

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ППАЗМЫ

Александр Иванович ФИЛИПШОВ¹
Оксана Валентиновна АХМЕТОВА²
Алексей Алексеевич КОВАЛЬСКИЙ³
Марина Анатольевна ЗЕЛЕНОВА⁴

УДК 532.546 (685); 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЯ В НЕФТЕНОСНОМ ПЛАСТЕ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ

¹ доктор технических наук,
профессор кафедры общей и теоретической физики,
Стерлитамакский филиал, Башкирский государственный университет
filiprovai@rambler.ru

² доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей и теоретической физики
Стерлитамакский филиал, Башкирский государственный университет
ahoksana@yandex.ru

³ кандидат физико-математических наук, директор,
Стерлитамакский филиал, Башкирский государственный университет
aakov68@mail.ru

⁴ кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей и теоретической физики
Стерлитамакский филиал, Башкирский государственный университет
marina_ag@inbox.ru

Цитирование: Филиппов А. И. Моделирование полей давления в нефтеносном пласте с учетом изменения уровня жидкости в скважине / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский, М. А. Зеленова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2021. Том 7. № 2 (26). С. 95-112.

DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-2-95-112

Аннотация

Представлена численная модель полей давления при фильтрации пластового флюида с учетом влияния скважины. Математическая постановка рассматриваемой задачи включает уравнение пьезопроводности в цилиндрической системе координат и отличается неклассическим граничным условием, полученным из соотношения баланса масс и импульса. Произведено сопоставление численных расчетов и аналитического решения, построенного в пространстве изображений Лапласа — Карсона. Для обращения которого в пространство оригиналов использован численный алгоритм ден Изегера. В результате сопоставления определена область применимости вычислительного эксперимента. Показано, что в случае ограниченного пласта точное решение задачи совпадает с численным экспериментом на всей области определения. В случае бесконечного пласта численная модель применима только в области малых времен, размеры которой определяются значениями правой границы и радиальной координаты.

Ключевые слова

Фильтрация, дебит, скважина, конечно-разностная схема, интегральное преобразование, вычислительный эксперимент, сопоставление расчетов.

DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-2-95-112

Введение

Развитие методов прогноза состояния пласта и выбора оптимальных способов увеличения дебита скважин требует совершенствования математических моделей полей давления в скважине и пласте, которые описываются дифференциальным уравнением пьезопроводности в частных производных [6, 7, 15]. Разнообразие строения нефтегазовых залежей, способов эксплуатации и конструкций скважин определяет широкий круг задач, большинство из которых исследованы недостаточно [11, 13]. В частности, проблема учета влияния насосного оборудования на поля давления приводит к неклассическим граничным условиям, представленным нелокальными интегро-дифференциальными уравнениями со следами производных из внешних областей.

Несмотря на большое количество математических методов исследования проблем подземной гидродинамики [10, 14], расширение круга задач, допускающих хотя бы приближенное аналитическое или численное решение, сопряжено с необходимостью развития фундаментальных разделов математической и вычислительной физики. Успехи в области вычислительной техники и программирования обеспечивают возможность создания принципиально новых моделей полей давления при разработке месторождений углеводородов. С другой стороны, развитие аналитических методов позволяет осуществлять более глубокий анализ происходящих процессов и верифицировать численные модели. В данной статье показано, что существенный прогресс в исследовании физических процессов в пласте и скважине может быть достигнут путем комплексирования численных и аналитических методов. Ниже представлен пример комплексного решения

задачи о фильтрационном поле давления в пласте с учетом производительности насоса, обеспечивающего отбор из скважины.

В работе [12] авторами представлен численно-аналитический комплекс из точного решения задачи для пласта бесконечной толщины и численного решения для ограниченного достаточно мощного пласта ($L = e^5$). Сравнение численных и аналитических кривых такого комплекса обнаруживает расхождение между кривыми при больших значениях времени.

В отличие от [12], в предлагаемой статье обсуждается комплекс численного и точных аналитических решений для ограниченного и неограниченного пластов. Обсуждается вопрос влияния границы и близости полученных решений.

Методология исследования

Объект исследования

Исследуются поля давления в добывающей скважине и идеально вскрытом анизотропном нефтенасыщенном пласте. В представленной модели величины пористости и проницаемости считаются независимыми от радиальной r_d и вертикальной z_d координат, кровля и подошва, окружающие продуктивный пласт, являются непроницаемыми для жидких углеводородов и его компонентов. Учтено, что доля извлекаемой через скважину радиуса r_0 из пласта нефти идет на изменение уровня жидкости в стволе скважины, являясь частью баланса массы углеводородов в системе «скважина — пласт». На границе скважины и пласта заданы условия, объединяющие пласт и скважину в систему со взаимозависимыми полями давлений.

Постановка задачи

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Здесь $H(-H_1 < z_d < H_2)$ — толщина перфорированной области. Ось z_d цилиндрической системы координат совпадает с осью скважины, а радиальная координатная линия r_d направлена перпендикулярно оси. Представленная система координат обладает осевой симметрией, а течение флюида в пласте считается плоскорадиальным.

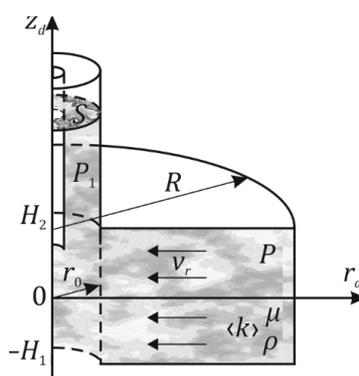


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. The geometry of the task

При добыче жидких полезных ископаемых скважинным методом отбор жидкости насосом осуществляется из ствола скважины, хотя приток продукции происходит из насыщенного пласта. Поток флюида из продуктивного пласта идет на обеспечение производительности насоса и изменение уровня в стволе скважины. Если производительность насоса больше дебита коллектора, то жидкость частично отбирается из скважины. При этом происходит понижение уровня, и как следствие, уменьшается гидростатическое давление в интервале пласта, что приводит к росту притока. В противном случае часть притока из пласта расходуется на повышение уровня, а величина гидростатического давления возрастает, снижая приток из пласта.

Математическое описание этих процессов подробно представлено в [12]. Постановка обсуждаемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial P_{1d}}{\partial t_d} - \frac{2\pi\rho g}{S\mu} \langle k \rangle H \left(r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right) \Big|_{r_d=r_0} = -\frac{\rho g}{S} Q, r_d < r_0, t_d > 0, \quad (1)$$

$$\mu\beta m \frac{\partial P_d}{\partial t_d} = \langle k \rangle \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left(r_d \frac{\partial P_d}{\partial r_d} \right), r_d > r_0, t_d > 0, \quad (2)$$

$$P_d|_{r_d=r_0} = P_{1d}, P_d|_{r_d=R_d} = 0, \quad (3)$$

$$P_d|_{t_d=0} = 0, P_{1d}|_{t_d=0} = 0.$$

Здесь R_d — радиус контура питания.

Представим задачу (1)-(3) в безразмерном виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0, 1 < r < R, t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \alpha \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = -q, t > 0, \quad (5)$$

$$P|_{r=1} = P_1, P|_{r=R} = 0, \quad (6)$$

$$P|_{t=0} = 0, P_1|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

где использованы следующие критерии

$$t = \frac{\langle k \rangle t_d}{\mu m \beta r_0^2}, r = \frac{r_d}{r_0}, R = \frac{R_d}{r_0}, P = \frac{P_d}{P_0}, P_1 = \frac{P_{1d}}{P_0},$$

$$\alpha = m\beta\rho g H \frac{2\pi r_0^2}{S}, q = m\rho g \beta r_0^2 \frac{\mu Q}{P_0 \langle k \rangle S}.$$

Отметим, что функция P_1 , фигурирующая в первом граничном условии (7), определяется дифференциальным уравнением (5) со следом производной из внешней области. Задачи такого рода широко используются в теплофизике для описания

температурных полей в пласте и скважине. Примером такого рода является круг задач, при постановке и решении которых использована «схема сосредоточенной емкости» [8, 9].

Методы решения

Представленная задача содержит нелокальное условие (3), которое выражено в виде дифференциального уравнения, связывающего поля давлений в пласте и скважине. В связи с этим в процессе решения задачи использована совокупность конечно-разностного и аналитического методов.

Для построения аналитических выражений использовано интегральное преобразование Лапласа — Карсона, которое обеспечивает представление производной по времени t в виде произведения параметра преобразования p и искомой функции в пространстве изображений P^u [3, 4]. Для обращения найденных в пространстве изображений полей давления в пространство оригиналов использован численный метод ден Изегера [16].

С целью численной реализации полей давления при радиальной фильтрации рассматриваемая задача преобразована к линейной геометрии для уравнения пьезопроводности с переменным коэффициентом, который представляет геометрический фактор исходной задачи. В линейной постановке составлена конечно-разностная программа численных расчетов полей давления при фильтрации в пласте с учетом влияния скважинных условий.

Конечно-разностная схема

Для удобства построения сетки в задаче с граничным условием в виде дифференциального уравнения, осуществлена замена переменной $x = \ln r$. Преимуществом такого представления задачи является возможность использования равномерной сетки, которая в реальной задаче будет соответствовать сгущающейся — при уменьшении значений r . Недостатком такого перехода от радиальной к линейной геометрии является возникновение переменного коэффициента e^{-2x} в уравнении пьезопроводности:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = -q, t > 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = e^{-2x} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, x > 0, t > 0, \tag{9}$$

$$P|_{x=0} = P_1, P|_{x=L} = 0, \tag{10}$$

$$P|_{t=0} = 0, P_1|_{t=0} = 0, \tag{11}$$

где $L = \ln R$.

Для задачи (8)-(11) построена программа, которая обеспечивает расчеты полей давления в пласте и скважине. Уравнения (8), (9) и условия (10), (11) записаны в конечно-разностной форме на равномерной сетке. Шаг по пространственной координате x принят равным l , а по времени обозначен τ . Текущие номера узлов

обозначены по оси x через $i \in [0, I]$, по времени t — $n \in [0, N]$. Здесь $I + 1, N + 1$ — количество узлов сетки по оси x и времени t , которые изменяются в пределах интервалов пространственной координаты и времени $x \in [0, L = lI], t \in [0, T = \tau N]$ соответственно. Значения искомого поля давления в узлах равномерной сетки обозначим P_i^n , где верхний индекс соответствует временному слою, а нижний — текущей пространственной координате.

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является наличие условия на левой границе (8), представленного в виде уравнения в частных производных первого порядка на границе «скважина — пласт», которое содержит функцию $P_1 = P_0^n$, связанную условием (10) с пластовым давлением $P = P_0^n$. Для построения конечно-разностного аналога уравнения (8) производную по времени представим в виде отношения разности в текущем (n) и предыдущем ($n - 1$) временном слое к величине шага по времени τ при $i = 0$. Производную по пространственной координате выразим через разность значений давления в первой ($i = 1$) и нулевой ($i = 0$) точках в предыдущем временном слое ($n - 1$).

Это позволяет представить конечно-разностный аналог уравнения (8) в виде равенства

$$P_0^n = P_0^{n-1} + \frac{\alpha\tau}{l} (P_1^{n-1} - P_0^{n-1}) - q\tau, \quad (12)$$

обеспечивающего вычисление значения давления в скважине в текущем временном слое через значения в предшествующем. Полученное рекуррентное соотношение обеспечивает реализацию явной схемы для рассматриваемой задачи.

Построение поля давления в пласте осуществляется по формуле (9). В конечно-разностной схеме искомая функция также обозначена P_i^n и связывает значения поля давления в следующем временном слое P_i^n с их величинами в предыдущем P_i^{n-1} [1, 2]. Для этого производная по времени также представлена в виде отношения разности в текущем (n) и предыдущем ($n - 1$) временном слое к величине шага по времени τ при $i \neq 0$.

Вторая производная по пространственной координате x получена исходя из ее определения, отношение приращения функции к приращению аргумента, где в качестве функции выступает аппроксимация первой производной. В итоге получаем так называемую центральную производную, связывающую центральный слой с предыдущим и последующим. Таким образом, вторая производная по координате x в центральном слое определяется как отношение суммы значений функции давления в предыдущем ($i - 1$), последующем ($i + 1$) слоях и удвоенным значением функции в центральном слое (i), взятом со знаком минус, к квадрату шага по пространственной координате в предыдущем временном слое ($n - 1$).

Окончательно конечно-разностный аналог уравнения (9) представится как

$$P_i^n = P_i^{n-1} + \tau e^{-2il} \left(\frac{P_{i-1}^{n-1} + P_{i+1}^{n-1} - 2P_i^{n-1}}{l^2} \right), \quad (13)$$

где P_i^n — значения искомого поля давления в узлах равномерной сетки, $i \in [1, I - 1]$, $n \in [1, N]$.

Для обеспечения устойчивости алгоритма принято следующее соотношение между пространственными и временными шагами $\tau < 0,1l^2$. Если положить величину экспоненциального коэффициента перед второй пространственной производной, равной максимальному значению, то соответствующее предельное соотношение имеет вид $(\tau/l^2) < 0,5$. Таким образом, принятое соотношение между пространственными и временными шагами с большим запасом гарантирует выполнение условия устойчивости при любых значениях r и t .

Предварительно осуществлено тестирование программы на сходимость и устойчивость и произведен контроль полученных результатов в процессе функционирования программы. Выполнено сопоставление численных расчетов с аналитическими моделями.

Точное аналитическое решение

Задача (4)-(7) допускает аналитическое решение. Для его поиска использовано интегральное преобразование Лапласа — Карсона [5], при этом задача в пространстве изображений представлена как

$$pP^u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P^u}{\partial r} \right), 1 < r < R, \tag{14}$$

$$pP_1^u - \alpha \left(r \frac{\partial P^u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = -q, \tag{15}$$

$$P^u|_{r=1} = P_1^u, \tag{16}$$

$$P_1^u|_{r=R} = 0. \tag{17}$$

Здесь p — параметр преобразования.

Решение уравнения (14) записывается в виде линейной комбинации бесселевых функций мнимого аргумента [4]

$$P^u = \frac{K_0(R\sqrt{p})I_0(r\sqrt{p}) - I_0(R\sqrt{p})K_0(r\sqrt{p})}{K_0(R\sqrt{p})I_0(\sqrt{p}) - I_0(R\sqrt{p})K_0(\sqrt{p})} P_1^u. \tag{18}$$

Выражение производной поля давления по радиальной координате имеет вид

$$\frac{\partial P^u}{\partial r} = \sqrt{p} \frac{K_0(R\sqrt{p})I_1(r\sqrt{p}) + I_0(R\sqrt{p})K_1(r\sqrt{p})}{K_0(R\sqrt{p})I_0(\sqrt{p}) - I_0(R\sqrt{p})K_0(\sqrt{p})} P_1^u. \tag{19}$$

Для определения функции P_1^u , подставим выражения $\left(r \frac{\partial P^u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1}$, следующее из (19), в уравнение (15). Получим линейное алгебраическое уравнение, из которого находим

$$P_1^u = q \left[\alpha \sqrt{p} \frac{K_0(R\sqrt{p})I_1(\sqrt{p}) + I_0(R\sqrt{p})K_1(\sqrt{p})}{K_0(R\sqrt{p})I_0(\sqrt{p}) - I_0(R\sqrt{p})K_0(\sqrt{p})} - p \right]^{-1}. \tag{20}$$

Если в задаче (4)-(7) правую границу устремить в бесконечность $R \rightarrow \infty$, то полученные решения принимают вид [12]

$$P^u = \frac{K_0(r\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})} P_1^u, \quad (21)$$

где

$$P_1^u = -\frac{qK_0(\sqrt{p})}{\sqrt{p}[\sqrt{p}K_0(\sqrt{p}) + \alpha K_1(\sqrt{p})]}. \quad (22)$$

Выражения (21), (22) также можно получить из (18) и (20) полагая в них $R \rightarrow \infty$.

Построение оригиналов в виде аналитических выражений непосредственным переходом на основе интеграла Меллина представляется весьма громоздкими преобразованиями даже для простой функции (21). Аналитические выражения в пространстве оригиналов возможно записать лишь для (21), (22), воспользовавшись соотношениями, представленными в монографии [4]. В результате получим аналитическое выражение для поля давления с учетом влияния скважины при $q = \text{const}$ в бесконечно протяженном по радиальной координате пласте в виде

$$P = -\frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{u^2} (1 - e^{-u^2 t}) \times \frac{J_0(ru)[uY_0(u) - \alpha Y_1(u)] - Y_0(ru)[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]}{[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2}. \quad (23)$$

Выражение для давления в скважине, согласно (6), следует из полученного решения при $r = 1$

$$P_1 = P|_{r=1} = \frac{2q\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{u^2} (1 - e^{-u^2 t}) \times \frac{J_0(u)Y_1(u) - J_1(u)Y_0(ru)}{[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2}. \quad (24)$$

Построение оригиналов соотношений (18) и (20) аналитическим способом ведет к громоздким математическим выкладкам. По этой причине в настоящей работе их обращение выполнено на основе численного алгоритма ден Изегера [16]. При высокой универсальности этот метод требует постоянного контроля хотя бы в отдельных точках, для чего использовано сопоставление с численными методами.

Анализ результатов представленного комплексного подхода к решению задачи о поле давления в нефтеносном пласте с учетом изменения уровня жидкости в скважине осуществлен сопоставлением кривых давления, полученных с использованием численного алгоритма и аналитических формул.

Результаты исследования

Расчеты выполнены при следующих значениях безразмерных параметров: $q = 295$, $\alpha = 0,00005292$, которые получены исходя из физических характеристик

пласта и скважины: $m = 0,3$; $\mu = 10^{-2}$ Па · с; $\rho = 900$ кг/м³; $\langle k \rangle = 10^{-14}$ м²; $H = 1$ м; $\beta = 10^{-8}$ Н/м²; $r_0 = 0,1$ м, $Q = 1,1 \cdot 10^{-4}$ м³/с.

Сопоставление результатов вычислительных экспериментов с помощью численных и аналитических моделей позволяет решать важные новые проблемы, касающиеся аналитико-численных подходов. Ниже исследовано влияние правой границы задачи на поля давления в пласте и скважине. С одной стороны, наличие правой границы обязательно для численных методов, а применение результатов расчетов к реальным коллекторам нефти и газа сопряжено с неизвестным заранее положением этой границы. С другой стороны, аналитическое решение задачи в виде интеграла от комбинации бесселевых функций (23) построено для случая, когда правая граница расположена на бесконечности, что недостижимо для конечно-разностных методов. Таким образом, аналитические и численные эксперименты представляют в этом смысле два альтернативных подхода, сопоставление которых позволяет выявить признаки влияния правой границы и с помощью сравнения с результатами экспериментального измерения давления в скважине определить ее наличие. На практике определение положения правой границы является важной задачей, решение которой представляет возможность для экспериментального определения положения этой границы относительно скважины.

Для определения влияния границы контура питания на рис. 2 осуществлено сопоставление кривых, рассчитанных с использованием описанного выше конечно-разностного алгоритма (штриховые линии) и по аналитической формуле для неограниченного пласта (23) (сплошные линии). Пары кривых, обозначенные цифрами 1, 2, 3, соответствуют различным расстояниям от оси скважины.

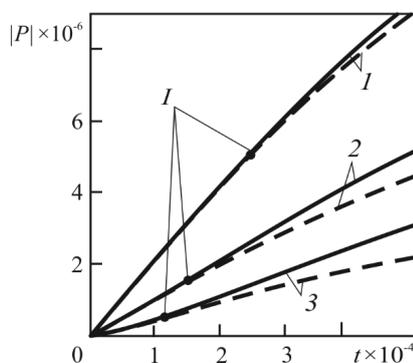


Рис. 2. Изменение давления с течением времени в разных точках от оси скважины: 1 — $r = 1$; 2 — $r = 7,4$; 3 — $r = 54,6$. Сплошные кривые соответствуют аналитическому решению для бесконечно протяженного пласта, штриховые получены на основе конечно-разностной схемы

Fig. 2. Pressure changes over time at different points from the well axis: 1 — $r = 1$; 2 — $r = 7.4$; 3 — $r = 54.6$. Solid lines correspond to the analytical solution for an infinitely extended reservoir; the dashed lines were obtained on the basis of the finite-difference scheme

Сопоставление штриховых и сплошных кривых показывает, что при малых временах различие между аналитическими и численными расчетами лежит в пределах погрешностей. Это означает, что при малых временах влияние правой границы на поле давления пренебрежимо мало. При увеличении времени наблюдается расхождение штриховой и сплошной кривых, причем штриховая кривая расположена ниже сплошной. Это означает, что абсолютные значения поля давления, полученные с помощью конечно-разностного метода, по величине меньше значений, рассчитанных на основе аналитической модели, при всех значениях радиальной координаты, т. е. расстояния до оси скважины. Поскольку конечно-разностные расчеты учитывают влияние правой границы, а аналитические — нет, расхождение между соответствующими штриховыми и сплошными кривыми в каждой паре 1, 2, 3 является признаком влияния правой границы.

Из рисунка видно, что удаление границы контура питания на бесконечность приводит к увеличению значений перепада давления при том же дебите. При удалении от скважины возмущения давления уменьшаются.

Приближение точки наблюдения к правой границе сетки уменьшает временной интервал применимости результатов для моделей с неограниченной справа областью, полученных на основе численного алгоритма. Сопоставление позволяет также корректировать задание правой границы для обеспечения достаточной точности расчетов в моделях с бесконечной правой границей.

Из рисунка видно, что численный алгоритм решения задачи имеет ограничения применимости по времени и может быть использован только до наступления времени, обозначенного на рис. 2 цифрой 1, начиная с которого правая граница искажает реальные значения функции давления. При этом временной интервал применимости уменьшается с ростом радиальной координаты. Для представленных на рисунке данных, при значении радиальной координаты $r = 1$, этот интервал ограничен $t < 4,1 \cdot 10^4$, для $r = 7,4$ — не превышает $t < 2,3 \cdot 10^4$, а в точке $r = 54,6$ — меньше $t < 1,6 \cdot 10^4$. Следует отметить, что заметное различие кривых ощутимо в принятом на графиках масштабе при отклонении исследуемого параметра более чем на одну атмосферу. Для более точного анализа отклонения следует построить девиантные кривые, которые представляют зависимость расхождения результатов расчетов, полученных с помощью различных методов, в том числе аналитических, поскольку расчеты с использованием формул также неизбежно содержат определенные погрешности.

На рис. 3 представлено сопоставление кривых давления, построенных по аналитической формуле (23) для неограниченного пласта, и кривых, полученных в ходе численного решения задачи при различных значениях правой границы. Расчеты выполнены для точки удаленной от оси скважины на расстояние $r = 20,1$.

Из рисунка видно, что область применимости численных расчетов находится в прямой зависимости от координаты правой границы $x = L$. Чем дальше от оси скважины находится правая граница, тем больше интервал применимости численных расчетов. В точке $r = 20,1$ при $L = 5$ интервал применимости численных вычислений соответствует $t = 500$; при $L = 6$ — $t = 1\ 300$; при $L = 7$ — $t = 5\ 400$.

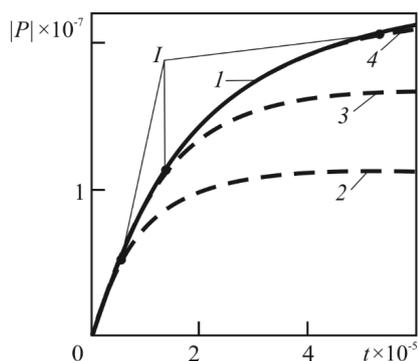


Рис. 3. Изменение давления с течением времени в точке $r = 20,1$ с учетом значений правой границы: 1 — аналитическое решение; 2 — $L = 7$; 3 — $L = 6$; 4 — $L = 5$. Сплошные кривые соответствуют аналитическому решению, штриховые получены конечно-разностными расчетами

Fig. 3. Pressure variations with time at the point $r = 20.1$ taking into account the values of the right boundary: 1 — analytical solution; 2 — $L = 7$; 3 — $L = 6$; 4 — $L = 5$. The solid lines correspond to the analytical solution, the dashed lines were obtained by finite-difference calculations

На рис. 4 представлен анализ девиантных кривых. Здесь изображены кривые отклонения численного решения с правой границей $L = 5(R = e^5)P_R$ от точного аналитического решения для неограниченного пласта P_∞ , определяемой формулой (22) $\Delta P = P_\infty - P_R$.

Для $r = 1$ на рис. 4а, 4б величина ΔP^* не превышает 530, при этом точка II локализована при $t = 12\ 168$, а точка III — $t = 13\ 500$. На рис. 4в, 4г значение радиальной координаты принято равным $r = 7,4$, наблюдаемое расхождение кривых немного возрастает и соответствует $\Delta P^* = 2\ 470$; соответствующие значения времени при этом составляют в точке II $t = 8\ 220$, в точке III — $t = 9\ 500$.

Девиантный анализ предполагает исследование отклонений во всем диапазоне, которое и осуществлено для других точек внутри продуктивного пласта. В результате установлено, что величины отклонений ΔP^* с удалением от оси скважины могут как возрастать, так и уменьшаться, например, в точке $r = 20,1$ максимум девианты составляет $\Delta P^* = 1\ 320$ (точка II наблюдается при $t = 6\ 968$; точка III — $t = 7\ 680$), а в точке $r = 54,6$ максимальное отклонение не превышает значения $\Delta P^* = 90$ (точка II приурочена к значению времени $t = 558$; III — $t = 650$).

Следует отметить, что отклонения не являются случайными, они подчинены определенным закономерностям и имеют как отрицательный, так и положительный знак. Исследование девиант представляет самостоятельную научную проблему, имеющую фундаментальное и прикладное значение. Особое значение это имеет в случае, когда на основе численных расчетов предпринимается попытка выявления новых физических эффектов и закономерностей. При этом необходимо убедиться, что величина соответствующих эффектов превышает

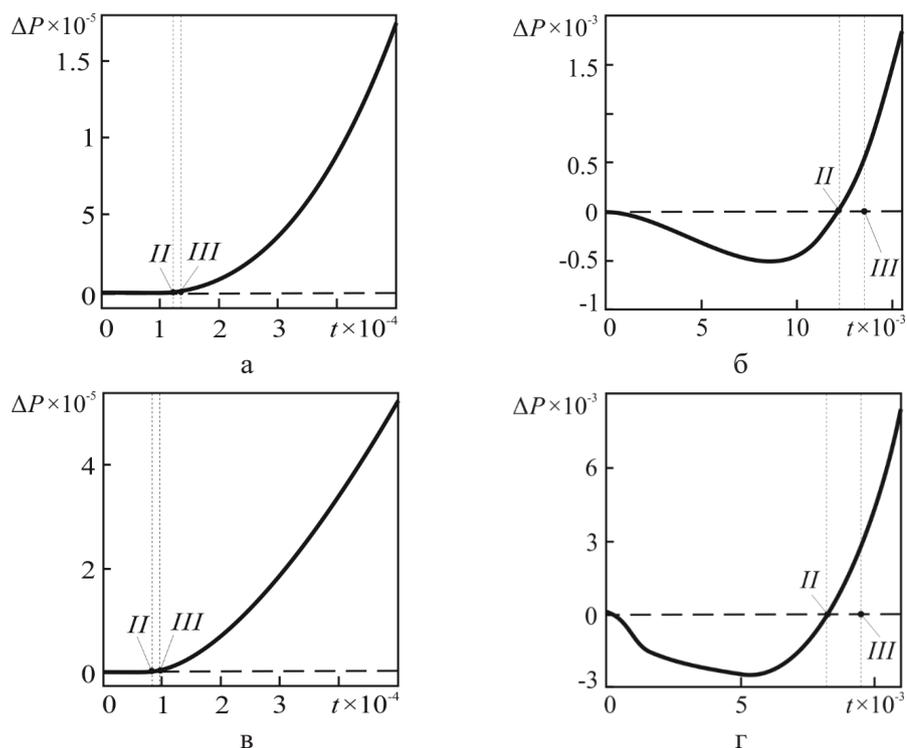


Рис. 4. Отклонение численного решения от аналитического в точках пласта с различным удалением от оси скважины: а, б — $r = 1$; в, г — $r = 7,4$. Точка II соответствует пересечению кривых, точка III соответствует значениям отклонения в ожидаемом направлении, величина которых превышает максимальные различия численного и аналитических решений ΔP^*

Fig. 4. Deviation of the numerical solution from the analytical one at the points of the reservoir with different distance from the well axis: а, б — $r = 1$; в, г — $r = 7.4$. Point II corresponds to the intersection of the curves, point III corresponds to the deviation values in the expected direction, the value of which exceeds the maximum difference between the numerical and analytical solutions ΔP^*

максимум девианты, которая несет информацию о вычислительных программных расхождениях и целиком определяется используемыми алгоритмами.

На рис. 5 приведено сопоставление численных экспериментов для поля давления на основе аналитического решения (27) для безграничного пласта $R \rightarrow \infty$ (кр. 1), решения в пространстве изображений (22) с использованием обращения, основанного на алгоритме ден Изегера, для ограниченного пласта с контуром питания $R = e^5$ (кр. 2) и конечно-разностных расчетов с правой границей при $L = 5$ (кр. 3).

Совпадение с точностью до девианты кривых 2 и 3, изображенных на рис. 5, свидетельствует о достоверности конечно-разностных расчетов и высокой точности

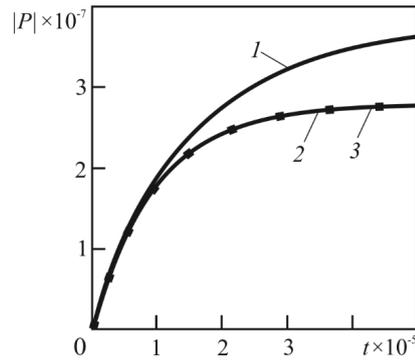


Рис. 5. Сопоставление кривых давления в точке $r = 1$, рассчитанные разными способами: 1 — на основе аналитического решения (27) с правой границей $R \rightarrow \infty$; 2 — аналитического решения (22) с использованием алгоритма ден Изегера при $R = e^5$; 3 — на основе конечно-разностной программы при $L = 5$

Fig. 5. Comparison of the pressure curves at the point $r = 1$ calculated by different methods: 1 — based on the analytical solution (27) with the right boundary $R \rightarrow \infty$; 2 — analytical solution (22) using the Den Isager algorithm at $R = e^5$; 3 — based on a finite-difference program at $L = 5$

обращения аналитического решения (22) на основе алгоритма ден Изегера. Это согласие оказывается чрезвычайно важным для определения области отсутствия влияния правой границы в интервале времени от нуля до 10^5 , который устанавливается путем сопоставления всех кривых.

Заключение

Итак, аналитико-численный анализ результатов решения задачи на основе различных методов позволяет уточнять определение вклада различных параметров в результаты расчетов полей давления в нефтегазовых пластах с учетом влияния скважины. Предложенный девиантный анализ, основанный на совместном применении конечно-разностных и аналитических методов, позволяет избежать ошибок интерпретации, связанных с программными факторами и тем самым значительно увеличить точность и достоверность вычислительного эксперимента. Развитые приемы будут весьма полезны при использовании в программном обеспечении для решения (по своей природе некорректных) обратных задач, связанных с определением физических параметров пласта на основе экспериментальных измерений давления в скважине.

Список принятых обозначений

H — толщина перфорированной области пласта, м; v_r — радиальная компонента скорости фильтрации, м/с; Q — объемный дебит скважины, м³/с; r_0 — радиус скважины, м; S — площадь заполняемого сечения ствола скважины, м²; R — радиус контура питания, м; $\langle k \rangle$ — проницаемость, м²; m — пористость; P, P_1 — давление в пласте и скважине, соответственно, Па; t — время, с; x — линейная координата;

r, z — координаты цилиндрической системы, m ; β — упругость пористой среды, Па^{-1} ; ρ — плотность жидкости, $\text{кг}/\text{м}^3$; μ — вязкость, $\text{Па} \cdot \text{с}$; g — ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$; P_0 — нормировочный перепад давления, Па ; α — релаксационный параметр; q — безразмерная функция источников; L — правая граница сетки по пространственной координате x ; T — верхняя граница сетки по координате t ; τ — шаг по временной координате t ; l — шаг по пространственной координате x ; p — параметр преобразования Лапласа — Карсона.

Нижний индекс d (от dimensional — размерный) используется при переходе от размерных величин к безразмерным в случае, когда обозначение величины совпадает в размерной и безразмерной постановке.

Верхний индекс u — функция в пространстве изображений Лапласа — Карсона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 416 с.
2. Вержбицкий В. М. Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. М: Высшая школа, 2002. 839 с.
3. Диткин В. А. Операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Высшая школа, 1966. 405 с.
4. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. М.: Наука, 1964. 487 с.
5. Кузнецов Д. С. Специальные функции / Д. С. Кузнецов. М.: Высшая школа, 1965. 423 с.
6. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 628 с.
7. Николаевский В. Н. Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов. М.: Недра, 1970. 339 с.
8. Пудовкин М. А. Температурные процессы в действующих скважинах / М. А. Пудовкин, А. Н. Саламатин, В. А. Чугунов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 168 с.
9. Рубинштейн Л. И. Температурные поля в нефтяных пластах / Л. И. Рубинштейн. М.: Недра, 1972. 276 с.
10. Филиппов А. И. Конечно-разностная и аналитическая модели фильтрационного потока в несовершенном вскрытом пласте / А. И. Филиппов, А. А. Ковальский, М. Р. Губайдуллин // Инженерная физика. 2019. № 9. С. 22-30. DOI: 10.25791/infizik.09.2019.836
11. Филиппов А. И. Низкочастотное торможение фильтрационной волны в слоисто-неоднородных проницаемых пластах / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Том 59. № 3 (349). С. 103-110. DOI: 10.15372/PMTF20180311
12. Филиппов А. И. Поле давления в пласте при заданном дебите скважины / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский, М. А. Зеленова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Том 6. № 3 (23). С. 58-78. DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-58-78

13. Филиппов А. И. Поле давления при радиальной фильтрации в неоднородном ортотропном пласте в асимптотическом приближении / А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, М. Р. Губайдуллин // Инженерно-физический журнал. 2015. Том 88. № 6. С. 1285-1296.
14. Хайруллин М. Х. Определение параметров призабойной зоны вертикальной скважины по результатам термогидродинамических исследований / М. Х. Хайруллин, М. Н. Шамсиев, В. Р. Гадильшина, П. Е. Морозов, А. И. Абдуллин, Е. Р. Бадертдинова // Инженерно-физический журнал. 2016. Том 89. № 6. С. 1470-1474.
15. Чарный И. А. Подземная гидродинамика / И. А. Чарный. М.: Гостоптехиздат, 1963. 397 с.
16. Den Iseger P. Numerical transform inversion using Gaussian quadrature / P. Den Iseger // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2006. No. 20. Pp. 1-44.
DOI: 10.1017/S0269964806060013

Aleksandr I. FILIPPOV¹
Oksana V. AKHMETOVA²
Aleksey A. KOVALSKIY³
Marina A. ZELENOVA⁴

UDC 532.546 (685); 519.63

**MODELING PRESSURE FIELDS
IN A PETROLEUM RESERVOIR
TAKING INTO ACCOUNT THE CHANGE
OF LIQUID LEVEL IN THE WELL**

¹ Dr. Sci. (Tech.), Professor,
Department of General and Theoretical Physics,
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
filippov@rambler.ru

² Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of General and Theoretical Physics,
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
ahoksana@yandex.ru

³ Cand. Sci. (Phys.-Math.), Director,
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
aakov68@mail.ru

⁴ Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,
Department of General and Theoretical Physics,
Sterlitamak Branch of the Bashkir State University
marina_ag@inbox.ru

Abstract

This article presents a numerical model of pressure fields during filtration of reservoir fluid, which accounts for the effect of the well. The mathematical formulation of the problem under

Citation: Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A., Zelenova M. A. 2021. "Modeling pressure fields in a petroleum reservoir taking into account the change of liquid level in the well". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 7, no. 2 (26), pp. 95-112.

DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-2-95-112

consideration includes the equation of piezoconductivity in a cylindrical coordinate system and differs in a non-classical boundary condition obtained from the ratio of the balance of mass and momentum. The authors compare the numerical calculations and the analytical solution constructed in the Laplace — Carson image space. Den Iseger's numerical algorithm is used to convert it to the original space. As a result of the comparison, the area of applicability of the computational experiment was determined. It is shown that in the case of a limited reservoir, the exact solution of the problem coincides with a numerical experiment over the entire domain of definition. In the case of an infinite reservoir, the numerical model is applicable only in the region of small times, the dimensions of which are determined by the values of the right boundary and the radial coordinate.

Keywords

Filtration, flow rate, well, finite-difference scheme, integral transformation, computational experiment, comparison of calculations.

DOI: 10.21684/2411-7978-2021-7-2-95-112

REFERENCES

1. Aziz H., Settari E. 2004. *Mathematical Modeling of Reservoir Systems*. Moscow: Institut kompyuternyh issledovaniy. 416 pp. [In Russian]
2. Verzhbitskiy V. M. 2002. *Numerical Basics*. Moscow: Vysshaya shkola. 839 pp. [In Russian]
3. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. 1966. *Operational Calculus*. Moscow: Vysshaya shkola. 405 pp. [In Russian]
4. Karslou G., Eger D. 1964. *Thermal Conductivity of Solids*. Moscow: Nauka. 487 pp. [In Russian]
5. Kuznetsov D. S. 1965. *Special Functions*. Moscow: Vysshaya shkola. 423 pp. [In Russian]
6. Masket M. 2004. *The Flow of Homogeneous Fluids in a Porous Medium*. Moscow-Izhevsk: IKI. 628 pp. [In Russian]
7. Nikolaevskiy V. N., Basniev K. S., Gorbunov A. T., Zotov G. A. 1970. *Mechanics of Saturated Porous Media*. Moscow: Nedra. 339 pp. [In Russian]
8. Pudovkin M. A., Salamatin A. N., Chugunov V. A. 1977. *Temperature Processes in Operating Wells*. Kazan: Izdatelstvo Kazanskogo universiteta. 168 pp. [In Russian]
9. Rubinshtein L. I. 1972. *Temperature Fields in Oil Reservoirs*. Moscow: Nedra. 276 pp. [In Russian]
10. Filippov A. I., Kovalskiy A. A., Gubajdullin M. R. 2019. "Finite-difference and analytical models of filtration flow in an imperfectly penetrated reservoir". *Inzhenernaya fizika*, no. 9, pp. 22-30. [In Russian]
11. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A. 2018. "Low-frequency deceleration of the filtration wave in layered heterogeneous permeable formations". *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, vol. 59, no. 3 (349), pp. 103-110. [In Russian]
12. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Kovalskiy A. A., Zelenova M. A. 2020. "The pressure field in the reservoir at a given well flow rate". *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, vol. 6, no. 3 (23), pp. 58-78. DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-58-78 [In Russian]

13. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Gubaydullin M. R. 2015. "Pressure field with radial filtration in a heterogeneous orthotropic formation in the asymptotic approximation". *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, vol. 88, no. 6, pp. 1285-1296. [In Russian]
14. Khayrullin M. H., Shamsiev M. N., Gadilshina V. R., Morozov P. E., Abdullin A. I., Badertdinova E. R. 2016. "Determination of the parameters of the bottomhole zone of a vertical well based on the results of thermohydrodynamic studies". *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, vol. 89, no. 6, pp. 1470-1474. [In Russian]
15. Charnyy I. A. 1963. *Underground Hydrodynamics*. Moscow: Gostoptekhizdat. 397 pp. [In Russian]
16. Den Iseger P. 2006. "Numerical transform inversion using Gaussian quadrature". *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, no. 20, pp. 1-44. DOI: 10.1017/S0269964806060013