

Алексей Сергеевич ШЛЯПКИН¹
Алексей Викторович ТАТОСОВ²

УДК 501.1, 622.276.66

О ПРОВЕДЕНИИ ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕННОЙ НА ПРОППАНТЕ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

¹ ведущий специалист отдела моделирования
третичных методов повышения нефтеотдачи пластов,
Филиал ООО «Лукойл-Инжиниринг»
«КогалымНИПИнефть» в г. Тюмени
ShlyapkinAS@lukoil.tmn.ru

² доктор физико-математических наук, профессор
кафедры фундаментальной математики и механики,
Институт математики и компьютерных наук,
Тюменский государственный университет
atatosov@utmn.ru

Аннотация

Совершенствование технологий и рост количества проводимых мероприятий, связанных с гидроразрывом пласта, повышают требования к скорости и качеству инженерного сопровождения. Для проектирования ГРП (составления дизайна) существуют специализированные программные продукты — симуляторы ГРП, в основе которых заложены математические модели различной размерности.

Учет влияния фильтрационных утечек в пласт, поведения частиц проппанта в трещине в значительной степени определяют форму трещины разрыва. В модельном представлении указанные факторы учитываются, однако требуют уточнения для увеличения

Цитирование: Шляпкин А. С. О проведении экспресс-оценки геометрических параметров закрепленной на проппанте трещины гидроразрыва пласта методами математического моделирования / А. С. Шляпкин, А. В. Татосов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Том 6. № 3 (23). С. 79-92.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-79-92

качества прогноза и оценки продуктивности трещины, что определяет актуальность данного направления изучения.

В настоящей работе предложен анализ, позволяющий оперативно оценить геометрические параметры трещины при изменении технологических параметров и свойств жидкости разрыва.

В основу представленной математической модели положена одномерная математическая модель в РКН-представлении (модель Перкинса — Керна — Нордгрена).

Все расчеты, представленные в настоящей работе, выполнены с использованием сертифицированного программного комплекса TSH Frac, предназначенного для моделирования геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта.

Результаты проведенного исследования могут быть использованы в инженерной практике при осуществлении экспресс-оценки геометрических параметров трещины гидроразрыва. Последующая настройка и корректировка модели может осуществляться при получении дополнительной информации при проведении тестовых закачек малого объема в исследуемой скважине.

Ключевые слова

Гидроразрыв пласта, трещина гидроразрыва, проппант, фильтрационные утечки, математическая модель.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-79-92

Введение

Целью настоящей работы является проведение вычислительного эксперимента для определения качественного влияния параметров жидкости разрыва, свойств породы, режимов закачки и иных на поведение трещины гидроразрыва и ее остаточную форму.

В работе рассматривается процесс формирования трещины гидроразрыва пласта, закрепленной на проппанте. Предполагается, что трещина развивается вертикально. Поскольку развитие трещины происходит в направлении, ортогональном минимальному напряжению в породе, то в данном исследовании приводятся результаты для трещин разрыва, инициированных на значительной глубине.

Методы

В данном разделе приведена математическая постановка задачи и основные допущения, принятые в работе.

Высота трещины в предположении значительно меньше ее длины [1, 2]: $\delta \ll h \ll L$, где δ — средняя ширина трещины, м; h, L — длина и высота трещины соответственно, м. Указанные ограничения на линейные размеры трещины справедливы для модели Перкинса — Керна — Нордгрена (далее — РКН-модель), изображенной на рис. 1. Задача рассматривается в одномерной постановке [6].

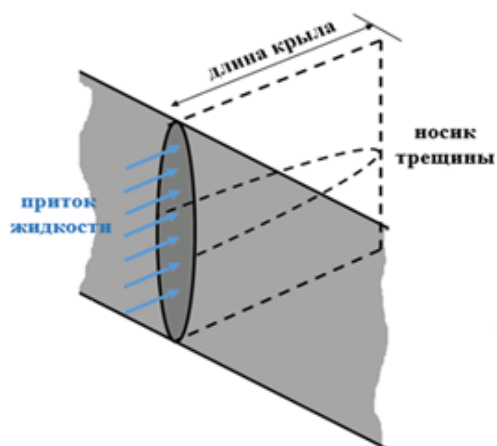


Рис. 1. Схематическое представление задачи в PKN-постановке

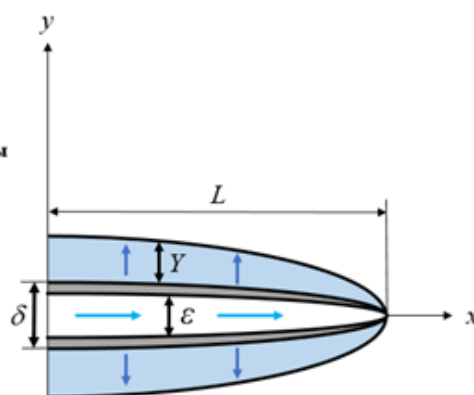


Fig. 1. A schematic presentation of the task in the PKN-formulation

На рис. 1 приняты следующие обозначения: δ — средняя ширина трещины, м; ε — ширина свободной от осадка области трещины, в которой осуществляется движение частиц вдоль направления роста трещины, м; Y — глубина зоны пропитки, м. Под осадком будем понимать скопившийся в донной части трещины объем частиц.

Основные допущения в рассматриваемой модели:

- жидкость разрыва проникает в пласт по нормали к плоскости трещины со скоростью v ;
- для описания утечек в пласт вводится функциональная связь избыточного давления жидкости разрыва в породе со скоростью проникновения v и физической скоростью потока v_r . Подробный вывод уравнения представлен в работе [6];
- скорость движения жидкости и взвешенных частиц в продольном направлении будем считать одинаковой и равной u , при этом поступательный поток вещества происходит только по свободной от осадка области ε . Задача имеет решение, пока существует свободная от осадка область, иначе трещина полностью перекрывается проппантом.

С учетом описанных выше предположений запишем полную систему уравнений (1), описывающую процесс формирования трещины гидроразрыва [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} &= -2v, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} &= -\frac{2}{1-\alpha}v - \frac{\alpha}{1-\alpha}w, \\ \frac{\partial(\alpha \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \varepsilon u)}{\partial x} &= -\frac{2\alpha}{1-\alpha}v - \frac{\alpha}{1-\alpha}w, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u = -\frac{b}{12\eta_\alpha} \varepsilon^2 \frac{\partial \delta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{v}{\beta}, \quad (1)$$

$$p = b\delta, \quad b = \frac{4\mu_\sigma}{\pi(1-\nu_\sigma)h}; \quad v = \begin{cases} v_n, & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon = 0 \end{cases}, \quad w = \begin{cases} \frac{\delta}{h} w_g, & \varepsilon > 0; \\ 0, & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$v_n = \frac{kb\delta}{\eta Y}; \quad w_g = \frac{(1-\alpha_*\alpha)\eta}{\eta_\alpha} w_{g0}, \quad w_{g0} = \frac{2(\rho_p - \rho_l)gr^2}{9\eta}, \quad \eta_\alpha = \eta(1-\alpha)^{-m}.$$

Параметры v и w отличны от нуля лишь в области ε , свободной от осадка.

Условные обозначения: v — скорость фильтрации, м/с; u — средняя продольная скорость потока, м/с; w_g — скорость падения взвешенных частиц смеси, м/с; $\alpha = \alpha_2 / \alpha_*$ — объемное содержание проппанта, д. ед.; α_2 — объемное содержание дисперсной фазы в подаваемой смеси, д. ед.; α_* — предельное объемное содержание дисперсной фазы, д. ед.; η_α — вязкость подаваемой смеси, Па·с; β — объемное содержание жидкости гидроразрыва в пласте, д. ед.; k — величина проницаемости породы, мкм²; ν_σ — коэффициент Пуассона, безразмерный; μ_σ — модуль сдвига материала, Па, который связан с модулем Юнга; p — избыточное давление в трещине, Па; h — высота трещины, м; ρ_p и ρ_l — плотности частиц проппанта и жидкости гидроразрыва соответственно, кг/м³; r — радиус частиц, м; g — ускорение свободного падения, м/с². Параметры α_* , m — постоянные, величины, в данном случае примем их значения 0,66 и 1,82 соответственно.

Система (1) дополняется граничным условием на носике трещины:

$$x = L(t): \quad \delta = 0, \quad (2)$$

что соответствует нулевому раскрытию, а также граничным условиям на входе в трещину. В рассматриваемой задаче осуществляется проведение процесса гидроразрыва с постоянным расходом жидкости на входе:

$$q(0, t) = \varepsilon(0, t) u(0, t) = \frac{Q(t)}{2h}, \quad \alpha(0, t) = A(t). \quad (3)$$

Результаты

На этапе прогнозирования (перед проведением ГРП) важно понимать влияние свойств системы на успешность проводимого мероприятия. Часть факторов в процессе проведения ГРП можно контролировать, а именно: технологические параметры закачки, конструкцию скважины, свойства закачиваемой жидкости. Другие факторы являются неконтролируемыми, поэтому важно их учитывать

априорно на этапе составления прогноза (дизайна ГРП). К ним относятся: свойства горной породы (фильтрационно-емкостные (далее — ФЕС)), геомеханические параметры горной породы, свойства пластовых флюидов.

Переходя ко второй группе факторов, рассмотрим влияние свойств породы на геометрию трещины. Запишем уравнение Итона для расчета эффективного напряжения смыкания трещины, которое широко используется в инженерной практике [9]. Уравнение записано с целью обозначения функциональной зависимости величин.

$$S_h = \frac{\nu_\sigma}{1 - \nu_\sigma} (S_v - p_p) + p_p, \quad (4)$$

где S_h — минимальный горизонтальный стресс, Па; S_v — абсолютный вертикальный стресс, Па; p_p — поровое давление в пласте, Па.

В качестве базовой жидкости разрыва рассматривается линейный гель с вязкостью $4 \cdot 10^{-2}$ Па·с. Смесь закачивается в пласт, проницаемость которого равна $1,5 \cdot 10^{-3}$ мкм², скорость закачки — 2 м³/мин. Указанные значения параметров в последующих расчетах будем считать базовыми.

Все расчеты, представленные в настоящей работе, выполнены с использованием сертифицированного программного комплекса TSH Frac [7], основанного на системе (1) и предназначенного для моделирования геометрических параметров гидроразрыва пласта (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020619401 от 17.08.2020 [7]).

Численное решение системы уравнений (1) [1, 2, 4, 5] определит форму трещины. Исходные значения во всех рассмотренных примерах для базового варианта приняты $\nu_\sigma = 0,25$, $\mu_\sigma = 1 \cdot 10^{10}$ Па. Предусматривается последовательное варьирование значений коэффициента Пуассона и модуля сдвига из уравнения (3). Для большинства горных пород коэффициент Пуассона находится в пределах от 0,1 до 0,45, наиболее вероятные значения модуля сдвига 10^{10} – $3 \cdot 10^{11}$ Па. Результаты расчета представлены на рис. 2, 3.

Значения коэффициента Пуассона для расчетов $p1$, $p2$, $p3$, представленных на рис. 2, составят 0,1, 0,35 и 0,45 соответственно. На рис. 2–8 для каждого из представленных расчетов под сокращением «общ.» и «закреп.» имеется в виду общая (воссозданная) и закрепленная на проппанте ширина трещины соответственно. Иными словами, каждому из выполненных расчетов соответствуют две кривые одного цвета, отражающие два состояния профиля трещины.

Модуль сдвига, принятый в расчетах $p1$, $p2$, $p3$, имеет значения $5 \cdot 10^{10}$, $1,5 \cdot 10^{11}$ и $3 \cdot 10^{11}$ Па соответственно (рис. 3).

Представленные результаты расчетов позволяют сделать вывод о том, что влияние коэффициента Пуассона на изменение размеров трещины выражено в меньшей степени, чем модуля сдвига, что на практике подтверждается лабораторными исследованиями. При увеличении модуля сдвига и коэффициента Пуассона средняя длина трещины сокращается, что существенно сказывается

на снижении эффекта от ГРП по причине уменьшения области дренирования. В подобных условиях для достижения проектной длины требуются изменения в режиме закачки (давление, расход) и профиле концентрации проппанта. Последнее служит для предупреждения раннего «стопа», связанного с ростом концентрации проппанта в узкой ее части и образованием проппантной пробки. Фильтрация жидкости разрыва через проппант при образовании пробки в настоящей работе не учитывается, в работах [3, 8, 11] подобные случаи подробно описаны.

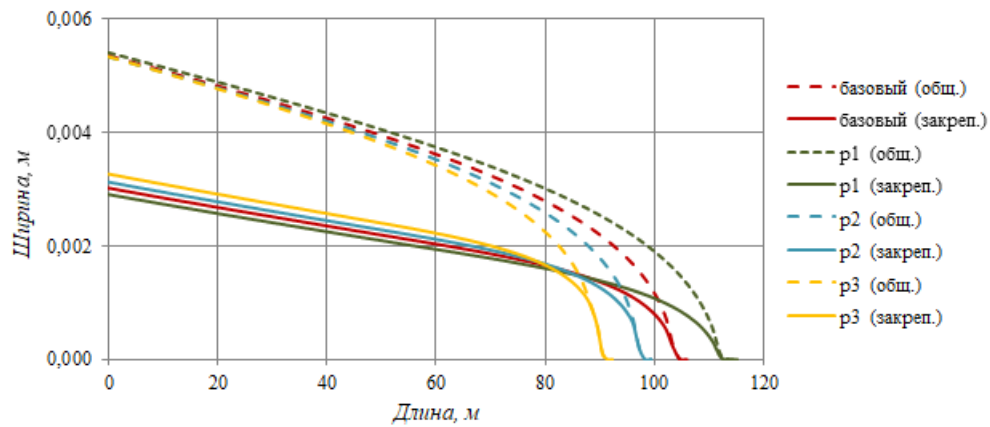


Рис. 2. Влияние упругих свойств породы на остаточную форму трещины. Коэффициент Пуассона

Fig. 2. The influence of elastic rock properties on the residual fracture shape. Poisson ratio

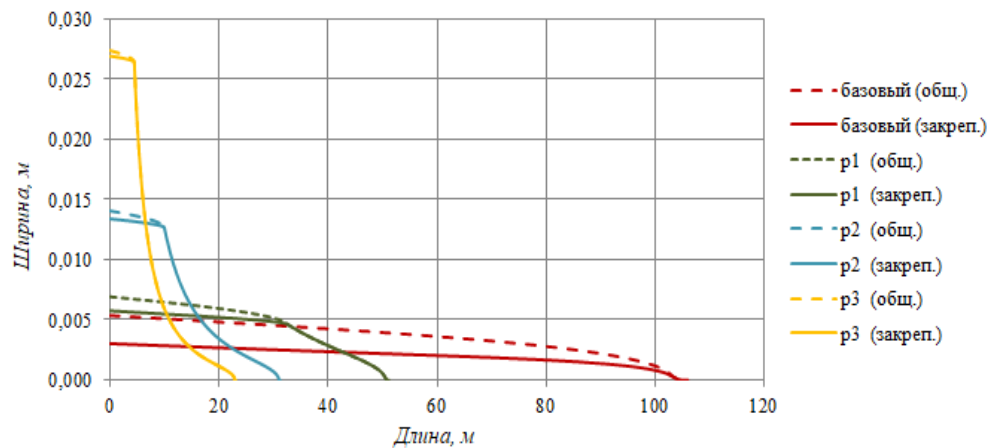


Рис. 3. Влияние упругих свойств породы на остаточную форму трещины. Модуль сдвига

Fig. 3. The influence of elastic rock properties on the residual fracture shape. Shear factor

При проведении ГРП большое внимание уделяется определению эффективности жидкости разрыва, поскольку интенсивность фильтрационных утечек напрямую скажется на несущей способности вязкой жидкости и на потенциале роста трещины в длину. Подбор жидкости разрыва с учетом ФЭС в каждом конкретном случае позволит повысить успешность проведения мероприятия и достигнуть проектной длины трещины.

Варьирование коэффициента проницаемости горной породы показало, что эффективность жидкости разрыва с фиксированными свойствами существенно снижается при увеличении фильтрационных характеристик пласта. Для определенности в качестве жидкости разрыва будем использовать линейный гель с фиксированной вязкостью $4 \cdot 10^{-2}$ Па·с. Результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 4. Значения коэффициента проницаемости для расчетов $p1$, $p2$, $p3$, представленных на рис. 4, составят $5 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-2}$ и $2 \cdot 10^{-2}$ мкм² соответственно.

На рис. 4 максимальная длина трещины получена при минимальной проницаемости пласта в расчете $p1$, что в данном случае позволяет говорить о максимальной эффективности жидкости разрыва. Расчет методом материального баланса позволяет говорить, что порядок эффективности в данном случае составит 70-80%. В случае повышенных фильтрационных характеристик значительная часть жидкости утекает в пласт, длина трещины существенно меньше проектной. Концентрация частиц в точке инициации значительно возрастает (интенсивный рост осадка), что приводит к ранней остановке роста.

Для достижения проектной длины трещины рекомендуется к использованию жидкость разрыва с принципиально иной реологией, обладающей большей вязкостью и высокой несущей способностью.

Рассмотренные примеры, по сути, являются решением обратной задачи, они позволяют по известным параметрам пласта определить оптимальные техноло-

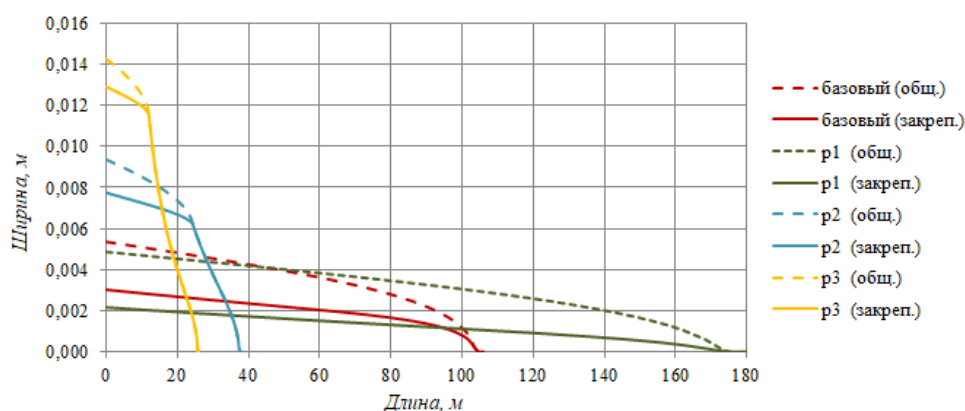


Рис. 4. Влияние фильтрационных свойств породы на остаточную форму трещины

Fig. 4. The influence of rock filtration properties on the residual fracture shape

гические параметры закачки, свойства жидкостей разрыва. При наличии на начальном этапе проектирования опыта проведения ГРП на соседних скважинах со схожими параметрами пласта фактическая информация позволяет существенно повысить качество моделирования. Последующая настройка и корректировка модели осуществляется на основе дополнительно полученной информации при проведении тестовых закачек малого объема в исследуемой скважине.

Во второй части исследования рассмотрены результаты моделирования при различных режимах закачки и дифференцировании свойств жидкости разрыва. Качественное исследование поведения трещины при изменении параметров закачки для безразмерной системы уравнений также приведено в работе [6].

Из системы уравнений (1) имеем, что в донной части трещины формируется осадок, пополняемый частицами проппанта в результате стекания дисперсной фазы по стенкам трещины и гравитационного осаждения. Данное обстоятельство позволяет моделировать процесс гидроразрыва с использованием в качестве жидкостей разрыва линейных гелей. Несущая способность данных жидкостей невысокая, что сказывается на особенностях движения проппанта по трещине, но с точки зрения наглядности данный пример весьма удачен для иллюстрации зависимости длины трещины от свойств геля.

В качестве базовой жидкости разрыва принимается линейный гель, ранее рассмотренный в примерах с вязкостью $4 \cdot 10^{-2}$ Па·с, проницаемость пласта $1,5 \cdot 10^{-3}$ мкм². Понижая значительно вязкость жидкости до $1 \cdot 10^{-3}$ Па·с (практически до вязкости воды), очевиден тот факт, что закрепленный объем трещины существенно снижается (рис. 5).

В представленных расчетах $p1, p2, p3$ значения вязкости жидкости разрыва приняты $2,5 \cdot 10^{-2}, 1,5 \cdot 10^{-2}$ и $1 \cdot 10^{-3}$ Па·с соответственно.

Из проведенных расчетов следует, что снижение вязкости геля в значительной степени уменьшает несущую способность жидкости разрыва. Выпадение осадка происходит более интенсивно, концентрация частиц в «носике» трещи-

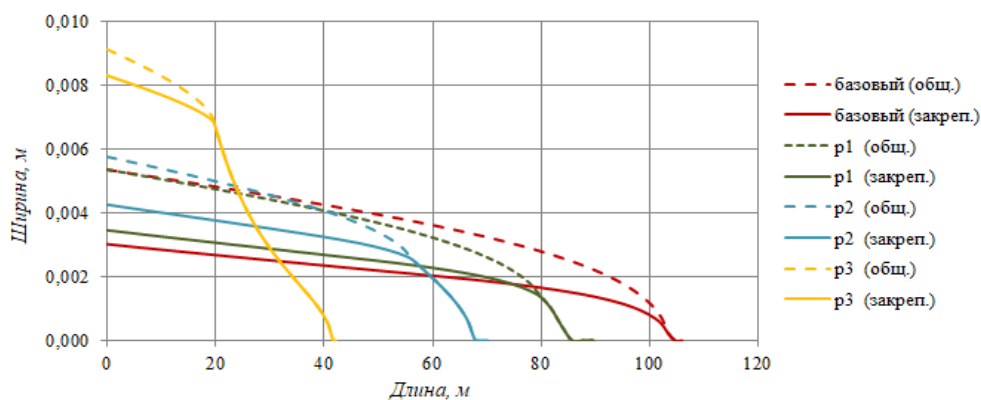


Рис. 5. Остаточная форма трещины при изменении вязкости жидкости

Fig. 5. The residual fracture shape with fluid viscosity change

ны быстро растет, область ε перекрывается полностью, и происходит остановка. В расчетах $p2, p3$ происходит искривление формы трещины, в концевой ее части ширина закрепленной области совпадает с общей (воссозданной в процессе закачки) шириной.

В следующем вычислительном тесте для базовой жидкости разрыва увеличивается время закачки оторочки с 4 до 10, 20, 30 мин. в расчетах $p1, p2, p3$ соответственно, при этом полное время закачки во всех экспериментах составит 40 мин. Концентрация частиц проппанта при загрузке увеличивается линейно, в рассмотренных случаях достигнута одинаковая итоговая концентрация (рис. 6).

Результаты, полученные при моделировании, изображены на рис. 7.

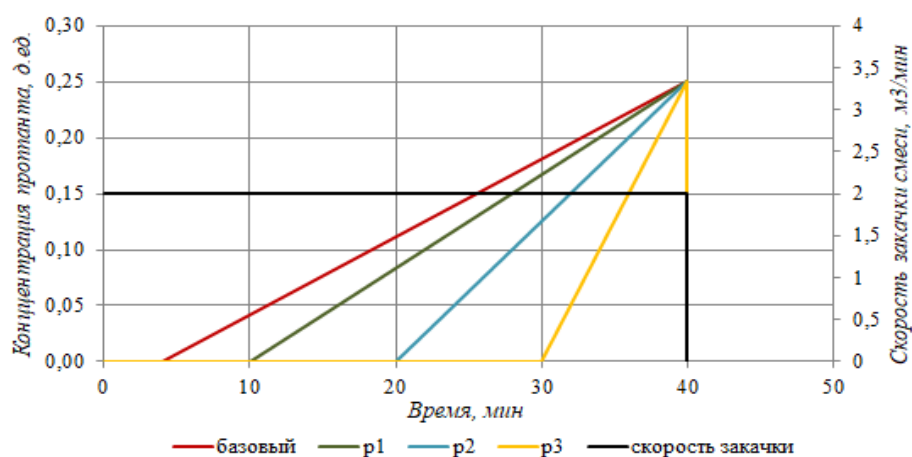


Рис. 6. Технологические параметры закачки

Fig. 6. The technological parameters of an injection

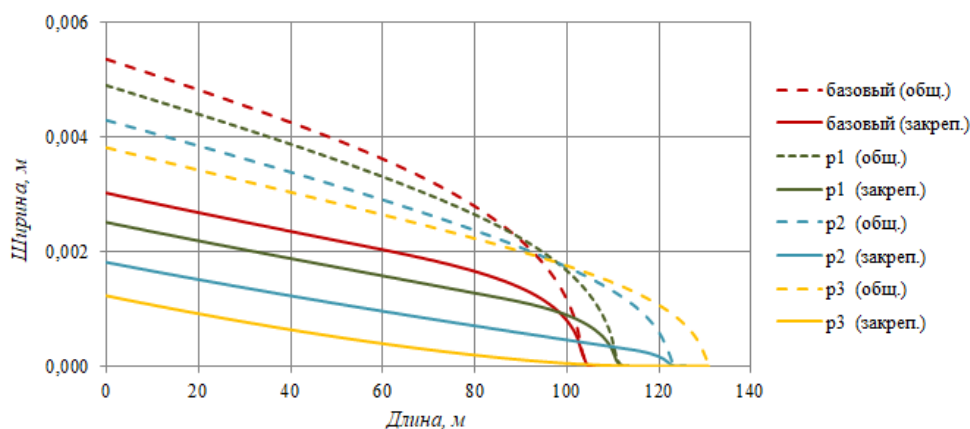


Рис. 7. Параметры трещины при изменении времени закачки оторочки

Fig. 7. The fracture parameters after changing the injection time of clean fracturing fluid

Анализ расчетов показывает, что в случае увеличения времени закачки оторочки длина трещины растет. Однако закрепленный на проппанте объем трещины значительно ниже базового, особенно в $p3$. Сокращение объема и ширины трещины связано как с меньшим количеством используемого проппанта, так и с особенностями его продвижения в концевой части трещины.

Расчет с увеличением скорости закачки показан на рис. 8.

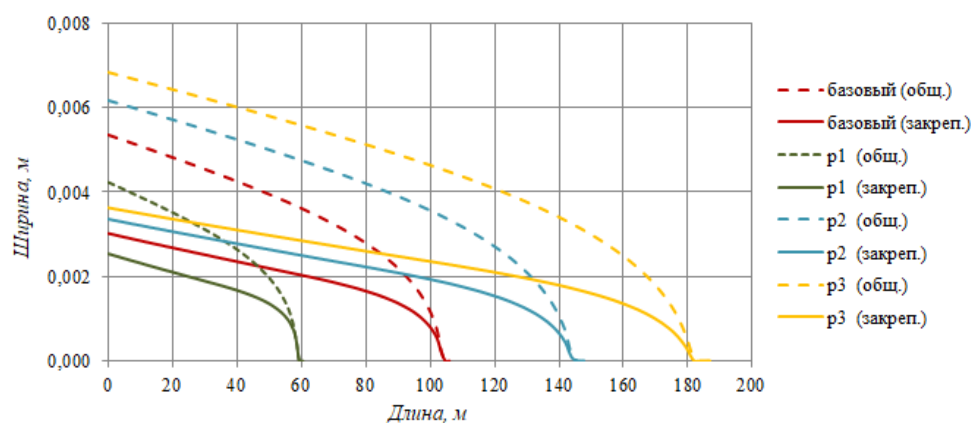


Рис. 8. Параметры трещины при изменении скорости закачки

Fig. 8. The fracture parameters after changing the injection rate

Значение базового расхода — $2 \text{ м}^3/\text{мин.}$; для расчетов $p1$, $p2$, $p3$, представленных на рис. 8, расход равен 1, 3 и $4 \text{ м}^3/\text{мин.}$ соответственно.

Повышение скорости закачки привело к увеличению длины трещины в значительной степени. В идеализированных условиях трещина не прорывается через непроницаемые покрышки, обладающие высокой трещиностойкостью, поэтому данный исход закономерен. Увеличение скорости закачки может быть оправдано при наборе высоты трещины, однако зачастую имеет негативные последствия, связанные с прорывом трещины в нижележащие водонасыщенные интервалы при их наличии в разрезе пласта.

Выводы

В представленной работе выполнены расчеты с использованием одномерной математической модели гидроразрыва, основанной на РКН-постановке.

Рассмотрены две группы факторов, влияющих на успешность проведения ГРП:

- априорные свойства горной породы, по которым осуществляется подбор параметров закачки и свойств жидкости разрыва;
- подбор технологических параметров и свойств жидкости разрыва, позволяющих с привлечением информации по аналогам достичь проектных параметров трещины.

Показано, что свойства жидкости разрыва и режимы закачки при различных параметрах пласта существенно влияют на остаточную форму трещины. Результаты проведенного исследования могут быть использованы в инженерной практике при осуществлении экспресс-оценки геометрических параметров трещины гидроразрыва и носят справочный характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. 8-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2015. 639 с.
2. Зубков В. В. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва / В. В. Зубков, В. Ф. Кошелев, А. М. Линков // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2007. № 1. С. 45-63.
3. Карнаков П. В. Модель гидроразрыва, включающая механизм закупоривания трещины пропантом / П. В. Карнаков, В. Н. Лапин, С. Г. Черный // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2014. Том 12. Вып. 1. С. 19-33.
4. Самарский А. А. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский [и др.]. М.: Наука, 1987. 480 с.
5. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М.: Наука, 1989. 429 с.
6. Татосов А. В. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта / А. В. Татосов, А. С. Шляпкин // Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2018. Том 18. Вып. 2. С. 217-226.
7. Татосов А. В. TSH Frac Программный комплекс для моделирования геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта, определения стоимости мероприятий и оценке рисков / А. В. Татосов, А. С. Шляпкин // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020619401 от 17.08.2020.
8. Черный С. Г. Методы моделирования зарождения и распространения трещины / С. Г. Черный [и др.] // Институт вычислительных технологий СО РАН. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 312 с.
9. Economides M. Unified Fracture Desing / M. Economides, R. Oligney, P. Valko. Alvin, Texas: Orsa Press, 2002. 263 p.
10. Nordgren R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture / R. P. Nordgren // Society of Petroleum Engineers. 1972. Vol. 12. Iss. 04. Paper 7834. Pp. 306-314.
11. Mobbs A. T. Computer simulations of proppant transport in a hydraulic fracture / A. T. Mobbs, P. S. Hammond // SPE Production and Facilities. 2001. Vol. 16. No. 2. Pp. 112-121.
12. Perkins T. K. Widths of hydraulic fractures / T. K. Perkins, L. R. Kern // Journal of Petroleum Technology. 1961. Vol. 13. Iss. 09. Paper SPE 89. Pp. 937-949.

Alexey S. SHLYAPKIN¹
Alexey V. TATOSOV²

UDC 501.1, 622.276.66

**ON THE EXPRESS ESTIMATION OF GEOMETRICAL PARAMETERS
OF A HYDRAULIC FRACTURING CRACK FIXED ON A PROPPANT
USING THE METHODS OF MATHEMATICAL MODELING**

¹ Leading Specialist, Department of Modeling
of Tertiary Methods of Enhanced Oil Recovery,
Branch of KogalymNIPIneft LLC,
Lukoil-Engineering (Tyumen)
shlyapkinas@lukoil.tmn.ru

² Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,
Institute of Mathematics and Computer Science,
University of Tyumen
atatosov@utmn.ru

Abstract

Improving technologies and increasing the number of activities related to hydraulic fracturing increase the requirements for the speed and quality of engineering support. For hydraulic fracturing design, there are specialized software products-hydraulic fracturing simulators, which are based on mathematical models of various dimensions.

Taking into account the influence of filtration leaks into the reservoir and the behavior of proppant particles in the crack largely determine the shape of the fracture crack. In the model representation, these factors are taken into account, but they need to be clarified in order to increase the quality of the forecast and estimate the productivity of the crack, which determines the relevance of this area of study.

Citation: Shlyapkin A. S., Tatosov A. V. 2020. "On the express estimation of geometrical parameters of a hydraulic fracturing crack fixed on a proppant using the methods of mathematical modeling". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 6, no. 3 (23), pp. 79-92.
DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-79-92

In this paper, we propose an analysis that allows us to quickly evaluate the geometric parameters of the crack when changing the technological parameters and properties of the fracture fluid.

The presented mathematical model is based on a one-dimensional mathematical model in PKN representation (Perkins — Kern — Nordgren model).

All calculations presented in this paper were performed using the certified TSH Frac software package designed for modeling the geometric parameters of hydraulic fracturing cracks.

The results of the study can be used in engineering practice for rapid assessment of the geometric parameters of a hydraulic fracturing crack. Subsequent adjustment and adjustment of the model can be carried out when additional information is obtained during small-volume test uploads in the well under study.

Keywords

Heat and mass transfer, frozen ground, temperature fields, soil temperature stabilization, thermal physics.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-79-92

REFERENCES

1. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. 2015. Numerical Methods. 8th edition. Moscow: Laboratoriya znaniy. 639 pp. [In Russian]
2. Zubkov V. V., Koshelev V. F., Linkov A. M. 2007. “Numerical simulation of the initiation and growth of hydraulic fractures”. Journal of Mining Science, no. 1, pp. 45-63. [In Russian]
3. Karnakov P. V., Lapin V. N., Cherny S. G. 2014. “Model of hydraulic fracturing, including the mechanism of plugging a crack with proppant”. Vestnik NSU. Series: Information Technologies, vol. 12, no. 1, pp. 19-33. [In Russian]
4. Samarsky A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov C. P., Mikhaylov A. P. 1987. Modes with Aggravation in Problems for Quasilinear Parabolic Equations. Moscow: Nauka. 480 pp. [In Russian]
5. Samarsky A. A., Gulin A. V. 1989. Numerical Methods. Moscow: Nauka. 429 pp. [In Russian]
6. Tatosov A. V., Shlyapkin A. S. 2018. “Movement of proppant in the opening crack of hydraulic”. Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, vol. 18, no. 2, pp. 217-226. [In Russian]
7. Tatosov A. V., Shlyapkin A. S. “TSH Frac Software package for modeling geometric parameters of hydraulic fracturing cracks, determining the cost of measures and risk assessment”. Certificate of state registration of the computer program No. 2020619401 dated 17 August 2020. [In Russian]
8. Cherny S. G., Lapin V. N., Esipov D. V., Kuranakov D. S. 2016. “Methods for modeling of initiation and propagation”. In: Institute of computing technologies SB RAS. Novosibirsk: Publishing House of the SB RAS. 312 pp. [In Russian]

9. Economides M., Oligney R., Valko P. 2002. Unified Fracture Design. Alvin, Texas: Orsa Press. 263 pp.
10. Nordgren R. P. 1972. "Propagation of a vertical hydraulic fracture". Society of Petroleum Engineers, vol. 12, no. 4, art. 7834, pp. 306-314.
11. Mobbs A. T., Hammond P. S. 2001. "Computer Simulations of Proppant Transport in a Hydraulic Fracture". SPE Production and Facilities, vol. 16, no. 2, pp. 112-121.
12. Perkins T. K., Kern L. R. 1961. "Widths of hydraulic fractures". Journal of Petroleum Technology, vol. 13, no. 9, paper SPE 89, pp. 937-949.