., Кондратьевой Е.В., Устниковой Т.В., Шилинец В.А. и других, рассматриваются основные аспекты применения дополнительных построений при решении задач. Авторы отмечают, что, решая задачи методом дополнительных построений, чертеж представляет собой, в большинстве случаев, сочетание геометрических фигур. При этом, для того, чтобы решить задачу с помощью дополнительных построений, необходимо проводить анализ чертежа на необходимость его дополнения. Следовательно, если имеющих фактов не хватает для решения задачи, то нужно преобразовывать чертеж путем проведения новых линий, а в заключении выполнить вторичный анализ для того, чтобы получить конечный результат. Вследствие систематического использования такого приема у учащихся формируется умение читать чертеж, что позволяет им верно выстроить ход решения задачи.

Анализ учебников по геометрии показал, что школьникам в процессе обучения встречаются множество задач, при решении которых возможно использование дополнительных построений. Однако, собственный школьный опыт и анализ педагогического опыта показывает, что при решении таких задач учащиеся сталкиваются с трудностями или решают шаблонными методами. Это объясняется учителями-методистами тем, что умение применять дополнительные построения к чертежу у учащихся формируется неосознанно, вследствие чего, данный метод не востребован среди них.

Таким образом, ставится проблема, как встроить инструменты дополнительных построений в обучение учащихся решению планиметрических задач.

Отметим, что в отличие от шаблонного решения задачи чертеж является основным инструментом при ее решении. Это и определяет главную идеи метода дополнительных построений. При этом он дополняется новыми, необходимыми вспомогательными элементами. В следствие чего, на чертеже вводятся новые объекты (углы, отрезки), и возникают геометрические фигуры, способствующие рациональному решению задачи.

Дополнительные построения дают возможность:

- для создания новых фигур, это позволяет применять теоремы, признаки и свойства, связанные с ними, при решении задач;
- для создания подобных фигур;
- для создания пропорциональных элементов.

Бывает, что в условии задачи дается подсказка на определенное дополнительное построение, но зачастую заметить необходимое построение могут не все учащиеся. Однако есть вполне классические дополнительные построения, которые можно разобрать с учащимися и выполнение которых облегчит решение геометрических задач.

Например,

1. Если по условию задачи в треугольнике дана медиана, то треугольник можно достроить до параллелограмма (рис. 1). В результате построения образуются равные треугольники. Исходя из условий в задаче данное построение можно выполняется для одной, двух или даже трех медиан. Рассматривать можно как весь параллелограмм ABA_2C, так и его часть, например, $\triangle ABA_2$ или $\triangle ACA_2$.

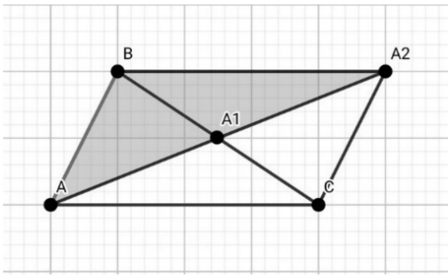


Рис. 1. Удвоение медианы

2. Если по условию задачи дан прямоугольный треугольник, то его можно достроить до равнобедренного треугольника (рис. 2). В полученном треугольнике один из катетов будет высотой, биссектрисой, медианой, а другой будет являться половиной основания.

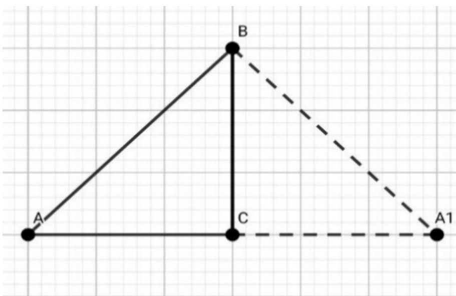


Рис. 2. Дополнительное построение в прямоугольном треугольнике

3. Если по условию задачи в произвольном треугольнике задана определенная трансверсаль (отрезок прямой, проходящий через вершину треугольника и заключенный внутри него), то через ее конец, отличный от вершины, внутрь треугольника проводится прямая, параллельная стороне, до пересечения с другой стороной (рис. 3). В результате такого дополнительного

построения получаем, что $\Delta\ A_2A_1C$ и $\Delta\ ABC$ подобны по первому признаку подобия: равенство двух углов, $\angle A_1A_2C = \angle BAC$, при $AB \| A_2A_1$ и секущей AC, $\angle A_2A_1C = \angle ABC$, при $AB \| A_2A_1$ и секущей BC. Отметим, что если трансверсаль является медианой , то получаются равные отрезки (AA_1 – медиана, $AA_2 = A_2C$).

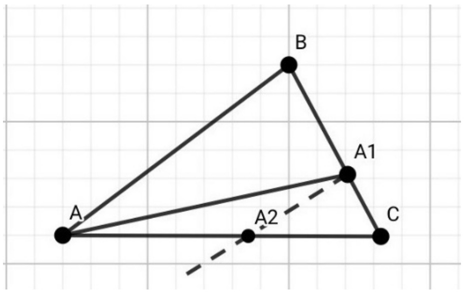


Рис. 3. Дополнительное построение в произвольном треугольнике

4. Если по условию задачи в произвольном треугольнике задана медиана и трансверсаль, проходящие через разные вершины, то через основание медианы внутрь треугольника проводится прямая, параллельная данной трансверсали, до пересечения со стороной треугольника (рис. 4). В результате данного построения получаем параллельные прямые, которые отсекают на секущих пропорциональные отрезки. При этом возможно два случая:

1) $\angle ACB$ и секущие $A_1A_2 \| BB_1$, тогда $AB_1 = B_1C$;

2) $\angle A_1AC$ и секущие $MB_1 \| A_1A_2$, где M = точка пересечения прямых AA_1 и BB_1, тогда получаем пропорциональные отрезки:

$$\frac{|AM|}{|AB_1|} = \frac{|MA_1|}{|B_1A_2|}.$$

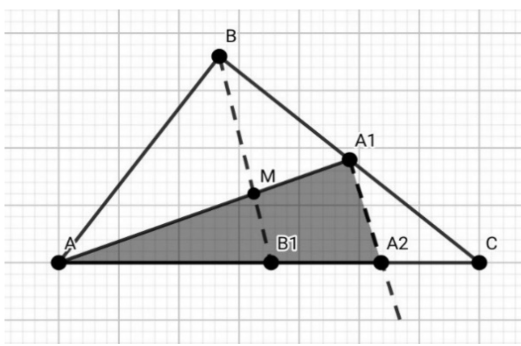


Рис. 4. Дополнительное построение в произвольном треугольник

5. Если по условию задачи в произвольном треугольнике дана биссектриса одного из внутренних углов, то в треугольнике можно достроить ромб, так что AB || C_1A_1 и AC || B_1A_1 (рис. 5). Заданная биссектриса в полученном ромбе является будет является одной из диагоналей.

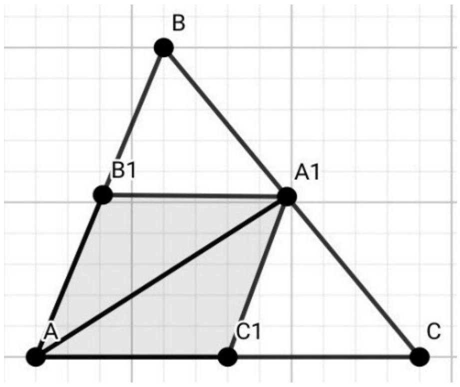


Рис. 5. Дополнительное построение в произвольном треугольнике

6. Если по условию задачи задана произвольная трапеция, то в трапеции можно провести высоты (рис. 6). Тогда по построению получаем два прямоугольных треугольника △AHB и △CKD и прямоугольник HBCK.

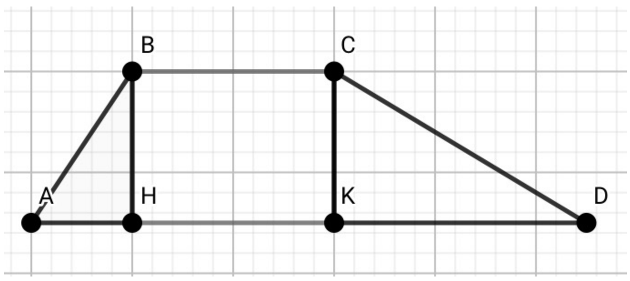
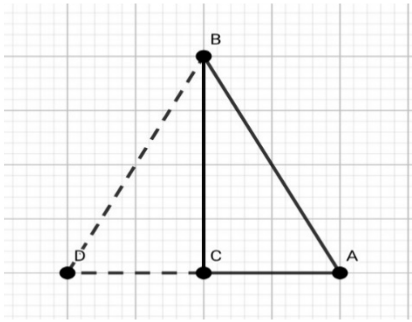


Рис. 6. Дополнительное построение в произвольной трапеции

Продемонстрировать механизм использования метода дополнительных построений возможно на задачах из учебников по геометрии Атанасяна Л.С. [1] и Готмана Э.Г. [4].

Задача №1. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то он противолежит углу, равному 30° [1].



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90^o$,

$AC = \frac{1}{2}AB$

Доказать, что $\angle B = 30^o$

Рис. 7. Условие задачи № 1

Доказательство:

1. Выполним дополнительное построение: достроим треугольник ABC до равнобедренного, так что на продолжении катета AC построим точку C, DC = CA.

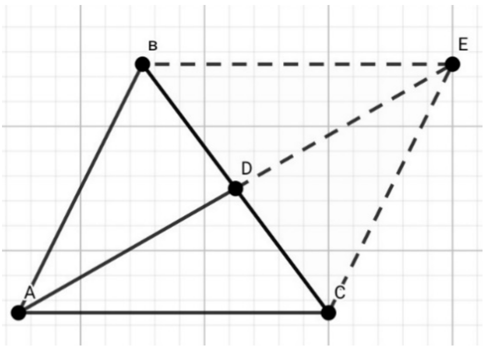
2. $\Delta DBC = \Delta ABC$ (по двум катетам), значит, AB = BD и $\angle ABC = \angle DBC$.

3. $AC = \frac{1}{2}AB$, $AC = \frac{1}{2}AD$(по условию), значит, AB = DA.

4. AB = AD = BD, откуда $\angle A = \angle D = \angle DBA = 60^\circ$.

5. $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle DBC = \angle ABC$, получаем, что $\angle ABC = 30^\circ$, ч.т.д.

Задача №2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 4, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3. Найдите основание [4].



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный,

AB = AC = 4

AD – медиана, AD = 3

Найти: BC

Рис. 8. Условие задачи № 2

Доказательство:

1. Выполним дополнительное построение: DE, так чтобы AD=DE=3 и $E \in AD$.

2. По построению ABEC – параллелограмм (по признаку параллелограмма).

3. Значит по теореме о диагоналях параллелограмма получаем:

$AE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$,

$4^2 + 6^2 = 2(4^2 + AC^2)$,

$AC^2 = 10$,

$AC = \sqrt{10}.$

Ответ: $\sqrt{10}.$

Отметим, что метод дополнительных построений один из результативных и эффективных методов при решении планиметрических задач. Данный метод является трудным, поскольку для построения грамотного и рабочего чертежа необходимы знания дополнительных построений и практика решения задач. Зная различные дополнительные построения и способ их применение, решать геометрическую задачу становится проще, ведь на чертеже появляются другие фигуры, свойства которых нам известны. Кроме того, данному методу необходимо обучать, чтобы в дальнейшем при доказательстве теорем и решении задач, учащиеся могли предлагать свои идеи применения дополнительных построений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л.С. Геометрия, 7-9: учебник для общеобразоват. учреждений. – 11-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2001. – 384 с.
2. Герасимовой А.Д. Формирование творческого воображения учащихся в процессе поиска решения планиметрических задач, требующих дополнительных построений, 1994. – 261 с.
3. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения. – М.: Просвещение, 1996.
4. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные. – Киев: Рад. шк., 1988. – 173 с. (Сер. «Когда сделаны уроки»).
5. Кондратьевой Е.В. Формирование умения решать задачи с помощью дополнительных построений у учащихся 7-9 классов, 2006. – 155 с.
6. Шилинец В.А. Дополнительные построения при решении планиметрических задач, 2014. – 15 с.