

Ксения Алексеевна БОРОДИНА¹

УДК 532.5

МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ПЛЕНКИ БИНАРНОГО ГОМОГЕННОГО РАСТВОРА ПРИ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

¹ старший преподаватель
кафедры фундаментальной математики и механики,
Тюменский государственный университет
k.a.borodina@mail.ru; ORCID: 0000-0002-3847-0636

Аннотация

Изучение движения жидких пленок в последнее время приобретает всё большую актуальность, что связано с расширяющейся областью их практического применения. К примеру, среди перспективных методов охлаждения можно выделить технологии, базирующиеся на испарении тонкого слоя жидкости. На основе эффектов Марангони могут быть разработаны оптические элементы систем медицинской диагностики, рабочие характеристики которых можно быстрее перестроить под необходимые задачи по сравнению с применяемыми сейчас подвижными линзами. Многие авторы в России и за рубежом заняты всесторонним теоретическим изучением пленочных течений, которое не должно отставать от исследований возможностей их применения. При этом движение пленок бинарного гомогенного раствора исследовано недостаточно, именно на нем сделан акцент в данном исследовании.

В работе рассмотрено поведение жидкой пленки, содержащей летучую компоненту, при ее нагреве. Обозначена значимость учета лапласовского скачка давления на границе раздела фаз, а также влияние кривизны поверхности на давление насыщенного пара. Формализована постановка задачи в ограниченном объеме. Устойчивость численной схемы исследована методом гармоник.

Достоверность модели подтверждена ее тестированием на ряде задач, имеющих аналитические решения: сохранение жидкого объема при соприкосновении пленки, нахо-

Цитирование: Бородина К. А. Модель эволюции пленки бинарного гомогенного раствора при тепловом воздействии / К. А. Бородина // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Том 6. № 4 (24). С. 48-68.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-4-48-68

дющейся в поле тяжести, с вертикальной стенкой; определение профиля слоя жидкости при неравномерном нагреве подложки; выполнение баланса массы при равномерном нагреве и охлаждении.

Ключевые слова

Термокапиллярное течение, конвекция Марангони, жидкая пленка.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-4-48-68

Введение

Изучение режимов и особенностей пленочных течений представляет несомненную важность в связи с тем, что они находят применение в самых разных областях. Так, в [12, 13] предложены жидкостные оптические элементы на основе капиллярной конвекции Марангони, которые могут быть использованы для усовершенствования или создания новых оптических систем и устройств. На испарении тонких слоев жидкости основана работа многих современных охлаждающих систем [4]. Моделированию конвективных течений с массопереносом через границу раздела жидкость — газ посвящены работы [1, 7]. В [18] анализируется влияние вариантов размещения нагревателей и режимов их работы на динамику и характер возникающих конвективных режимов, описан метод для численного расчета. Балансовые соотношения на границе раздела сред с учетом фазовых переходов приведены в [5, 14]. Изучению конвекции Марангони с учетом испарения посвящены работы [6, 8, 10, 15]. В представленной работе изучается поведение тонкой пленки жидкости, содержащей летучую компоненту, при ее нагреве.

Основные уравнения

Пусть тонкий слой однородного раствора расположен на плоской горизонтальной поверхности $z = 0$. Газ над пленкой содержит пары летучей компоненты, находящиеся в термодинамическом равновесии с жидкостью. В некоторый момент времени подложка мгновенно нагревается, что приводит к деформации пленки. Будем считать изменения температуры и концентрации раствора незначительными настолько, что к таким отклонениям чувствителен только коэффициент поверхностного натяжения. Параметры же, характеризующие саму жидкость, полагаем постоянными. На свободной поверхности $z = h(x, y, z)$ пренебрежем конвективным теплообменом с окружающей средой, сохранив затраты тепла на испарение. Схематическое представление задачи отображено на рис. 1.

Дополним математическую модель [17, 19] лапласовским скачком давления на границе раздела фаз, а также учтем влияние кривизны поверхности на давление насыщенного пара. Уравнения эволюции пленки имеют вид

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot (\rho h \mathbf{u}) = -J ,$$

$$\mathbf{u} = -\frac{\rho g}{3\mu} h^2 \nabla_{\perp} h - \frac{g}{8\mu} h^3 \nabla_{\perp} \rho + \frac{1}{2\mu} h \nabla_{\perp} \gamma + \frac{\gamma_0}{3\mu} h^2 \nabla_{\perp} \nabla_{\perp}^2 h . \tag{1}$$

Здесь h — толщина жидкого слоя; ρ — плотность раствора; μ — динамическая вязкость; γ — коэффициент поверхностного натяжения; g — ускорение свободного падения; J — интенсивность массообмена; \mathbf{u} — средняя продольная скорость.

Как показал анализ соотношения характерных времен диффузии летучей компоненты и эволюции пленки [2], при деформации термопленки изменение концентрации в растворе незначительное, а в случае диффузионной пленки распределение концентрации практически однородное по ее толщине. Таким образом, для изучения эволюции пленки перенос компоненты в жидком слое определим, как

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - C)\rho h] + \nabla_{\perp} \cdot [(1 - C)\rho h \mathbf{u}] = 0,$$

или

$$\rho h \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\perp} C \right) = -J(1 - C); \quad (2)$$

C — массовая концентрация летучей компоненты в растворе, однородная по высоте.

Вследствие неравномерного нагрева, подвижности нижней границы, а также испарения в газовой прослойке помимо диффузионного происходит и конвективный перенос летучей компоненты. Считая скорости и градиенты плотности паров малыми, оставляем только процесс диффузии

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = D_v \nabla^2 \rho_v, \quad (3)$$

ρ_v — плотность паров летучей компоненты; D_v — коэффициент диффузии в газе. Уравнения движения дополняются начальными и граничными условиями.

Замыкающие соотношения

Связь температур T_l и T_s верхней и нижней поверхностей жидкого слоя [16]

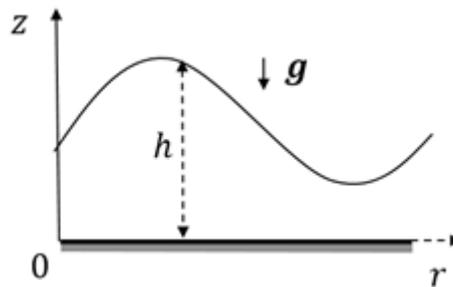


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Fig. 1. The schematic problem representation

$$T_I = \frac{kT_s + (K_g T_0 - J L_v) h}{k + K_g h} . \quad (4)$$

Здесь L_v — скрытая теплота парообразования; k — коэффициент теплопроводности; K_g и T_0 — коэффициент теплоотдачи и внешняя температура, совпадающая с начальной. В дальнейшем полагаем $K_g = 0$, температуру подложки T_s считаем известной функцией.

Плотность ρ раствора определялась из равенства

$$\rho = \alpha \rho_{al} + (1 - \alpha) \rho_w ,$$

где α представляет собой объемное содержание летучего вещества; ρ_{al}, ρ_w — плотности добавленной и основной компоненты раствора. Из очевидных соотношений

$$\alpha \rho_{al} = C \rho , (1 - \alpha) \rho_w = (1 - C) \rho ;$$

указанная зависимость может быть представлена через массовое содержание C , которое принималось равным начальному значению C_0

$$\rho = \frac{\rho_w \rho_{al}}{C_0 \rho_w + (1 - C_0) \rho_{al}} , \quad (5)$$

при этом плотность составляющих компонент определялась при температуре T_0 .

Вязкость смеси следует считать функцией температуры и концентрации и определять экспериментально. В данном исследовании, в связи со сложной функциональной зависимостью и незначительным относительным изменением, μ полагалась постоянной.

Коэффициент поверхностного натяжения жидкой смеси γ зависит от температуры T и концентрации C на свободной поверхности. Эту зависимость примем в виде [9]

$$\gamma = \gamma_w \left(1 - \frac{T_I - T_0}{T_c - T_0} \right)^n \frac{a}{(C_I + b)^m} . \quad (6)$$

Здесь T_c — критическая температура основной компоненты жидкой смеси; $n = 11/9$; a, b, m — параметры аппроксимации, дающие для γ в предельных случаях коэффициент поверхностного натяжения чистых компонент γ_w и γ_v при $T = T_0$

$$b = \frac{\gamma_v^{\frac{1}{m}}}{\left(\gamma_w^{\frac{1}{m}} - \gamma_v^{\frac{1}{m}} \right)} , a = b^m ; m = 0,2 .$$

В дальнейшем коэффициент поверхностного натяжения запишем в линеаризованном виде

$$\gamma = \gamma_T(T_I - T_0) + \gamma_C(C_I - C_0) ; \quad (7)$$

$$\gamma_T = \frac{\partial \gamma}{\partial T}(T = T_0, C = C_0), \quad \gamma_C = \frac{\partial \gamma}{\partial C}(T = T_0, C = C_0).$$

Аналогично представим интенсивность массообмена. Согласно [2] имеем

$$J = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_I} \right)^{\frac{1}{2}} [p_{vs}(T_I, C_I) - p_{vl}]. \quad (8)$$

Давление насыщенных паров раствора спирта p_{vs} определим как

$$p_{vs}(T, C) = x(C)p_{v0}^{al} \exp \left[\frac{L_v}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right], \quad (9)$$

мольная доля растворенной компоненты

$$x(C) = \frac{CM_w}{CM_w + (1 - C)M_v},$$

давление насыщенного пара чистой компоненты p_v^{al} в общем случае есть функция температуры, считаем давление известным при стандартной температуре $T_{st} = 397$ К, тогда начальное давление

$$p_{v0}^{al} = p_v^{al}(T = T_0) = p_v^{al}(T_{st}) \exp \left[\frac{L_v}{R} \left(\frac{1}{T_{st}} - \frac{1}{T_0} \right) \right]. \quad (10)$$

Парциальное давление паров над свободной поверхностью p_{vl} подчиним уравнению состояния

$$p_{vl} = \frac{\rho_{vl}}{M_v} RT_I,$$

подразумевая непрерывность поля температуры [11, 16]. Таким образом, будем рассматривать J как функцию температуры T_p , концентрации C_l и плотности паров ρ_{vl} на границе раздела сред. Первоначально пар над свободной поверхностью считаем насыщенным

$$\rho_{v0} = \frac{p_{v0}M_v}{RT_0} = \frac{x(C_0)p_{v0}^{al}M_v}{RT_0} = x(C_0)\rho_{v0}^{al}.$$

Давление насыщенных паров над выпуклой вверх свободной поверхностью пленки повышается, а над выпуклой вниз — понижается. Это изменение происходит на величину равную произведению лапласовского скачка давления на отношение плотности насыщенных паров над плоской поверхностью к плотности жидкости

$$\Delta p_{vs} = 2k_R \gamma \frac{\rho_v}{\rho}.$$

Соответственно интенсивность массообмена изменяется на величину

$$\Delta J = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_I} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta p_{vs}.$$

Таким образом, в линеаризованном виде

$$J = j_T(T_I - T_0) + j_C(C_I - C_0) + j_v(\rho_{vI} - \rho_{v0}) + j_h \nabla_1^2 h; \quad (11)$$

$$j_T = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{C_0 M_w}{C_0 M_w + (1 - C_0) M_v} \frac{p_{v0} L_v}{RT_0^2} \left(1 - \frac{RT_0}{L_v} \right),$$

$$j_C = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{M_w M_v}{[C_0 M_w + (1 - C_0) M_v]^2} p_{v0},$$

$$j_v = -\alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{RT_0}{M_v},$$

$$j_h = -\alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\chi(C_0) p_{v0}^{al} M_v}{\rho RT_0} \gamma_0.$$

Для выбранного подхода $C_I = C$. Представленные ниже иллюстрации поведения жидкой пленки будут соответствовать водному раствору изопропанола (ИРА), параметры которого примем как в [20]. Начальная температура $T_0 = 293$ К, критическая — $T_c = 647$ К, начальная массовая концентрация ИРА $C_0 = 0,35$, молярная масса летучей компоненты $M_{IPAl} = M_v = 60$ г/моль, воды — $M_w = 18$ г/моль, плотности жидкостей $\rho_{al} = 786$ кг/м³, $\rho_w = 998$ кг/м³; коэффициент вязкости $\mu = 3$ мПа·с, теплопроводности — $k = 0,6$ Вт/(м·К), температуропроводности — $\chi = 0,14 \cdot 10^{-6}$ м²/с, диффузии — $D = 10^{-9}$ м²/с, $D_v = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с, теплота парообразования $L_v = 756$ кДж/кг, давление насыщенных паров $p_v^{al}(T_{sl}) = 4,1$ кПа, коэффициент коммодации $\alpha_{com} = 1$.

Полная постановка в ограниченном объеме

Ограничим размер жидкого пятна и газовой прослойки непроницаемой вертикальной стенкой, сохраняя осевую симметрию (чашка Петри, цилиндрический сосуд). Пусть радиус пятна (радиус основания чашки Петри) равен L . Газовая подушка ограничена сверху непроницаемой пластиной, отстоящей от нижней подложки на высоту H_v (высота чашки Петри). Температуру подложки T_s зададим в виде осесимметричного пятна

$$T_s = T_s(r) = T_0 + \theta e^{-\frac{r^2}{a^2}}, r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (12)$$

Полная постановка задачи будет иметь вид

$$0 < r < L, t > 0 :$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot (h\mathbf{u}) &= -\frac{J}{\rho}, \\ \rho h \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\perp} C \right) &= -J(1 - C), \\ \mathbf{u} &= -\frac{\rho g}{3\mu} h^2 \nabla_{\perp} h + \frac{1}{2\mu} h \nabla_{\perp} \gamma + \frac{\gamma_0}{3\mu} h^2 \nabla_{\perp} \nabla_{\perp}^2 h; \\ J &= j_T(T_I - T_0) + j_C(C - C_0) + j_v(\rho_{vl} - \rho_{v0}) + j_h \nabla_{\perp}^2 h, \\ \gamma &= \gamma_T(T_I - T_0) + \gamma_C(C - C_0), T_I = T_s - \frac{JL_v h}{k}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$t = 0: h = 1, C = C_0.$$

$$r = 0, L: \mathbf{u} = \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial C}{\partial r} = 0.$$

$$h = h(r, t), \mathbf{u} = \mathbf{u}(r, t), C = C(r, t), T_I = T_I(r, t). \\ 0 < r < L, 0 < z < H_v, t > 0 :$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = D_v \left(\nabla_{\perp}^2 \rho_v + \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial z^2} \right).$$

$$t = 0: \rho_v = \rho_{v0}.$$

$$z = 0:$$

$$D_v \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = -J;$$

$$z = H_v: \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = 0,$$

$$r = 0, L: \frac{\partial \rho_v}{\partial z} = 0.$$

$$\rho_v = \rho_v(r, z, t), \rho_{vl} = \rho_v(z = 0).$$

При осесимметричном нагреве подложки приходим к одномерной модели движения пленки раствора и двумерной для газа

$$\nabla_{\perp}(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial r} \mathbf{e}_r, \nabla_{\perp} \cdot (\dots) \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\dots)), \nabla_{\perp}^2(\dots) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\dots)}{\partial r} \right).$$

Безразмерные переменные

В уравнениях движения перейдем к безразмерным переменным

$$\nabla_{\perp}^* = l\nabla_{\perp}, \quad x_* = \frac{x}{l}, \quad y_* = \frac{y}{l}, \quad z_* = \frac{z}{l}, \quad t_* = \frac{t}{\tau},$$

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{u_0}, \quad T_* = \frac{T - T_0}{\theta}, \quad h_* = \frac{h}{d}, \quad \rho_v^* = \frac{\rho_v}{\rho_{v0}^{al}}.$$

Здесь l — продольная, d — поперечная характерные длины; характерный перепад температуры θ ; время процесса $\tau = l/u_0$. В дальнейшем положим $d = h_0, l = a$.

Полная постановка задачи в безразмерных переменных приводится к виду

$$0 < r_* < L_*, \quad t_* > 0:$$

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \nabla_{\perp}^* \cdot \mathbf{q}_* = -J_*,$$

$$h_* \frac{\partial C}{\partial t_*} + \mathbf{q}_* \cdot \nabla_{\perp}^* C = -J_* (1 - C),$$

$$\mathbf{q}_* = -\frac{u_g^*}{3} h_*^3 \nabla_{\perp}^* h_* - \frac{u_T^*}{2} h_*^2 \nabla_{\perp}^* T_I^* - \frac{\eta u_D^*}{2} h_*^2 \nabla_{\perp}^* C + \frac{u_L^*}{3} h_*^3 \nabla_{\perp}^* (\nabla_{\perp}^{*2} h_*), \quad (14)$$

$$J_* = \frac{\lambda}{1 + \zeta h_*} [T_s^* + \eta(C - C_0) + \eta_v(\rho_{vl}^* - x(C_0)) + \eta_h \nabla_{\perp}^{*2} h_*],$$

$$T_I^* = T_s^* - \frac{\zeta h_*}{1 + \zeta h_*} [T_s^* + \eta(C - C_0) + \eta_v(\rho_{vl}^* - x(C_0)) + \eta_h \nabla_{\perp}^{*2} h_*],$$

$$T_s^* = T_s^*(r_*).$$

$$t_* = 0: \quad h_* = 1, \quad C = C_0.$$

$$r_* = 0, L_*: \quad \mathbf{q}_* = \frac{\partial h_*}{\partial r_*} = \frac{\partial C}{\partial r_*} = 0.$$

$$h_* = h_*(r_*, t_*), \quad \mathbf{q}_* = \mathbf{q}_*(r_*, t_*), \quad C = C(r_*, t_*), \quad T_I^* = T_I^*(r_*, t_*), \quad L_* = \frac{L}{l}.$$

$$0 < r_* < L_*, \quad 0 < z_* < H_v^*, \quad t_* > 0:$$

$$\frac{\partial \rho_v^*}{\partial t_*} = D_v^* \left(\nabla_{\perp}^{*2} \rho_v^* + \frac{\partial^2 \rho_v^*}{\partial z_*^2} \right).$$

$$t_* = 0: \quad \rho_v^* = x(C_0).$$

$$z_* = 0:$$

$$D_v^* \frac{\partial \rho_v^*}{\partial z_*} = -\frac{\rho d}{\rho_{v0}^{al} l} J_*;$$

$$z_* = H_v^*: \frac{\partial \rho_v^*}{\partial z_*} = 0,$$

$$r_* = 0, L_*: \frac{\partial \rho_v^*}{\partial z_*} = 0.$$

$$\rho_v^* = \rho_v^*(r_*, z_*, t_*), \rho_{vI}^* = \rho_v^*(z_* = 0), H_v^* = \frac{H_v}{l}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_g^* &= \frac{u_g}{u_0} = \frac{Ga}{Re}, \quad u_g = \frac{\rho g d^3}{\mu l}; \\ u_T^* &= \frac{u_T}{u_0} = -\frac{\varepsilon Ma}{RePr}, \quad u_T = \frac{|\gamma_T| \theta d}{\mu l}; \\ u_D^* &= \frac{u_D}{u_0} = -\frac{1}{\eta} \frac{\varepsilon Ma}{RePr} \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta}, \quad u_D = |\gamma_C| \frac{j_T \theta d}{j_C \mu l}; \\ u_L^* &= \frac{u_L}{u_0} = \frac{\varepsilon^3}{Ca}, \quad u_L = \frac{\varepsilon^3 \gamma_0}{\mu}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\eta = \frac{j_C}{j_T \theta}, \quad \eta_v = \frac{j_v \rho_{v0}^{al}}{j_T \theta}; \quad \zeta = \frac{j_T L_v d}{k}, \quad \lambda = \frac{j_T \theta}{\rho \varepsilon u_0};$$

для определенности будем считать $u_0 = u_T$. Операторы пространственного дифференцирования

$$\nabla_{\perp}^*(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial r_*} \mathbf{e}_r, \quad \nabla_{\perp}^*(\dots) \mathbf{e}_r = \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} (r_* (\dots)), \quad \nabla_{\perp}^{*2}(\dots) = \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} \left(r_* \frac{\partial(\dots)}{\partial r_*} \right).$$

Для плоскопараллельного или произвольного течений система уравнений очевидным образом меняется.

Верификация

Использовались явная разностная схема с порядком точности аппроксимации $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$ [3], исследование ее устойчивости проведено с помощью метода гармоник. Численная схема реализована в системе Matlab, также была использована процедура численного решения в системе Maple.

Проведем тестирование модели на некоторых задачах, имеющих аналитические решения.

Краевой угол смачивания

Определим форму поверхности жидкости, находящейся в поле тяжести и соприкасающейся с одной стороны с вертикальной стенкой. Краевой угол, образуемый жидкостью при соприкосновении со стенкой, равен θ [11].

Плоскость $x = 0$ есть плоскость стенки, а $z = 0$ есть плоскость поверхности жидкости вдали от стенки. Радиусы кривизны поверхности $z = z(x)$:

$$R_1 = \infty, R_2 = -\frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''},$$

при этом, в рамках уравнений тонкого слоя

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -z''.$$

Тогда условие равновесия

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho g}{\gamma} z = const$$

принимает вид

$$\frac{2z}{a_c^2} - z'' = const,$$

где a_c — капиллярная постоянная,

$$a_c = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}}.$$

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее

$$z'(0) = tg \alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad z(+\infty) = z_0,$$

есть

$$z(x) = -\frac{a_c tg \alpha}{\sqrt{2}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{a_c} x\right\} + z_0.$$

Обозначая далее форму поверхности как $h(x)$ и переходя к принятым безразмерным переменным, имеем

$$h_*(x_*) = -\frac{a_c h'_*(0)}{\sqrt{2}a} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}a}{a_c} x_*\right\} + 1. \quad (16)$$

В численной модели (14) для плоского течения $h_* = h_*(x_*, t_*)$ примем $J = 0, T_s = 0$ с параметрами

$$a = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}, C_0 = 0,35.$$

Начальные и граничные условия

$$h_*(x_*, 0) = 1,$$

$$\frac{\partial h_*}{\partial x_*}(0, t_*) = -1, q_*(0, t_*) = 0.$$

Правая граница выбрана достаточно удаленной для сохранения предельной асимптотики $h_*(+\infty, t_*) = 1$.

На рис. 2 представлена динамика профиля пленки в последовательные моменты времени $t_* = 0, 0,1, 2$ слева и $t_* = 1, 5, 1\ 000$ справа. Пунктирная линия соответствует аналитическому решению, сплошная — численному расчету.

Согласно граничному условию, пленка начинает тянуться вверх по ограничивающей стенке, и асимптотически принимает форму в соответствии с аналитическим решением. Сократив линейный размер до $L_* = 4$, убеждаемся (рис. 3) в сохранении жидкого объема (массы)

$$V = \int_1^L h(x, t) dx = h(x, 0)L.$$

Термокапиллярный прогиб

На плоскости горизонтальной твердой поверхности в поле тяжести находится тонкий неравномерно нагретый слой жидкости; ее температура является заданной функцией продольной координаты. Неравномерный нагрев приводит к возникновению стационарного течения жидкости в пленке, в результате чего ее толщина меняется вдоль слоя согласно

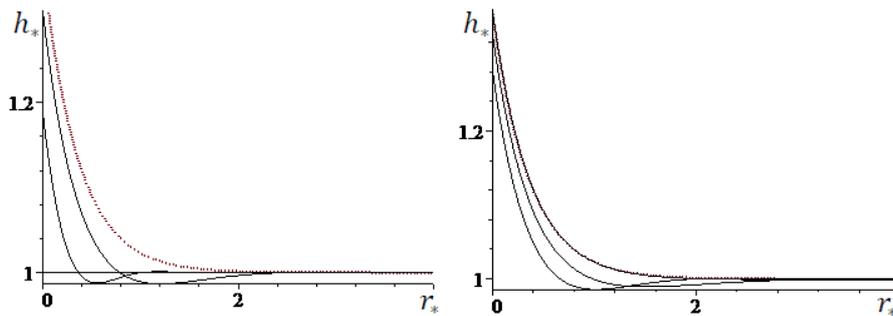


Рис. 2. Профили поверхности пленки в моменты времени $t_* = 0, 0,1, 2$ (слева) и $t_* = 1, 5, 1\ 000$ (справа); пунктирная линия — аналитическое решение, сплошная — численный расчет

Fig. 2. Film surface profiles at times $t_* = 0, 0,1, 2$ (left) and $t_* = 1, 5, 1\ 000$ (right); dotted line — analytical solution, solid — numerical calculation

$$h^2 = h_0^2 + \frac{3}{\rho g} (\gamma - \gamma_0).$$

Полагая

$$\begin{aligned} \gamma - \gamma_0 &= \gamma_T(T - T_0) + \gamma_C(C - C_0); \\ C = C_0 = 0, \quad T &= T_0 + \theta \exp\left\{-\frac{r^2}{a^2}\right\}, \end{aligned}$$

находим

$$h^2 = h_0^2 + \frac{3}{\rho g} \gamma_T \theta \exp\left\{-\frac{r^2}{a^2}\right\},$$

или в безразмерной форме

$$h_*^2 = 1 + \frac{3\gamma_T\theta}{\rho g d^2} e^{-r_*^2}. \tag{17}$$

В численной модели (14) для радиального течения $h = h_*(x_*, t_*)$, без учета давления Лапласа ($u_L = 0$) примем $T_s^* = e^{-r_*^2}$ с параметрами

$$a = 10^{-3} \text{ м}, \quad d = 10^{-4} \text{ м}, \quad C_0 = 0.$$

Начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} h_*(r_*, 0) &= 1, \\ q_*(0, t_*) &= 0. \end{aligned}$$

Правая граница выбрана достаточно удаленной для сохранения предельной асимптотики $h_*(+\infty, t_*) = 1$.

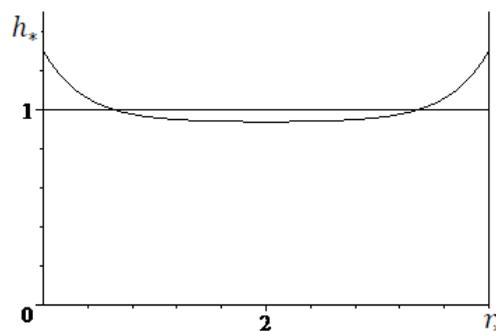


Рис. 3. Начальный и конечный профили поверхности при $t_* = 0$ и $t_* \gg 1$

Fig. 3. Initial and final surface profiles at $t_* = 0$ and $t_* \gg 1$

На рис. 4 представлена динамика профиля пленки в последовательные моменты времени $t_* = 0, 0,2, 1\ 000$. Пунктирная линия соответствует аналитическому решению, сплошная — численному расчету.

После прогиба свободной поверхности вниз, профиль пленки асимптотически принимает форму в соответствии с аналитическим решением. Сократив линейный размер до $L_* = 2$, убеждаемся (рис. 5) в сохранении жидкого объема (массы)

$$V = \int_1^L h(r, t) 2\pi r dr = \pi L^2 h(r, 0).$$

Некоторое изменение глубины прогиба связано с заметным повышением уровня жидкости у вертикальной стенки.

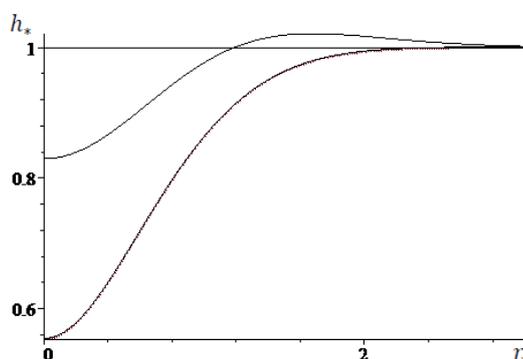


Рис. 4. Профили поверхности пленки в моменты времени $t_* = 0, 0,2, 1\ 000$; пунктирная линия — аналитическое решение, сплошная — численный расчет

Fig. 4. Film surface profiles at times $t_* = 0, 0,2, 1\ 000$; dotted line — analytical solution, solid — numerical calculation

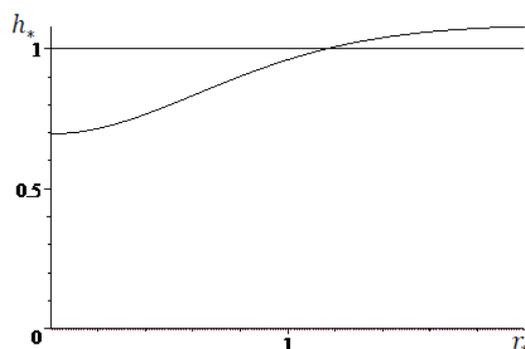


Рис. 5. Начальный и конечный профили поверхности при $t_* = 0$ и $t_* \gg 1$

Fig. 5. Initial and final surface profiles at $t_* = 0$ and $t_* \gg 1$

Баланс массы

Равномерный нагрев (охлаждение) подложки

Равномерно нагреем твердую подложку, положив $T_s^* = 1$. Высота газовой прослойки $H_v = 10$ см, величина нагрева $\theta = 10$ К.

Выполняется баланс массы — сохранение общей массы летучей компоненты, находящейся в жидком и газообразном состояниях.

$$\rho C(t)h(t) + \int_0^{H_v} \rho_v(t, z) dz = const .$$

Сравнивая начальное и новое равновесное (при больших временах) состояния, получим

$$\rho C_0 h_0 + \rho_{v0} H_v = \rho C_\infty h_\infty + \rho_{v\infty} H_v .$$

Сохранение массы основной компоненты раствора дает

$$(1 - C_0)h_0 = (1 - C_\infty)h_\infty .$$

При больших временах в равновесном состоянии массообмен отсутствует $J = 0$, температура свободной поверхности совпадает с температурой подложки $T_l = T_s = T_0 + \theta$. Из этого следует

$$j_T \theta + j_C (C_1 - C_0) + j_v (\rho_{vl} - \rho_{v0}) = 0 .$$

В безразмерных переменных указанные соотношения принимают вид

$$C h_* + \frac{\rho_{v0}^{al} H_v}{\rho d} \int_0^1 \rho_v^*(z_*, t_*) dz_* = const = C_0 + \frac{\rho_{v0}^{al} H_v}{\rho d} x(C_0) , \quad (18)$$

$$C_\infty h_{*\infty} + \frac{\rho_{v0}^{al} H_v}{\rho d} \rho_{v\infty}^* = C_0 + \frac{\rho_{v0}^{al} H_v}{\rho d} x(C_0) , \quad (19)$$

$$1 - C_0 = (1 - C_\infty)h_{*\infty} , \quad (20)$$

$$1 + \eta(C_\infty - C_0) + \eta_v(\rho_{v\infty}^* - x(C_0)) = 0 . \quad (21)$$

В процессе нагрева жидкой пленки летучая компонента частично переходит из жидкого состояния в газообразное, что сопровождается уменьшением толщины жидкого слоя (рис. 6). Пунктирная линия соответствует численному расчету параметров при больших временах.

Величины h_* , C и ρ_v^* являются функциями времени t_* (ρ_v^* зависит также от z_*), при этом выполняется суммарный баланс массы (18). Новые равновесные значения могут быть определены из (19)-(21):

$$h_{*\infty} = 0,9910488856,$$

$$C_{\infty} = 0,3441292257,$$

$$\rho_{v\infty}^* = 0,2195303967,$$

что согласуется с численными расчетами, приведенными на рис. 6 (пунктирная линия).

Задав $T_s^* = -1$, наблюдаем конденсацию паров (рис. 7)

$$h_{*\infty} = 1,008956973,$$

$$C_{\infty} = 0,3557703476,$$

$$\rho_{v\infty}^* = 0,058163975.$$

Продольная диффузия

Нагрев подложки отсутствует, массообмен «заморожен». Начальные условия для газовой фазы

А. $t_* = 0$:

$$0 < r_* < \frac{1}{2}, 0 < z_* < H_v^*: \rho_v^* = 1,$$

$$\frac{1}{2} < r_* < 1, 0 < z_* < H_v^*: \rho_v^* = 0;$$

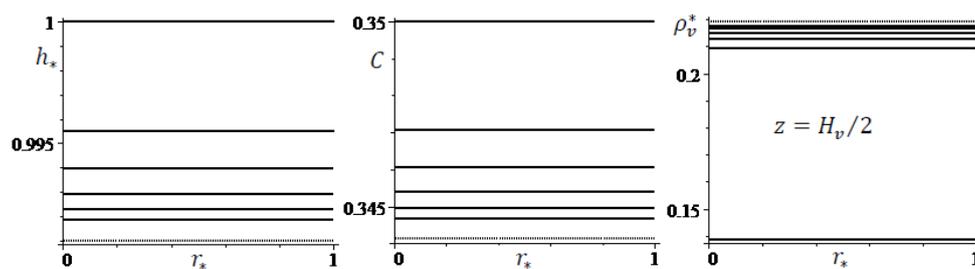


Рис. 6. Высота жидкого слоя, концентрация летучей компоненты и плотность паров при нагреве в последовательные моменты времени; пунктирная линия соответствует новому равновесному состоянию

Fig. 6. The liquid layer height, the volatile component concentration, and the vapor density during heating at successive times; the dotted line corresponds to the new equilibrium state

В. $t_* = 0:$

$$0 < r_* < \frac{1}{2}, 0 < z_* < H_v^*: \rho_v^* = 0,$$

$$\frac{1}{2} < r_* < 1, 0 < z_* < H_v^*: \rho_v^* = 1;$$

граничные условия

$$z_* = 0, H_v^*: \frac{\partial \rho_v^*}{\partial z_*} = 0,$$

$$r_* = 0, 1: \frac{\partial \rho_v^*}{\partial z_*} = 0.$$

Численное решение при $t_* > 0$, согласно начальному условию, не зависит от вертикальной координаты. На рис. 8 приведены зависимости $\rho_v^*(r_*, t_*)$ для последовательных моментов времени, пунктиром обозначено распределение плотности паров для момента $t_* \gg 1$.

Выполняется закон сохранения массы

$$\int_V \rho_v dV = const;$$

в случае А $const = 0,25$, В — $const = 0,75$.

Заключение

В работе изучено поведение тонкой пленки жидкости, содержащей летучую компоненту, при ее нагреве. Учтено влияние лапласовского скачка давления на гра-

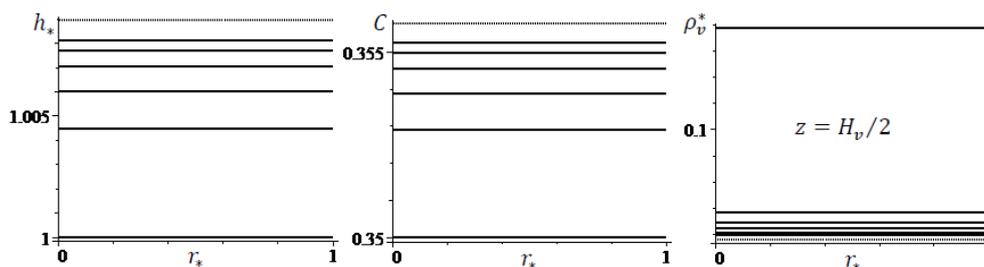


Рис. 7. Высота жидкого слоя, концентрация летучей компоненты и плотность паров при охлаждении в последовательные моменты времени; пунктирная линия соответствует новому равновесному состоянию

Fig. 7. The liquid layer height, the volatile component concentration, and the vapor density during cooling at successive times; the dotted line corresponds to the new equilibrium state

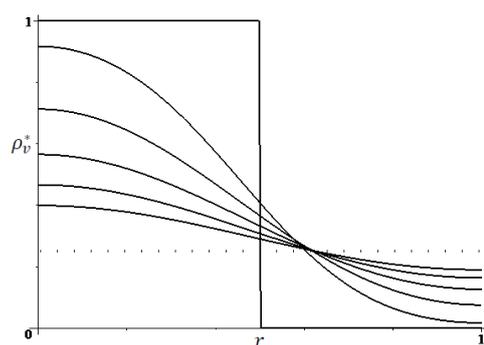


Рис. 8. Распределение плотности паров летучей компоненты вдоль радиальной координаты в последовательные моменты времени

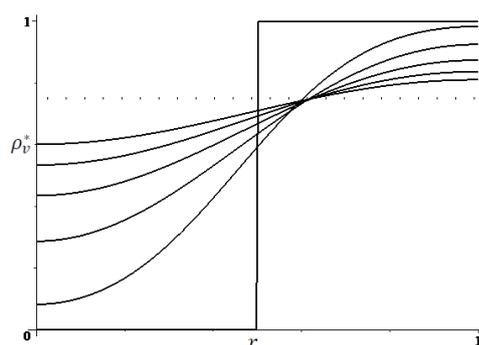


Fig. 8. Vapor density distribution of the volatile component along the radial coordinate at successive times

нице раздела фаз, а также кривизны поверхности на давление насыщенного пара. Формализована постановка задачи в ограниченном объеме (чашка Петри). Проведено тестирование модели на ряде задач, имеющих аналитические решения. Так, определена форма поверхности жидкости, находящейся в поле тяжести и соприкасающейся с одной стороны с вертикальной стенкой: пленка начинает тянуться вверх по ограничивающей стенке, и асимптотически принимает форму в соответствии с аналитическим решением. Неравномерный нагрев тонкого слоя жидкости на горизонтальной твердой плоскости приводит к прогибу свободной поверхности вниз, после чего профиль пленки асимптотически принимает форму в соответствии с аналитическим решением. При равномерном нагреве/охлаждении подложки проверено сохранение массы. Сопоставление численных расчетов с аналитическими решениями дает основание считать результаты достоверными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекежанова В. Б. Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела / В. Б. Бекежанова, О. Н. Гончарова, Е. В. Резанова, И. А. Шефер // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 23-35. DOI: 10.7868/S0568528117020062
2. Иванова Н. А. Термокапиллярное движение тонкой пленки бинарного спиртосодержащего раствора / Н. А. Иванова, К. А. Бородина // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2020. Том 20. № 1. С. 64-78. DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-1-64-78
3. Самарский А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики. Учебное пособие. 3-е изд., доп. / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 424 с.
4. Способ охлаждения электронного оборудования пленочными и капельными потоками жидкости с использованием оребрения: Патент на изобретение

- RU 2706325 C1, 15.11.2019. Заявка № 2018146202 от 25.12.2018 / О. А. Кабов, Д. В. Зайцев, Е. Ф. Быковская.
5. Холпанов Л. П. Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела / Л. П. Холпанов, В. Я. Шкадов. М.: Наука, 1990. 271 с.
 6. Ajaev V. S. Evaporation of ultra-thin liquid films into air / V. S. Ajaev, D. Brutin, L. Tadrist // *Microgravity Science and Technology*. 2010. Vol. 22. No. 3. Pp. 441-446. DOI: 10.1007/s12217-010-9209-6
 7. Bekezhanova V. B. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions / V. B. Bekezhanova, O. N. Goncharova // *Microgravity Science and Technology*. 2020. Vol. 32. No. 2. Pp. 139-154. DOI: 10.1007/s12217-019-09764-0
 8. Gatapova E. Ya. Shear-driven flows of locally heated liquid films / E. Ya. Gatapova, O. A. Kabov // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2008. Vol. 51 (19-20). Pp. 4797-4810. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.02.038
 9. Ivanova N. A. Laser-induced capillary effect in thin layers of water-alcohol mixtures / N. A. Ivanova, A. V. Tatosov, B. A. Bezuglyi // *The European Physical Journal E*. 2015. Vol. 38. No. 6 (June). Art. 60. DOI: 10.1140/epje/i2015-15060-1
 10. Kabova Yu. Evaporation of a thin viscous liquid film sheared by gas in a microchannel / Yu. Kabova, V. V. Kuznetsov, O. Kabov et al. // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2014. Vol. 68. Pp. 527-541. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.09.019
 11. Landau L. *Mechanics of Fluids* / L. Landau, E. Lifschitz. New York: Pergamon Books Ltd., 1987. 244 pp.
 12. Malyuk A. Yu. Optofluidic lens actuated by laser-induced solutocapillary forces / A. Yu. Malyuk, N. A. Ivanova // *Optics Communications*. 2017. Vol. 392. Pp. 123-127. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.01.040
 13. Malyuk A. Yu. Varifocal liquid lens actuated by laser-induced thermal Marangoni forces / A. Yu. Malyuk, N. A. Ivanova // *Applied Physics Letters*. 2018. Vol. 112. No. 103701. DOI: 10.1063/1.5023222
 14. Merkt D. Benard-Marangoni convection in a strongly evaporating fluid / D. Merkt, M. Bestehorn // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 185. Pp. 196-208. DOI: 10.1016/S0167-2789(03)00234-3
 15. Miladinova S. Effects of nonuniform heating and thermocapillarity in evaporating films falling down an inclined plate / S. Miladinova, G. Lebon // *Acta Mechanica*. 2005. Vol. 174. No. 1. Pp. 33-49. DOI: 10.1007/s00707-004-0166-2
 16. Nepomnyashchy A. *Interfacial Convection in Multilayer System* / A. Nepomnyashchy, I. Simanovskii, J. C. Legros. Springer, Boston, MA (publ.), 2012. 513 pp. DOI: 10.1007/978-0-387-87714-3
 17. Oron A. Nonlinear dynamics of irradiated thin volatile liquid films / A. Oron // *Physics of Fluids*. 2000. Vol. 12. Pp. 29-41. DOI: 10.1063/1.870282
 18. Ovcharova A. S. Multilayer system of films heated from above / A. S. Ovcharova // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. Vol. 114. Pp. 992-1000. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.06.123
 19. Simanovskii I. B. *Convective Instabilities in Systems with Interface* / I. B. Simanovskii, A. A. Nepomnyashchy. London: Gordon and Breach, 1993.
 20. Tatosova K. A. Droplet formation caused by laser-induced surface-tension-driven flows in binary liquid mixtures / K. A. Tatosova, A. Yu. Malyuk, N. A. Ivanova // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2017. Vol. 521. Pp. 22-29. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2016.07.004

Kseniia A. BORODINA¹

UDC 532.5

**MODEL OF THE EVOLUTION OF A BINARY
HOMOGENEOUS SOLUTION FILM UNDER THERMAL ACTION**

¹ Senior Lecturer, Department of Fundamental Mathematics
and Mechanics, University of Tyumen
k.a.borodina@mail.ru; ORCID: 0000-0002-3847-0636

Abstract

The research on the motion of liquid films has recently become increasingly important, which is associated with the expanding field of their practical application. For example, the promising methods of cooling include the technologies based on the evaporation of a thin layer of liquid. Based on the Marangoni effects, optical elements of medical diagnostics systems can be developed, the performance of which can be quickly reconfigured for the necessary tasks in comparison with the currently used movable lenses. Many authors in Russia and abroad are engaged in a comprehensive theoretical study of film flows, which should not lag behind the studies of the possibilities of their application. At the same time, the motion of films of a binary homogeneous solution has not been studied enough, and this is the object of this study.

This paper considers the behavior of a liquid film containing a volatile component when it is heated. The importance of taking into account the Laplace pressure jump at the interface is indicated, as well as the effect of surface curvature on the saturated vapor pressure. Formulation of the problem is formalized in a limited volume. The stability of the numerical scheme was investigated by the harmonics method.

The results confirm the reliability of the model by testing it on a number of problems with analytical solutions: preservation of a liquid volume when a film in a gravity field touches a vertical wall; determination of the profile of the liquid layer with uneven heating of the substrate; mass balance at uniform heating and cooling.

Citation: Borodina K. A. “The model of the evolution of a binary homogeneous solution film under thermal action”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 6, no. 4 (24), pp. 48-68.
DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-4-48-68

Keywords

Thermocapillary flow, Marangoni convection, liquid film.

DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-4-48-68

REFERENCES

1. Bekezhanova V. B., Shefer I. A., Goncharova O. N., Rezanova E. B. 2017. "Stability of two-layer fluid flows with evaporation at the interface". *Fluid Dynamics*, vol. 52, no. 2, pp. 189-200. DOI: 10.1134/S001546281702003X [In Russian]
2. Ivanova N. A., Borodina K. A. 2020. "Thin film thermocapillary motion of binary alcohol-containing solution". *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, vol. 20, no. 1, pp. 64-78. DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-1-64-78 [In Russian]
3. Samarskiy A. A., Popov Yu. P. 1992. *Difference methods for solving problems of gas dynamics*. Tutorial. 3rd edition, revised. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. 424 pp. [In Russian]
4. Kabov O. A., Zaitsev D. V., Bykovskaya E. F. 2019. "Method of cooling electronic equipment with film and drip liquid streams using finning". Patent for invention RU 2706325 C1, 15 November. Application No. 2018146202 of 25 December 2018. [In Russian]
5. Kholpanov L. P., Shkadov V. Ya. 1990. *Hydrodynamics and Heat Transfer with the Interface*. Moscow: Nauka. 271 pp. [In Russian]
6. Ajaev V. S., Brutin D., Tadrif L. 2010. "Evaporation of ultra-thin liquid films into air". *Microgravity Science and Technology*, vol. 22, no. 3, pp. 441-446. DOI: 10.1007/s12217-010-9209-6
7. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. 2020. "Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions". *Microgravity Science and Technology*, vol. 32, no. 2, pp. 139-154. DOI: 10.1007/s12217-019-09764-0
8. Gatapova E. Ya., Kabov O. A. 2008. "Shear-driven flows of locally heated liquid films". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 51 (19-20), pp. 4797-4810. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.02.038
9. Ivanova N. A., Tatosov A. V., Bezuglyi B. A. 2015. "Laser-induced capillary effect in thin layers of water-alcohol mixtures". *The European Physical Journal E*, vol. 38, no. 6 (June), art. 60. DOI: 10.1140/epje/i2015-15060-1
10. Kabova Yu., Kuznetsov V. V., Kabov O. et al. 2014. "Evaporation of a thin viscous liquid film sheared by gas in a microchannel". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 68, pp. 527-541. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.09.019
11. Landau L., Lifschitz E. 1987. *Mechanics of Fluids*. New York: Pergamon Books Ltd. 244 pp.
12. Malyuk A. Yu., Ivanova N. A. 2017. "Optofluidic lens actuated by laser-induced solutocapillary forces". *Optics Communications*, vol. 392, pp. 123-127. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.01.040
13. Malyuk A. Yu., Ivanova N. A. 2018. "Varifocal liquid lens actuated by laser-induced thermal Marangoni forces". *Applied Physics Letters*, vol. 112, no. 103701. DOI: 10.1063/1.5023222

14. Merkt D., Bestehorn M. 2003. "Benard-Marangoni convection in a strongly evaporating fluid". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 185, pp. 196-208.
DOI: 10.1016/S0167-2789(03)00234-3
15. Miladinova S., Lebon G. 2005. "Effects of nonuniform heating and thermocapillarity in evaporating films falling down an inclined plate". *Acta Mechanica*, vol. 174, no. 1, pp. 33-49. DOI: 10.1007/s00707-004-0166-2
16. Nepomnyashchy A., Simanovskii I., Legros J. C. 2012. *Interfacial Convection in Multilayer System*. Springer, Boston, MA (publ). 513 pp.
DOI: 10.1007/978-0-387-87714-3
17. Oron A. 2000. "Nonlinear dynamics of irradiated thin volatile liquid films". *Physics of Fluids*, vol. 12, pp. 29-41. DOI: 10.1063/1.870282
18. Ovcharova A. S. 2017. "Multilayer system of films heated from above". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 114, pp. 992-1000.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.06.123
19. Simanovskii I. B., Nepomnyashchy A. A. 1993. *Convective Instabilities in Systems with Interface*. London: Gordon and Breach.
20. Tatosova K. A., Malyuk A. Yu., Ivanova N. A. 2017. "Droplet formation caused by laser-induced surface-tension-driven flows in binary liquid mixtures". *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, vol. 521, pp. 22-29.
DOI: 10.1016/j.colsurfa.2016.07.004