МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н.
__________ К.Ю.Басинский
15 июня 2021 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
магистерская диссертация

ВОЛНЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ НАЧАЛЬНЫМ КОНЦЕНТРИРОВАННЫМ ВОЗВЫШЕНИЕМ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

01.04.01 Математика
Магистерская программа *«Вычислительная механика»*

Выполнила работу
студентка 2 курса
очной
формы обучения — Ильина Алёна Игоревна

Научный руководитель
к.ф.-м.н. — Басинский Константин Юрьевич

Рецензент
к.э.н., заведующий кафедрой алгебры и математической логики ТюмГУ — Вершинина Светлана Валерьевна

Тюмень
2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Волна – это изменение состояния среды (возмущение), распространяющееся в этой среде и переносящее с собой энергию. Во многих случаях волновые процессы представляют собой процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени, однако возможны и уединенные волны в виде распространяющихся в пространстве импульсных возмущений. Физическая природа данного процесса может быть различна: механическая, гравитационная, химическая, электромагнитная.

Распространение волны, как правило, сопровождается переносом энергии, а не массы, однако также возможен вариант с переносом материи. Ввиду многообразия волновых процессов, абсолютных свойств последних выделить не удается. В рассматриваемом случае жидкости предполагается идеальной несжимаемой, с отсутствием вязкости и теплопроводности. Таким образом, количественная оценка взаимодействия жидкости с твёрдой поверхностью определяется, непосредственно, из решения соответствующей линейной краевой задачи теории потенциала. Данный подход к вопросам математического моделирования ряда физических явлений, обусловленных волновым движением жидкости, даёт возможность определить, теоретическим путём, параметры движения жидкости и её воздействия на различные преграды.

В связи с проектированием, строительством и эксплуатацией морских гидротехнических сооружений различного назначения, необходимо учитывать процессы распространения волн и их взаимодействия с преградами, поэтому вопрос изучения движения жидкостей со свободной поверхностью и её взаимодействия с твёрдым телом для таких областей науки и техники как: гидротехника, геофизика и судовождение, представляет огромный интерес

Целью данной работы является установить общие закономерности распространения волн от местного начального изменения поверхности жидкости.

Задачи исследования:

- Изучить данную тему с помощью научной литературы;
- Поставить краевую задачу для движения идеальной несжимаемой жидкости и построить математическую модель;
- Найти аналитическое решение задачи;
- Проанализировать полученные графики.

1 КОЛЕБАНИЕ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАССЕЙНЕ

1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИИ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАССЕЙНЕ

Рассмотрим бассейн постоянной глубины h, ограниченный с боков вертикальными стенками $x = 0,\ x = l$, снизу – непроницаемым дном, а сверху – свободной поверхностью. Будем предполагать, что жидкость является идеальной несжимаемой.

Допустим, что ось абсцисс расположена по уровню жидкости в состоянии ее равновесия, ось Oy направлена вверх. Тогда у нас имеется плоскопараллельное движение жидкости, т.е. движение жидкости, при котором все её частицы движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Скорость и давление совершенно не зависят от координаты z. В дальнейшем, будем называть такие движения плоскими и говорить о плоской задаче.

Пусть в начальный момент времени, $t = 0$, к поверхности жидкости приложено некоторое импульсивное давление, а частицам жидкости, принадлежащим поверхности, даны некоторые смещения. (Рис. 1.1)

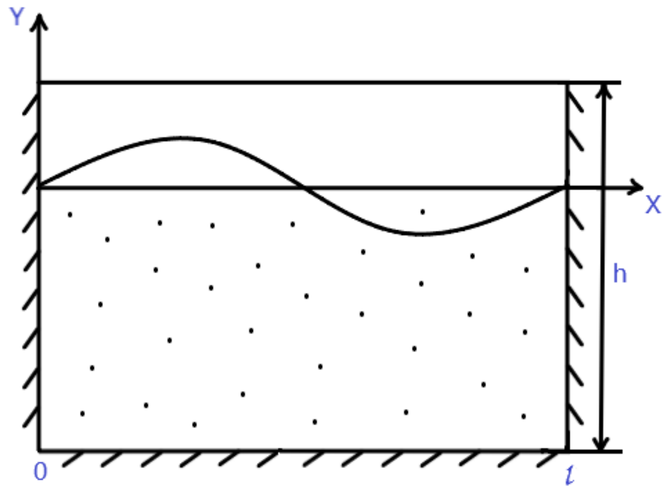

Рисунок 1.1 – Постановка задачи о колебании жидкости в прямоугольном бассейне

Движение жидкости подчиняется ряду законов механики, явная запись которых приводит к уравнениям движения жидкости. Для написания уравнений движения несжимаемой жидкости необходимо использовать законы сохранения массы, количества жидкости и другие законы.

1.2 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

1.2.1 УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ (ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ)

Выделим в жидкости объем V. Сначала это может быть куб, а далее, по мере движения жидкости, он деформируется. В любой момент времени этот объем содержит одни и те же материальные частицы [Мазо, Поташев, с. 21]. В нем находится вещество, которое обладает плотностью ρ. Тогда масса вещества вычисляется по формуле

$$m = \int\limits_{V_L} \rho \, dV \text{, кг.} \tag{1.2.1}$$

Закон сохранения массы выражается формулой

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 0. \tag{1.2.2}$$

Выделив контрольный материальный объем V_L и совпадающий с ним в начальный момент эйлеров объем V_E , то при $t > 0$ объем V_L деформируется одновременно со средой, однако в лагранжевых координатах останется неподвижным. Возьмем некоторое свойство f среды и проинтегрируем его по элементарному лагранжеву объему V_L. Изучим его изменение во времени. Справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V_L} f \, dL = \int\limits_{V_E} \frac{\partial f}{\partial t} \, df + \int\limits_{S} f \, v_n \, dS, \tag{1.2.3}$$

связывающая изменение свойств в объемах Лагранжа и Эйлера. Здесь v_n – скорость потока по нормали к поверхности S объема V_E. Второе слагаемое в правой части равенства (1.2.3) выражает поток f через границу эйлерова объема, а первый член характеризует изменение изучаемого свойства внутри V_E.

Математический смысл формулы (1.2.3) заключается в связывании интегрирования по объему и интегрирования по поверхности. Следующую важную формулу, устанавливающую связь между потоком вектора через замкнутую поверхность S и его дивергенцией в объеме V , ограниченном данной поверхностью, дает теорема Остроградского-Гаусса:

$$\int_S \nu_n \, dS = \int_V div \, \vec{v} \, dV \tag{1.2.4}$$

где $\vec{v} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ – скорость жидкости.

Подставим (1.2.1) в (1.2.1) и обратимся к формуле (1.2.3), которая выражает производную от деформируемого объема. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} \rho \, dV = \int_{V_E} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_S \rho \, \nu_n \, dS = 0. \tag{1.2.5}$$

Перепишем (1.2.5) с учетом теоремы Остроградского-Гаусса (1.2.4) и получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} \rho \, dV = \int_{V_E} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_{V_E} div \, (\rho \vec{v}) \, dV = 0. \tag{1.2.6}$$

Из того, что объем V_E выбран произвольно, а интеграл от некоторой величины по этому объему равен нулю, следует, что сама эта величина тождественно равна нулю [Мазо, Поташев, с. 22]. Поэтому из (1.2.6) следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \, (\rho \vec{v}) = 0. \tag{1.2.7}$$

Это и есть уравнение неразрывности.

Поскольку жидкость несжимаема, ее плотность постоянна, $\rho = const$, значит, $\partial \rho / \partial t = 0$ и ρ можно вынести из-под оператора дивергенции и сократить. Получим

$$div \, \vec{v} = 0 \tag{1.2.8}$$

Ввиду плоскости нашей задачи, скорость жидкости будет иметь вид $\vec{v} = (\nu_x, \nu_y)$, а в раскрытой форме (1.2.8) распишется как:

$$div \, \vec{v} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = 0.$$

Выражение (1.2.8) – следствие уравнения неразрывности, это и есть условие несжимаемости жидкости [Алешков, 1981, с.5]

1.2.2 УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ (ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ)

Выделим в жидкости некоторый объём V еще раз. Полная сила, действующая на выделенный объем жидкости, равна интегралу

$$-\oint p\, d\vec{f}, \tag{1.2.9}$$

взятому по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. Преобразовав в интеграл по объему, получаем:

$$-\oint p\, d\vec{f} = -\int_V grad(p)\, dV. \tag{1.2.10}$$

Отсюда можно сделать вывод, что на каждый элемент объема жидкости dV действует со стороны окружающей его жидкости сила $-dV\, grad(P)$. Другими словами, можно сказать, что на единицу объема жидкости действует сила $-grad(p)$ [Ларионов, Филипов, с. 11].

Также, на каждый элемент объёма жидкости dV действует со стороны окружающей его среды сила $-grad(p)dV$, а на единицу объема – сила $\vec{F} = -\nabla p$. По второму закону Ньютона для массы единицы объема среды ρ получим:

$$\vec{F} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ или } \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p). \tag{1.2.11}$$

Учитывая, что у нас плоская задача и $\vec{v} = (t, x, y)$, имеем

$$d\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}dy,$$

значит, ускорение единицы объема среды равно

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ввиду того, что

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \qquad \frac{dy}{dt} = v_y,$$

введем оператор ∇ и подставим данное выражение в (1.2.11), получим

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right)=-\nabla p$$

Окончательно, уравнение движения среды принимает вид

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}=-\frac{\nabla p}{\rho} \qquad (1.2.12)$$

Это уравнение было названо в честь Эйлера, который первым его получил. Если среда движется в поле тяжести, то с учетом силы тяжести, действующей на единицу объема, уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}=\vec{F}-\frac{\nabla p}{\rho} \qquad (1.2.13)$$

Распишем выражение $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v}=\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)-\vec{v}\times rot\,\vec{v}$$

Тогда уравнение (1.2.13) примет вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}+\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)-\vec{v}\times rot\,\vec{v}=\vec{F}-\frac{\nabla p}{\rho}, \qquad (1.2.14)$$

Выражение (1.2.14) является уравнением движения Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости в форме Громеки-Ламба [Давыдова, с. 46].

1.3 ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим уравнение Громеки-Ламба (1.2.14) с учетом следующих предположений.

1. *Движение потенциально*, т.е. существует такая функция φ – потенциал течения, что вектор скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$ определяется как $\vec{v} = grad\ \varphi = \nabla\varphi$, или декартовой системе координат [Мазо, Поташев, с.74]:

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{1.3.1}$$

Если движение потенциально, то в нем нет вихрей. Вычислим вектор завихренности:

$$\vec{\omega} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = 0.$$

2. Для всего потока можно ввести *единую* функцию давления P, такую что

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla P.$$

В общем случае можно ввести единую функцию давления, когда давление зависит только от плотности, $p = p(\rho)$.

При сделанных предположениях из уравнения (1.2.14) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi) + \nabla\left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right) = -\nabla P + \vec{F} \tag{1.3.2}$$

В случае, если массовые силы также потенциальны, т.е. $\vec{F} = -gy = \nabla G$, где (–g) – ее ускорение (ось y направлена вертикально вверх), то из уравнения (1.3.2) получается равенство

$$\nabla\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{2} + P - G\right\} = 0.$$

Выражение в скобках не зависит от координат, но может зависеть от времени. Поэтому допустима запись :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{2} + P - G = f(t). \tag{1.3.3}$$

Здесь f – произвольная функция времени. Уравнение (1.3.3) называют интегралом Коши-Лагранжа [Мазо, Поташев, с.75].

Нетрудно заметить, что для установившихся течений, когда $\partial\varphi/\partial t = 0$, а f не зависит от времени. Если потенциал φ известен, то можно найти давление. Обычно правую часть f определяется по известным значениям скорости и давления на границе потока. Функция f будет одинаковой для всех точек потока, поэтому достаточно знать ее значение хотя бы в одной точке. Таким образом, в задаче неизвестным остается только одна функция - потенциал скорости φ. Для его нахождения, используют уравнение неразрывности (1.2.8) и определение скорости через потенциал (1.3.1):

$$\vec{v} = grad\ \varphi = \nabla\varphi = 0. \qquad (1.3.4)$$

Подставив (1.3.4) в (1.2.8), получаем классическое уравнение Лапласа для потенциала

$$div\ grad\ \varphi = \Delta\varphi = 0. \qquad (1.3.5)$$

В декартовой системе координат оно имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad (1.3.6)$$

Это уравнение стационарно, т.е. φ не зависит от времени. Потенциальное течение представляет собой важный класс физически содержательных потоков. А также, потенциальное течение есть идеализация реальных течений и в реальной жизни встречается очень редко. Нарушение потенциальности происходит из-за вязкости, провоцирующей появление вихрей. Однако, во многих случаях решение, полученное на основе потенциальных моделей, достаточно хорошо приближают действительность.

1.4 ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИИ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАССЕЙНЕ

Запишем уравнение свободной поверхности $y = \eta(x,t)$, где $\eta(x,t)$ – функция, которая определяет её форму, неизвестная на данный момент и в неявном виде векторное поле массовых сил $S = S(x,y,t) = y - \eta(x,t)$ [Алешков, 1981, с. 8].

Начальные условия состоят в задании состояния жидкости, занимающей весь объем, в некоторый заданный момент времени $t = 0$. Это значит, что должны быть заданы потенциал скорости и ордината свободной поверхности:

$$\varphi(x,y,0) = F(x,y), \qquad \eta(x,0) = f(x).$$

Для идеальной жидкости на твердой поверхности выполняется условие непротекания, т.е. нормальная проекция скорости к твердой поверхности равна нулю:

$$v_n = 0, \qquad (x,y) \in S_h.$$

Значит условие непротекания имеет место на дне:

$$v_y = 0, \qquad y = -h.$$

Условия на стенках будут выглядеть следующим образом:

$$v_x = 0, \qquad x = 0, \qquad x = l.$$

В терминах потенциала скорости условие непротекания примет вид [Сретенский, с. 281]:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=-h} = 0, \tag{1.4.1}$$

а условия на стенках:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=l} = 0. \tag{1.4.2}$$

На свободной поверхности S_η должно быть выполнено *кинематическое условие*.

Пусть частица жидкости с координатами $x = x(t),\ y = y(t)$ находится на свободной поверхности. Подставляя данные функции в уравнение свободной поверхности, получим тождество по времени:

$$y(t) = \eta(x, t)$$

После дифференцирования по времени получим:

$$v_y = v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad y = \eta(x, t). \tag{1.4.3}$$

Запишем выражение (1.4.3) в терминах потенциала скорости:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad y = \eta(x, t). \tag{1.4.4}$$

Выражение (1.4.4) является *кинематическим условием*.

Также на свободной поверхности должно быть выполнено динамическое условие. Под динамическим условием подразумевается, что давление на свободной поверхности задано:

$$p(x, y, t) = p_0(x, t), \tag{1.4.5}$$

где $y = \eta(x, t)$, p_0 – атмосферное давление.

Используя интеграл Лагранжа-Коши (1.3.3), *динамическое условие* можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{p_0}{\rho} + gy = f(t), \qquad (x, y) \in S_\eta. \tag{1.4.6}$$

1.5 ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТЕЙ СТОЯЧИХ ВОЛН

Так как у нас имеется вертикальная плоскость xOy, то на стенках будут приниматься следующие условия:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \qquad (1.5.1)$$

и возвышение η точки поверхности волнующейся жидкости над невозмущенным уровнем будет определяться формулой

$$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=0}. \qquad (1.5.2)$$

Начальные условия запишутся в виде:

$$\varphi(x, y, 0) = F(x, y), \qquad \eta = (x, 0) = f(x). \qquad (1.5.3)$$

Применим эти формулы к определению некоторых волновых движений частного вида. Найдем граничные условия. Первое из этих условий есть условие непротекания (1.4.1). Найдем частное решение уравнения Лапласа (1.3.6) в виде произведения функции переменного x на функцию переменного y:

$$\varphi = X(x; t) \cdot Y(y, t).$$

Подстановка этого произведения в уравнение Лапласа (1.3.6) приводит к следующего равенству

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \qquad (1.5.4)$$

Приравняем обе части этого равенства какому-нибудь постоянному, не зависящему от времени отрицательному числу – k^2. Тогда получим два следующих уравнения

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0, \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} - k^2Y = 0.$$

Интегрируем эти уравнения и получаем:

$$X = A_1(t)\cos kx + B_1(t)\sin kx,$$

$$Y = A_2(t)\,e^{ky} + B_2(t)\,e^{-ky},$$

где $A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t)$ – произвольные функции времени.

В силу граничного условия (1.4.1) функции $A_2(t)$ и $B_2(t)$ можно выразить через одну функцию $D(t)$ по формулам:

$$A_2(t) = \frac{1}{2}e^{kh}D(t), \qquad B_2(t) = \frac{1}{2}e^{-kh}D(t).$$

Отсюда функция $Y(y;t)$ может быть представлена так:

$$Y(y;t) = D(t)\,\mathrm{ch}\,k(y+h).$$

Составим теперь функцию $\varphi(x,y,t)$, получим

$$\varphi = [a(t)\cos kx + b(t)\sin kx]\cdot \mathrm{ch}\,k(y+h), \tag{1.5.5}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – произвольные функции времени, причем

$$a(t) = A_1(t)\cdot D(t), \qquad b(t) = B_1(t)\cdot D(t).$$

Для определения этих функций применим второе граничное условие (1.5.1), придем к следующим двум уравнениям

$$\frac{d^2a}{dt^2} + \sigma^2 a = 0, \qquad \frac{d^2b}{dt^2} + \sigma^2 b = 0,$$

где

$$\sigma^2 = gk\cdot \mathrm{th}(kh). \tag{1.5.6}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$a(t) = C_1\cos(\sigma t + \varepsilon_1), \;\; b(t) = C_2\cos(\sigma t + \varepsilon_2),$$

где $C_1, C_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – константы интегрирования.

Возвращаясь к формуле (1.5.5), находим выражение потенциала скоростей некоторого волнового движения:

$$\varphi = C_1\,\mathrm{ch}\,k(y+h)\cdot\cos kx\cdot\cos(\sigma t+\varepsilon_1) + C_2\,\mathrm{ch}\,k(y+h)\cdot\sin kx\cdot\cos(\sigma t+\varepsilon_2).$$

Найдем по формуле (1.5.2) соответствующее уравнение поверхности жидкости, получим

$$\eta = -\frac{\sigma}{g}C_1\,\mathrm{ch}\,kh\cdot\cos kx\cdot\sin(\sigma t+\varepsilon_1) - \frac{\sigma}{g}C_2\,\mathrm{ch}\,kh\cdot\sin kx\cdot\sin(\sigma t+\varepsilon_2).$$

Таким образом, общее возвышение поверхности жидкости может быть представлено в виде суммы двух волновых возвышений:

$$\eta_1 = a_1\cdot\cos kx\cdot\sin(\sigma t+\varepsilon_1), \qquad \eta_2 = a_2\cdot\sin kx\cdot\sin(\sigma t+\varepsilon_2) \tag{1.5.7}$$

где

$$a_1 = -\frac{\sigma}{g} C_1 \operatorname{ch} kh, \qquad a_2 = -\frac{\sigma}{g} C_2 \operatorname{ch} kh.$$

Этим волнам отвечают соответственно потенциалы скоростей

$$\varphi_1 = -\frac{a_1 g}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k\,(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \cdot \cos kx \ \cdot \cos\ (\sigma t + \varepsilon_1),$$
$$\varphi_2 = -\frac{a_2 g}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} \big(k\,(y+h)\big)}{\operatorname{ch} kh} \cdot \sin kx \ \cdot \cos\ (\sigma t + \varepsilon_2). \tag{1.5.8}$$

Далее будем рассматривать волновое движение, определяемое первым из этих потенциалов [Сретенский, с. 22]:

$$\varphi = -\frac{ag}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k\,(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \cdot \cos kx \ \cdot \cos \sigma t \tag{1.5.9}$$

и уравнение поверхности жидкости в виде:

$$\eta = a \cdot \cos kx \cdot \sin \sigma t. \tag{1.5.10}$$

1.6 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИИ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАССЕЙНЕ

Так как движение жидкости вызвано приложением импульсивных давлений, будет существовать потенциал скоростей $\varphi = \varphi(x, y;\ t)$. Если через $f\ (x)$ обозначить функцию, которая дает начальное импульсивное давление в точках поверхности жидкости, то первое начальное условие задачи будет записано следующим образом:

$$\rho\varphi\ (x, 0; 0) = f(x) \tag{1.6.1}$$

где ρ— плотность жидкости.

Примем в начальный момент времени уравнение поверхности жидкости как:

$$\eta = F(x). \tag{1.6.2}$$

Возвышение η точки поверхности волнующейся жидкости над невозмущенным уровнем определяется формулой (1.5.2).

На основании формулы (1.5.2), условие (1.6.2) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x, 0; 0)}{\partial t} = F(x). \tag{1.6.3}$$

Искомый потенциал скоростей $\varphi(x, y;\ t)$, помимо условий (1.6.1) и (1.6.3), должен удовлетворять добавочным граничным условиям. Прежде всего, условиям обтекания стенок и дна бассейна (1.4.1) и (1.4.2).

Далее, должно выполняться специфическое граничное условие волновой задачи (1.5.1).

Таким образом, мы должны найти интеграл уравнения Лапласа (1.3.6), удовлетворяющий начальным условиям (1.6.1), (1.6.3) и граничным условиям (1.4.1), (1.4.2), (1.5.1). Определив такой интеграл, находим скорости частиц жидкости в волновом движении и, кроме того, уравнение поверхности жидкости. Это уравнение записывается так:

$$\eta = \frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x, 0; t)}{\partial t} \tag{1.6.4}$$

Определим число k, которое входит в выражение потенциала (1.5.9), так, чтобы соблюдалось второе из граничных условий (1.5.1); первое и третье из этих условий рассматриваемым потенциалом уже удовлетворяются. Если число k выбрать в согласии с формулой

$$sin\, kl = 0, \qquad k_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad (n = 0,1,2, \dots),$$

то будут удовлетворяться все три условия (1.5.1). Если же число σ взять равным

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\pi g}{l} n \cdot \operatorname{th}\left(\frac{\pi g}{l} n\right)},$$

то будет соблюдаться и условие (1.6.6). Таким образом, потенциал скоростей

$$\varphi_n = -\frac{a_n g}{\sigma_n} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{l}(y+h)\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l} n} \cos\frac{\pi x}{l} n \ \cdot \cos\sigma_n t \qquad (1.6.5)$$

будет удовлетворять граничным условиям (1.5.1) и (1.6.6).

Уравнение поверхности жидкости запишется так:

$$\eta_n = a_n \cdot \cos\frac{\pi x}{l} n \cdot \sin\sigma_n t$$

Пользуясь найденными потенциалами скоростей, составим выражение потенциала скоростей в виде следующего бесконечного ряда:

$$\varphi(x, y;\ t) = g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{l}(y+h)\right)}{\sigma_n \operatorname{ch}\frac{\pi h}{l} n} \cdot \cos\frac{\pi x}{l} n \cdot (b_n \sin\sigma_n t - a_n \cos\sigma_n t) \qquad (1.6.6)$$

Этому потенциалу будет отвечать поверхность жидкости с уравнением

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \sin\sigma_n t + b_n \cos\sigma_n t) \cdot \cos\frac{\pi x}{l} n \qquad (1.6.7)$$

Потенциал скоростей (1.6.6) удовлетворяет всем граничным условиям нашей задачи.

Определим теперь коэффициенты a_n и b_n так, чтобы удовлетворились и начальные условия задачи (1.6.1), (1.6.3). Составляя эти условия, приходим к следующим уравнениям:

$$-g\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\sigma_n}\cos\frac{\pi x}{l}n = f(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos\frac{\pi x}{l}n = F(x).$$

Из этих уравнений получаем обычным приемом значения коэффициентов a_n и b_n:

$$a_n = -\frac{2\sigma_n}{\rho g l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi x}{l}n\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{\pi x}{l}n\,dx.$$

Подставив эти значения коэффициентов a_n и b_n в формулы (1.6.6) и (1.6.7), получим решение поставленной задачи об определении волнового движения жидкости, вызванного данным импульсивным давлением и данным начальным изменением равновесного положения поверхности жидкости:

$$\varphi(x,y;\ t) = \frac{2}{\rho l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi n}{l}(y+h)\right)}{\sigma_n ch\frac{\pi h}{l}n}\cdot\cos\frac{\pi x}{l}n\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\sigma_n t\cdot\int_0^l f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{l}n\,d\alpha + \frac{\rho g}{\sigma_n}\cdot\sin\sigma_n t\cdot\int_0^l F(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{l}n\,d\alpha\right),$$

$$\eta = \frac{2}{\rho g l}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n\cdot\cos\frac{\pi x}{l}n\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\rho g}{\sigma_n}\cdot\cos\sigma_n t\cdot\int_0^l F(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{l}n\,d\alpha - \sin\sigma_n t\cdot\int_0^l f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{l}n\,d\alpha\right).$$

При условии, что бассейна бесконечна, вместо этих формул имеем более простые, а именно [Сретенский, с. 284]:

$$\varphi(x,y;\ t) = \frac{2}{\rho l}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{\pi n}{l}y}\cdot\cos\frac{\pi x}{l}n\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\sigma_n t\cdot\int\limits_0^l f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{l}n\,d\alpha+\frac{\rho g}{\sigma_n}\cdot\sin\sigma_n t\cdot\int\limits_0^l F(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{l}n\,d\alpha\right),$$

$$\eta=\frac{2}{\rho g l}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n\cdot\cos\frac{\pi x}{l}n\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\rho g}{\sigma_n}\cdot\cos\sigma_n t\cdot\int\limits_0^l F(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{l}n\,d\alpha-\sin\sigma_n t\cdot\int\limits_0^l f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{l}n\,d\alpha\right)$$

Причем $\sigma_n^2=\frac{\pi g}{l}n$

Отметим, что функция $F(x)$ должна удовлетворять условию

$$\int\limits_0^l F(\alpha)d\alpha=0,$$

чтобы ось Ox была средним уровнем жидкости. Несложно проверить, что в силу этого условия будет при любом значении t удовлетворяться необходимое равенство

$$\int\limits_0^l \eta(\alpha,t)d\alpha=0.$$

2 ЗАДАЧА КОШИ-ПУАССОНА ДЛЯ БАССЕЙНА БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ-ПУАССОНА, НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Под задачей Коши — Пуассона обычно понимается задача об определении движения жидкости, обладающей свободной поверхностью, простирающейся неограниченно во всех горизонтальных направлениях, причем такое движение вызвано приложением импульсивного давления к поверхности с одновременным изменением горизонтального равновесного состояния свободной поверхности [Сретенский, с. 285].

Итак, примем, что в рассматриваемой плоской задаче поверхность жидкости неограниченно распространяется в сторону положительных и отрицательных x; предположим, кроме того, что жидкость имеет бесконечную глубину.

Предположим, что в начальный момент времени к поверхности жидкости приложено некоторое импульсивное давление

$$\rho\varphi\ (x, 0) = f(x) \tag{2.1.1}$$

а поверхности придана некоторая форма, задаваемая уравнением

$$\eta = F(x). \tag{2.1.2}$$

Необходимо по этим данным определить соответствующее движение жидкости и вид ее открытой поверхности в каждый момент времени.

Отметим, что задание импульсивного давления (2.1.1) определяет в момент времени $t\ =\ 0$ начальный потенциал скоростей во всей массе жидкости. Значит, поставленная задача равноценна определению движения жидкости по заданному начальному распределению скоростей всех ее частиц и по заданной начальной форме открытой поверхности.

2.2 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ-ПУАССОНА ДЛЯ БАССЕЙНА БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Для решения задачи Коши — Пуассона есть несколько методов. Самый простой – это метод, основанный на применении интеграла Фурье. Этот метод и будет изложен далее.

Рассмотрим сначала частную задачу. Предположим, что в начальный момент времени поверхности жидкости не сообщено никакого изменения от ее равновесного горизонтального состояния и все движение возникает лишь от приложенного импульсивного давления. Таким образом, $F(x) = 0$, и, следовательно,

$$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0,\ y=0} = 0. \qquad (2.2.3)$$

Уравнение Лапласа при любых значениях параметров α и k имеет частное решение следующего вида:

$$\varphi = A(\alpha)\cdot e^{ky}\cdot cosk(x-\alpha)\cdot cos\,\sigma t, \qquad (2.2.4)$$

здесь $A(\alpha)$ — произвольная функция параметра α. Скорости движения, возникающие от потенциала скоростей (2.2.4), стремятся к нулю при стремлении y к отрицательной бесконечности.

Заметив эти свойства функции (2.2.4), построим новый потенциал скоростей, интегрируя потенциал (2.2.4) по параметрам α и k соответственно в пределах $(—\infty;\infty)$ и $(0,\infty)$. Получим новое решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее указанным условиям в бесконечности:

$$\varphi = \int_0^\infty dk\int_{-\infty}^\infty A(\alpha)\cdot e^{ky}\cdot cosk(x-\alpha)\cdot cos\sqrt{gk}t\,d\alpha \qquad (2.2.5)$$

Допустим теперь, что функция $f\ (x)$ может быть представлена интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\int_{-\infty}^\infty f(\alpha)\cdot cosk(x-\alpha)\,d\alpha \qquad (2.2.6)$$

Положим в формуле (2.2.5) у $= 0$ и $t = 0$, получим

$$\varphi = \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) \cdot cosk(x-\alpha)\, d\alpha$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (2.2.6), устанавливаем, что начальное условие (2.2.1) будет выполнено, если функцию $A(\alpha)$ выбрать так:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi\rho} f(\alpha).$$

Отсюда искомое выражение потенциала скоростей, решающего поставленную задачу, будет писаться так:

$$\varphi = \frac{1}{\pi\rho}\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot e^{ky} \cdot cosk(x-\alpha) \cdot cos\sqrt{gk}t\, d\alpha \qquad (2.2.7)$$

На основании общей формулы (1.6.4) уравнение поверхности жидкости запишется для любого момента времени t следующим образом:

$$\eta = -\frac{1}{\pi\rho g}\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{gk} f(\alpha) \cdot cosk(x-\alpha) \cdot sin\sqrt{gk}t\, d\alpha \qquad (2.2.8)$$

Формулами (2.2.7) и (2.2.8) решается первая часть задачи Коши — Пуассона.

Рассмотрим затем вторую часть этой задачи, предположив, что в начальный момент времени импульсивное давление не прикладывается к поверхности жидкости и движение вызывается распадением начальной, задаваемой формы поверхности жидкости. Таким образом, начальные условия для второй части задачи будут писаться так:

$$\varphi(x,0;0) = 0, \qquad \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0,\ y=0} = F(x).$$

Возьмем такое частное решение уравнения Лапласа, аналогичное решению (2.2.4):

$$\varphi = B(\alpha) \cdot e^{ky} \cdot cos\, k(x-\alpha) \cdot sin\sqrt{gk}t \qquad (2.2.9)$$

Предположим, что функция F(x) может быть представлена интегралом Фурье:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cdot \cos k(x-\alpha)\, d\alpha$$

Частное решение (2.2.9) приводит к новому решению уравнения Лапласа, удовлетворяющему условию (1.5.1):

$$\varphi = \int_{0}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) \cdot e^{ky} \cdot \cos k(x-\alpha) \cdot \sin \sqrt{gk}t\, d\alpha$$

При $t = 0$ этот потенциал скоростей обращается в нуль, и если функцию $B(\alpha)$ взять равной

$$\frac{g}{\pi}\frac{F(\alpha)}{\sqrt{gk}},$$

то потенциал скоростей

$$\varphi = \frac{g}{\pi}\int_{0}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cdot e^{ky} \cdot \cos k(x-\alpha) \cdot \frac{\sin\sqrt{gk}t}{\sqrt{gk}}\, d\alpha \tag{2.2.10}$$

будет решать вторую часть задачи Коши — Пуассона.

Уравнение поверхности жидкости запишется следующим образом:

$$\eta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cdot \cos k(x-\alpha) \cdot \cos \sqrt{gk}t\, d\alpha \tag{2.2.11}$$

Ввиду линейности граничных условий задачи и уравнения Лапласа относительно потенциала и всех его производных, решение полной задачи Коши — Пуассона с соблюдением начальных условий (2.2.1) и (2.2.2) получится простым сложением формул (2.2.7), (2.2.10) и формул (2.2.8), (2.2.11).

3 ВОЛНЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ НАЧАЛЬНЫМ КОНЦЕНТРИРОВАННЫМ ВОЗВЫШЕНИЕМ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

3.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть в момент времени $t = 0$ поверхность жидкости получила в области начала координат концентрированное возвышение площади, равное единице, другими словами, предположим, что начальная форма поверхности жидкости задается в виде δ – функции.

Таким образом, функция $F(x)$, определяющая начальный вид поверхности жидкости, удовлетворяет условию [Сретенский, с. 288]

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cdot \cos k(x-\alpha)\, d\alpha = \cos kx \qquad (3.1.1)$$

Предположим, что в момент времени $t = 0$ к поверхности жидкости не приложены импульсивные давления, т.е. движение жидкости начинается без скоростей. В этих предположениях потенциал скоростей образовавшегося движения жидкости будет определяться формулой (3.1.10), с учетом условия (3.1.1), получим

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{ky} \cdot \cos kx \cdot \frac{\sin \sqrt{gk} t}{\sqrt{gk}} dk \qquad (3.1.2)$$

Приведем эту формулу к новому виду, пользуясь разложением Маклорена

$$\frac{\sin \sqrt{gk} t}{\sqrt{gk}} = t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(gkt^2)^n}{(2n+1)!}.$$

Получим

$$\varphi = \frac{gt}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(gt^2)^n}{(2n+1)!} \int_{0}^{\infty} e^{ky} \cdot \cos kx \cdot k^n\, dk \qquad (3.1.3)$$

Вычислим интеграл

$$\mathcal{J} = \int_{0}^{\infty} e^{ky} \cdot \cos kx \cdot k^n\, dk,$$

в котором $y < 0$. Имеем, полагая $x + iy = z$,

$$\mathcal{J} = Re\int_0^\infty e^{-ikz}\cdot k^n\,dk = Re\left[i^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\int_0^\infty e^{-ikz}\,dk\right] = Re\left[i^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{z}\right]$$

$$= (-1)^n\,n!\,Re\frac{i^{n-1}}{z^{n+1}}.$$

Примем

$$z = -ire^{\Theta i},$$

Тогда получим искомое выражение интеграла $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} = \frac{n!}{r^{n+1}}\cdot cos\,(n+1)\,\Theta.$$

Подставив это выражение в формулу (3.1.3), распишем потенциал скоростей в виде следующего бесконечного ряда:

$$\varphi = \frac{gt}{\pi r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdot\left(\frac{gt^2}{2r}\right)^n\cdot cos(n+1)\,\Theta. \qquad (3.1.4)$$

Дифференцируя эту формулу по времени, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{g}{\pi r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2n-1)}\cdot\left(\frac{gt^2}{2r}\right)^n\cdot cos(n+1)\,\Theta.$$

Для точек свободной поверхности угол $\Theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Откуда следует, что уравнение поверхности жидкости для $x > 0$, с учетом (3.1.3), запишется следующим образом:

$$\eta = \frac{1}{\pi x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(4m+1)}\cdot\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^{2m+1}. \qquad (3.1.5)$$

Преобразуем этот ряд к новому виду. Для этого введем функцию $S(\xi)$, определяемую таким степенным рядом:

$$S(\xi) = \frac{\xi}{1} + \frac{\xi^3}{1\cdot 3} + \frac{\xi^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots + \frac{\xi^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2n+1)} + \cdots \qquad (3.1.6)$$

Этот ряд легко суммируется:

$$\frac{dS}{d\xi} = 1 + \xi S(\xi), \qquad S(0) = 0.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^2} \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} d\alpha. \qquad (3.1.7)$$

Установив этот результат, найдем связь между рядами (3.1.5) и (3.1.6). Из формулы (3.1.6) получаем:

$$\frac{1}{2}[S(\xi) - iS(i\xi)] = \frac{\xi}{1} + \frac{\xi^3}{1 \cdot 3} + \frac{\xi^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{\xi^9}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9} + \cdots;$$

положим здесь

$$\xi = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{gt^2}{2x}};$$

найдем

$$\frac{1}{2}\left[S\left(e^{-\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\right) - iS\left(e^{\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\right)\right] = \eta \pi x e^{-\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{2x}{gt^2}}.$$

Таким образом, получаем новое представление ординат η свободной поверхности:

$$\eta = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{\frac{gt^2}{2x}} \left[e^{\frac{1}{4}\pi i} S\left(e^{-\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\right) + e^{-\frac{1}{4}\pi i} S\left(e^{\frac{1}{4}\pi i} \sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\right)\right] \qquad (3.1.8)$$

Освободимся в этой формуле от мнимых выражений. Полагая в формуле (3.1.7)

$$\xi = e^{-\frac{1}{4}\pi i} s, \qquad s = \sqrt{\frac{gt^2}{2x}},$$

получаем

$$S\left(e^{-\frac{1}{4}\pi i} s\right) = e^{-\frac{1}{2}is^2} \int_0^{e^{-\frac{1}{4}\pi i} s} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} d\alpha = e^{-\frac{1}{2}i\left(s^2 + \frac{1}{2}\pi\right)} \int_0^{s} e^{\frac{1}{2}\tau^2} d\tau.$$

Аналогично

$$S\left(e^{\frac{1}{4}\pi i} s\right) = e^{\frac{1}{2}i\left(s^2 + \frac{1}{2}\pi\right)} \int_0^{s} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau.$$

С помощью двух последних формул находим

$$e^{\frac{1}{4}\pi i} S\left(e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\right) + e^{-\frac{1}{4}\pi i} S\left(e^{\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{4}\pi i} \cdot e^{-\frac{1}{2}i\left(s^2+\frac{1}{2}\pi\right)} \int_0^s e^{\frac{1}{2}\tau^2} d\tau + e^{-\frac{1}{4}\pi i} \cdot e^{\frac{1}{2}i\left(s^2+\frac{1}{2}\pi\right)} \int_0^s e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}is^2} \int_0^s e^{\frac{1}{2}\tau^2} d\tau + e^{\frac{1}{2}is^2} \int_0^s e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau = \int_0^s e^{-\frac{1}{2}is^2} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau^2} d\tau + \int_0^s e^{\frac{1}{2}is^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau =$$

$$= \int_0^s \left(e^{-\frac{1}{2}is^2} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau^2} + e^{\frac{1}{2}is^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\right) d\tau = \int_0^s \left(e^{-\frac{1}{2}is^2} \cdot e^{\frac{1}{2}\tau^2} + e^{\frac{1}{2}is^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\right) d\tau =$$

$$= \int_0^s \left(e^{\frac{1}{2}i(\tau^2-s^2)} + e^{-\frac{1}{2}i(\tau^2-s^2)}\right) d\tau = 2\int_0^s cos\frac{1}{2}(\tau^2 - s^2)\, d\tau =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}} cos\frac{1}{2}\left(\tau^2 - \frac{gt^2}{2x}\right) d\tau.$$

Обращаясь к формуле (1.3.8), получаем уравнение поверхности жидкости, представленное через интегралы Френеля [Сретенский, с. 291]:

$$\eta = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\left[2\int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}} cos\frac{1}{2}\left(\tau^2 - \frac{gt^2}{2x}\right) d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi x}\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\left[\int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}} \left(cos\frac{\tau^2}{2} \cdot cos\frac{gt^2}{4x} + sin\frac{\tau^2}{2} \cdot sin\frac{gt^2}{4x}\right) d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi x}\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\left[cos\frac{gt^2}{4x}\int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}} cos\frac{\tau^2}{2} d\tau + sin\frac{gt^2}{4x}\int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}} sin\frac{\tau^2}{2} d\tau\right] \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{1}{\pi x}\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}\left[\cos\frac{gt^2}{4x}\int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}}\cos\frac{\tau^2}{2}d\tau + \sin\frac{gt^2}{4x}\int_0^{\sqrt{\frac{gt^2}{2x}}}\sin\frac{\tau^2}{2}d\tau\right]. \tag{3.1.9}$$

Две полученные нами формулы (3.1.5) и (3.1.9) позволяют: первая – вычислять η для малых значений безразмерного параметра

$$k = \frac{gt^2}{2x},$$

а вторая – для больших значений параметра k.

Также, эти формулы позволяют установить общие закономерности распространения волн от местного начального изменения поверхности жидкости.

Обратимся к формуле (3.1.5) и запишем ее в сокращенном виде:

$$\eta = \frac{1}{\pi x}K(k), \tag{3.1.10}$$

где $K(k)$ – бесконечный ряд этой формулы.

3.2 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Найдем для момента времени $t = 0$ положения максимальных и минимальных ординат поверхности жидкости. Продифференцируем уравнение (3.1.10) по x и приравниваем результат к нулю:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{\pi x^2}K(k) + \frac{1}{\pi x}K'\left(\frac{gt^2}{2x}\right) = -\frac{1}{\pi x^2}K(k) + \frac{1}{\pi x}\cdot\left(-\frac{gt^2}{2x^2}\right)K'\left(\frac{gt^2}{2x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi x^2}\big(K(k) + kK'(k)\big) = 0 \Rightarrow$$

$$K(k) + kK'(k) = 0 \qquad (3.2.1)$$

Решаем это уравнение:

$$k\frac{\partial K(k)}{\partial k} = -K(k) \Rightarrow \frac{\partial K(k)}{K(k)} = -\frac{\partial k}{k} \Rightarrow ln|K(k)| = -ln|k| + C \Rightarrow K(k) = \frac{C}{k}$$

Получаем бесконечное число корней

$$0 < k_1 < k_2 < k_3 < \cdots, \qquad (3.2.2)$$

имеющих предельную точку в бесконечности, ибо левая часть уравнения – целая функция переменного k.

По подсчетам Коши, обратные значения первых десяти чисел (3.2.2)

$$\frac{1}{k_1} = 0{,}32536\ldots, \qquad \frac{1}{k_2} = 0{,}120\ldots,$$

$$\frac{1}{k_3} = 0{,}069\ldots, \qquad \frac{1}{k_4} = 0{,}048\ldots,$$

$$\frac{1}{k_5} = 0{,}037\ldots, \qquad \frac{1}{k_6} = 0{,}030\ldots,$$

$$\frac{1}{k_7} = 0{,}025\ldots, \qquad \frac{1}{k_8} = 0{,}022\ldots,$$

$$\frac{1}{k_9} = 0{,}019\ldots, \qquad \frac{1}{k_{10}} = 0{,}017\ldots.$$

Перед каждым из этих чисел следует брать двойной знак. Знак минус отвечает волнам, идущим в направлении к $-\infty$; знак плюс отвечает волнам, идущим к $+\infty$. Обе системы волн являются симметричными по отношению друг другу относительно оси Oy. Далее, будем рассматриваем вторую систему.

Имея в виду значение параметра k, мы приходим к следующему закону распространения экстремальных ординат:

$$x_1 = \frac{1}{k_1}\frac{gt^2}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{k_2}\frac{gt^2}{2}, \qquad x_3 = \frac{1}{k_3}\frac{gt^2}{2}, \dots$$

Таким образом, вершины волн и нижние точки долин распространяются равномерно ускоренно в обе стороны от начала координат в бесконечность. Каждая вершина и каждой подошва волны имеет свое ускорение, и чем ближе к началу координат, месту возникновения волн, вершина или подошва волны, тем меньше ее ускорение.

Абсолютная величина каждой максимальной и минимальной ординаты претерпевает изменения при движении экстремальных ординат обратно пропорционально квадрату времени. Это заключение легко может быть выведено из уравнения (3.1.10), из которого следует, помимо прочего, что узлы волновой поверхности распространяются тоже равномерно ускоренно. Положение этих узлов находится из решения трансцендентного уравнения $K(k) = 0$. Обозначим через

$$0 < k'_1 < k'_2 < k'_3 < \cdots,$$

корни этого уравнения. Предельной точкой этих корней будет бесконечно удаленная точка. Каждый узел распространяется по закону

$$x = \frac{1}{k'_n}\frac{gt^2}{2}, \qquad (n = 1,2, \dots).$$

В каждый момент времени предельной точкой узлов волновой поверхности является источник всего волнового движения – начало координат. Ускорение узла прямо пропорционально его удаленности от начала координат, следовательно, участок волны между двумя последовательными узлами неограниченно растягивается с течением времени, и так как экстремальные ординаты убывают обратно пропорционально квадрату времени, то этот участок волны стремится совпасть с осью Ox.

Все эти заключения о законе распространения волн получены из уравнения (3.1.10). Дополнительные сведения можно получить из уравнения (3.1.9).

Определим вид волновой поверхности около начала координат. Для малых значениях x и при данном времени t интегралы формулы (3.1.9) могут быть заменены их предельным значениями:

$$\int_0^\infty cos\frac{1}{2}\tau^2\,d\tau = \int_0^\infty sin\frac{1}{2}\tau^2\,d\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Отсюда получаем

$$\eta = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{gt^2}{\pi x}}cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right). \tag{3.2.3}$$

Это уравнение показывает, что около начала координат скапливается бесконечное число узлов волновой поверхности и значения экстремальных ординат, заключенных между двумя последовательными узлами, неограниченно растут при приближении к началу координат.

Замена полного уравнения (3.1.9) приближенным уравнением (3.2.3) допустима не только для данного времени t и малых x, но и для данного значения x и больших значений времени.

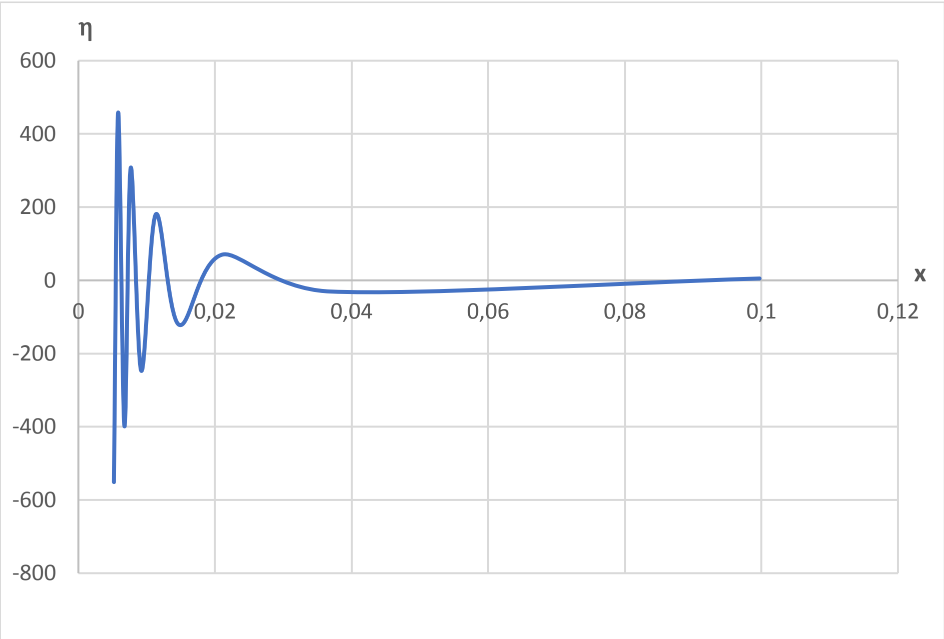

Рисунок 3.1 – Вид поверхности жидкости в определенный момент времени

В силу этого мы можем видеть, как в данной точке изменяется уровень жидкости по истечении достаточно большого промежутка времени. Можно видеть, что с увеличением времени колебания поверхности жидкости в данном месте происходят с частотой, все более и более увеличивающейся, притом размахи колебаний растут пропорционально времени; это есть следствие того, что в начальный момент времени возвышение поверхности жидкости сосредоточено в начале координат и из него, как их неистощимого источника, исходят возмущения, распространяющиеся затем по всей поверхности жидкости.

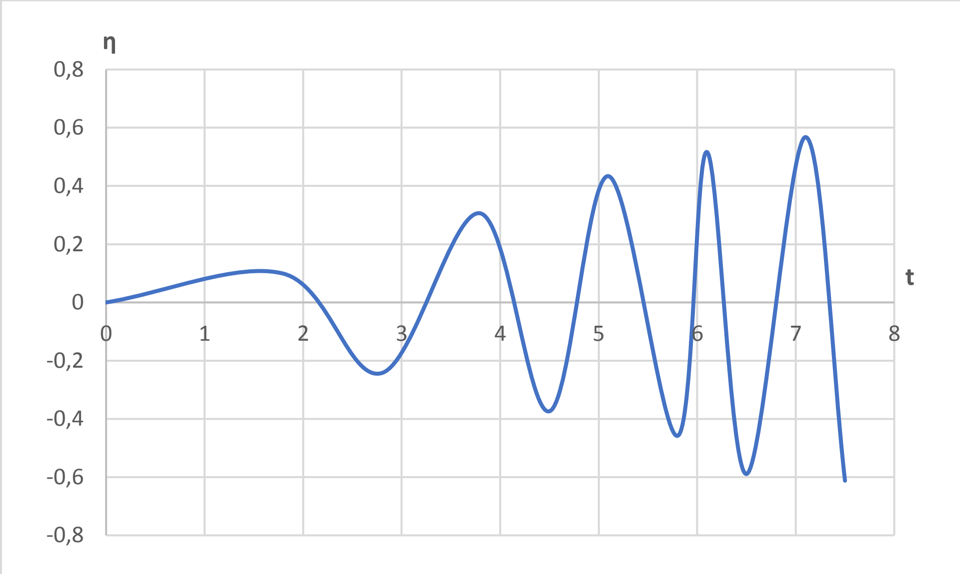

Рисунок 3.2 – Изменение возвышения поверхности в определенный момент оси абсцисс

Рисунок 3.2 показывает, как изменяется с течением времени возвышение поверхности жидкости в определенном месте оси абсцисс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы изучалась различная научная и учебная литература по исследованию волн, образованных начальным концентрированным возвышением поверхности жидкости.

Рассматривались уравнения неразрывности и уравнение движения с условием непрерывности, также анализировалось аналитическое решение для задачи Коши-Пуассона для бассейна бесконечной глубины. Подробно анализировались уравнения волн, образованных начальным концентрированным возвышением поверхности жидкости.

Были получены графики поверхности жидкости в определенный момент времени, а также график изменения с течением времени возвышения поверхности жидкости в определенном месте оси абсцисс.

Исходя из проведенного анализа было установлено, что с увеличением времени колебания поверхности жидкости в заданном месте происходят с частотой, все более и более увеличивающейся, притом размахи колебаний растут пропорционально времени, что является следствием того, что в начальный момент времени возвышение поверхности жидкости сосредоточено в начале координат и из него, как их неистощимого источника, исходят возмущения, распространяющиеся затем по всей поверхности жидкости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мазо А.Б., Поташев К.А. Гидродинамика: учеб. Пособие для студентов нематематических факультетов. Казань: Казан. ун-т, 2013. – 2-е изд. – 128 с.

2. Ларионов В.М., Филипов С.Е. Введение в гидродинамику. Учебное пособие: курс лекций, решение задач. – Казань: КГУ, 2010. – 108 с.

3. Сретенский Л. Н. «Теория волновых движений жидкости». Москва: Наука, 1977. – 816 с.

4. Алешков Ю. З. «Теория волн на поверхности тяжелой жидкости»., Учеб.пособие. - Издательство Ленинградского университета, 1981. – 196 с.

5. Алешков Ю. З. «Течение и волны в океане». – СПб.: Издательство С. – Петербургского университета, 1996. – 228 стр.

6. Валландер С. В. «Лекции по гидроаэромеханике». Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 296 с.

7. Давыдова М. А. «Лекции по гидродинамике» - М.: Физматлит, 2011. – 216 с.

8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. «Теоретическая гидромеханика»,часть 1, М., Физматгиз, 1963. – 584 с.

9. Ламб Г. «Гидродинамика» М: ОГИЗ 1947. – 929 с.

10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. «Теоретическая физика», Учебное пособие в 10 т., Т. IV, Гидродинамика – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл. ред. физ- мат. лит., 1987. – 736 с.

11. Тарг С. М. «Краткий курс теоретической механики»: Учеб. для вузов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.