МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Кафедра алгебры и математической логики

Заведующий кафедрой
к.э.н., доцент
С.В. Вершинина

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
магистерская диссертация

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ В РАЗВИТИИ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ УРАВНЕНИЙ МЕЖДУ НАЧАЛЬНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛОЙ

44.04.01 Педагогическое образование
Магистерская программа «Современное школьное математическое образование»

Выполнила работу
студентка 3 курса
заочной
формы обучения
Бай Ольга Александровна

Научный руководитель
к.п.н., доцент
Бердюгина Оксана Николаевна

Рецензент
к.п.н., доцент,
Тюменское
высшее военно-
инженерное
командное училище
Шемякина Ирина Евгеньевна

Тюмень
2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из главных направлений образования, зафиксированных в образовательных стандартах является обучение и воспитание развитого школьника, при этом рекомендуется учитывать его индивидуальные особенности. Конечно, ведь каждый ученик уникален по своей природе, ему присуще собственное умение мыслить, рассуждать, делать выводы и выбирать собственный путь познания учебного материала. Благодаря этому учитель находится в поиске универсальных методов и средств, способствующих достижению развивающих целей обучения и личностных результатов. В качестве инструмента могут выступать различные альтернативные программы и экспериментальные учебники по математике.

В учебнике по математике для начальных классов, решается в них не только через их внутреннее наполнение, но и через определенную систему планирования процесса учебной деятельности. В данных учебниках предусмотри различные варианты усвоения информации, представлена систематизация знаний, предоставлена возможность для творческого мышления учащихся. Для хорошего усвоения знаний, авторы используют различные методы и способы усвоения информации: наблюдение, анализ, синтез, обобщение, также показывают связь меду метапредметами.

Следует отметить, что при переходе из начальной школы в среднюю, могут появиться проблемы, имеющие тесную взаимосвязь с нарушением преемственности. Преемственность в процессе обучения включает в себя: формирование требуемой взаимосвязи и установление соответствия между этапами учебного предмета на всех ступенях его реализации. Также понятие преемственности содержит в себе различного рода требования в отношении формируемых знаний и умений обучающихся в течение всего процесса обучения, формам, методам и способам предоставления нового материала при его изучении [Российская педагогическая энциклопедия].

С позиции развивающего потенциала математики между начальной и средней школами рассматривается в достаточно большом количестве исследований не только педагогов, но и методистов. Развивающие цели, которые ставятся перед обучающимися, в полно объеме не реализуются, так как не прослеживается логическая последовательность в учебниках по математике для 5-6 класса [Виленкин, Жохов, Баранова], в которых задания для повторения изученного материала ориентируют учащихся на исполнительные методы обучения, а преподавателей на объяснительные.

Таким образом, учебники для 5-6 классов, отражают различные способы для освоения, употребления информации и для процесса учебной деятельности. Также, можно просмотреть несогласованность между содержательно – организационным моментом в изучении содержательной линии уравнений между начальной и средней школы.

Аргинская И.И., Александрова Э.И., Истомина Н.Б., Александрова Э.И., Истомина Н.Б. для расширения учебного кругозора учащихся добавляют дополнительные задания и вопросы по решению простых и усложненных уравнений в учебники по математике в начальных классах. Также чтобы сделать образовательный процесс более интересным, познавательным и последовательным, предложены различные методы и способы решения уравнений.

Казарова Р. [Кахаров, 1973] в своих учебниках по математике использует только два способа решения уравнений: арифметический способ за счет связи компонентов уравнения и его результатами или использует свойства равенста.

Фарсили Ж.С. [Фарсили, 1980] в своих работах показывает, что изучение арифметического и алгебраического способа решения уравнений, необходимо изучать на одной ступени образования, чтобы не было нарушений в преемственности между начальной и средней школы.

Разница в объеме полученных знаний у обучающихся при переходе в среднею школу различна, тем самым необходимо прибегать к дополнительным источникам, чтобы выровнить уровень знаний.

Кроме того, можно выделить и отличие в методах работы с понятием уравнения. Если в начальной школе уравнение рассматривается дедуктивным методом, то в средней школе уже применяется дедуктивные и индуктивные методы. При этом, учитель математики должен помнить, что развитие содержательной линии уравнений идет линейно - концентрически: методы и методы решения уравнений, обсуждаемые в одной теме, используются в последующих темах, появления новых типов уравнений влечет за собой только обогащение знаний учащихся о специальных преобразованиях, а общие методы и приемы остаются прежними. При этом происходит опора на субъективный опыт учащихся, привлекая каждый раз новый элемент, увеличивающий содержание понятия.

Таким образом, *актуальность данного исследования* определяется противоречием между необходимостью в преемственности развития содержательной линии уравнений между начальной и средней школой, и отсутствием методических рекомендаций по ее реализации.

Разрешение противоречия определяет *проблему* исследования: какие методы и средства обучения целесообразно использовать в образовательном процессе для преемственности развития содержательной линии уравнений между начальной и средней школой?

Объект исследования: процесс обучения математике в 1 - 6 классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: содержательная линия уравнений в курсе математики 1-6 классов.

Цель исследования: теоретически обосновать и экспериментально проверить методику преемственности в развития содержательной линии уравнений между начальной и средней школой.

Анализ психолого-педагогической и методической литературы, результатов диссертационных исследований дали возможность выдвинуть гипотезу исследования

Гипотеза исследования: если при обучении математике 5-6 классов

1) опираться на осознание учащимися взаимосвязи между уравнениями и другими математическими понятиями,

2) использовать имеющиеся знания, полученные школьником на предыдущей ступени обучения,

то это даст возможность реализовать линию преемственности в развитии содержательной линии уравнений.

Для достижения поставленной цели и проверки гипотезы формулируются следующие задачи:

1. Определить проблемные аспекты преемственности в теоретическом и практическом плане при изучении математики.
2. Провести анализ содержания методической линии «уравнение», с целью выявления линий преемственности.
3. Разработать систему упражнений и заданий, которые покажут развитие преемственности в содержательном плане при изучении уравнений в начальной и средней школе.
4. Экспериментально проверить их эффективность.

Теоретико-методологическая база исследования

- теория и методика обучения математике (Епишева О.Б., Танеев Х.Ж., Далингер В.А., Пышкало А.М. и другие),
- исследования по проблеме преемственности в математическом образовании (Ушинский К.Д., Буняковский В.Л., Колягин Ю.М., Усова А.В., Истомина Н.Б., Виленкин Н.Я. и другие).

Исследование проводилось с 2018 по 2021 год поэтапно.

Постановочный этап (сентябрь 2018 года – январь 2019 года) заключался в изучении литературы по теме исследования, сборе и обобщении информации в рамках представленной темы. Опираясь на анализ литературы выявлены объект, предмет, цель и задачи исследования.

Собственно-исследовательский этап (февраль 2019 года – июнь 2020 года) заключался в проведении самого эксперимента. Проведен констатирующий этап эксперимента, сформулирована гипотеза исследования, которая далее подвергалась проверке, осуществлено внедрение в образовательный процесс разработанных упражнений, произведена коррекция, сделаны заключительные выводы.

Оформительско-внедренческий этап (июль 2020 года – январь 2021 года) заключался в проведении анализа результатов эксперимента и оформлении текста магистерской диссертации.

Методы исследования: анализ и синтез, методы наблюдения, а также проведение констатирующего и формирующего экспериментов.

Теоретическая значимость исследования*:*

- разработка методики изучения уравнений в системе развивающегося обучения (1-6 классы);
- выявлены способы осуществления преемственности использование уравнений для обобщения знаний.

Практическую значимость исследования составляет построение систематизации методов уравнений с учетом наполняемости школьного курса математики.

Апробация исследования: выступление на конференциях, собственный педагогический опыт, публикация статей.

Опубликована статья в сборнике: Материалы международной научно-практической конференции «Теоретические и прикладные вопросы экономики, управления и образования», - Пенза, Издательство ПГАУ, 2020. с. 21-23

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1 ПОНЯТИЕ “УРАВНЕНИЕ”

Необходимость решения квадратных уравнений, в древности была вызвана с потребностью разделения земли, нахождением ее площади, с развитием математики и астрономии.

Первые попытки решения полных и неполных квадратных уравнений, простейших систем линейных уравнений и второй степени, уравнения третьей степени при помощи таблиц были у вавилонских ученых. В своих текстах не использовали отрицательные числа, уравнения записывали в словесной форме, но при нахождении корней использовались методы, схожие с современными. Также в клинописных текстах были обнаружены готовые корни уравнения, но какие методы для решения они использовали, остается неизвестным.

При решение алгебраических и геометрических задач, вавилонские ученые использовали квадратные уравнения, также могли решать такие задачи, которые включал в себя до десяти уравнений с десятью неизвестными, кубические уравнения и уравнения четвертой степени. В основном для решения различных задач, ученые использовали геометрическую терминологию (линии, площади), тем самым можно увидеть основные шаги их решения.

Древнегреческий математик Диофан впервые использовал сокращения для обозначения неизвестных величин в математике. Неизвестное, Диофант именует «аритмос» (число), вторую степень неизвестного – «дюнамис». Третью степень называет «кюбос» (куб), четвертую – «дюнамодюнамис», пятую – «дюнамокюбос», шестую – «кюбокюбос».

В Древней Греции для решения уравнений использовались геометрические построения. Диофант Александрийский в III в. до н. э. в своих книгах «Арифметика» впервые приводит методы, не относящиеся к геометрии при решении неполных квадратных уравнений, а методы которые он использовал для решения полных квадратных уравнений до наших дней не сохранились.

Китайские ученые еще далеко до нашей эры использовали отрицательные числа, решали уравнения не только простейшего вида, но и уравнения второй степени, при решении системы уравнений использовали различные знаки и обозначения. Китайцы знали закон образования, при котором коэффициенты в разложении бинома по степеням *x*, в настоящее время известен как « треугольник Паскаля». В Европе он был открыт более позднее.

Индийские ученые использовали начальные буквы слов, для обозначения отрицательных и иррациональных чисел, различных величин и степеней, также, если отсутствовало число обозначали его за нуль.

Правило нахождения корней уравнения, возведенного к виду $a\,x^2 \ + \ b\,x \ = \ c$ впервые дал индийский ученый Брахмагупта.

В 3-4 тысячи лет до н. э. египтяне и вавилонские ученые решали простейшие уравнения, интуитивно, тем самым, вид которых не похож на современные.

Название «Алгебра» произошла от названия трактата узбекского математика Мухаммед аль Хорезми (IX век) «Китаб альджебр валь-мукабала», где описал различные требования для решения уравнений простейшего вида. Понятие « аль-ждебр», обозначает восстановление, означало перенос отрицательных членов в одну часть с изменением знака. Также в своем трактате он дал классификацию квадратных и линейных уравнений.

Омар Хайям написал математику, в своих текстах описал исследование относящиеся к изучении и решению уравнений третьей степени. Также изучал проблематику действительных и иррациональных чисел.

Для решения квадратных уравнений Штифель М. сформулировал правило, а Виет выдвинул формулу в 1951 году, чтобы решать квадратные уравнения, при котором каждые коэффициенты равенства зависят друг от друга.

В 1545 году Кардано показал, что всякое кубическое уравнение сводится к одному из этих трёх. В это же время Феррари, ученик Кардано, нашёл решение уравнения 4-й степени. Благодаря трудам ученых: Жирара А., Декарта и Ньютона мы можем видеть, современны способ и вид решения квадратных уравнений.

Большой вклад при изучении математики внес французский математик Франсуа Виет (XVI век). Ввел буквенное обозначения при решении уравнений.

Алгебра как искусство появилась очень давно, она была необходима для решения однотипных задач. Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) внес огромный вклад для развития уравнений. В 1824 году он опубликовал доказательство неразрешимости в радикалах общего буквенного выражения пятой степени.

Отметим, что исторически и в зависимости от ступени обучения, меняется определение понятия “уравнение” (Таблица 1).

Таблица 1

Понятие «Уравнения»

№ п/п	Источник	Сущность понятия
1.	[Зубарева, с.69]	Уравнение – так называют равенство, из которого находят неизвестную величину, обозначенную, как правило, буквой латинского алфавита.
2.	[Электронная библиотека]	Уравнение – это равенство, содержащее неизвестное число.
3.	[Ожегов, с.837]	Уравнение – это математическое равенство с одной или несколькими неизвестными величинами (числами или функциями), верное только для определенных наборов этих величин.
4.	[Аргинская, с.30].	Уравнениями называется равенства, в котором есть неизвестное обозначенное буквой, называют уравнением.
5.	[Виленкин, с.288].	Уравнение, которое можно привести к такому виду $ax=b$, *где* $a \neq 0$ с помощью переноса слагаемых и приведения подобных слагаемых, называют линейным уравнением с одним неизвестным.

Продолжение таблицы 1

6.	[Мордкович, с.175].	Математическая модель $ax + by + c = 0$. где a, b, c – числа (коэффициенты) - это линейные уравнения с двумя переменными x и y.
7.	[Демидова, с.60].	Неизвестные числа обозначь латинскими буквами x (икс) и y (игрек). У тебя получилось уравнение
8.	[Богомолов, Самойленко, с. 39]	Уравнение – это два выражения, соединенные знаком равенства.

Таким образом, уравнение обладает двумя характеристиками:

- имеет знак равенства;

- содержит буквенную переменную.

1.2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ НАЧАЛЬНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

В соответствии с программой 1 – 4 классов рассматриваются уравнения простейшего вида, где необходимо найти один неизвестный компонент: $3 + x = 5$; $x - 7 = 5$; $x \cdot (20 - 4) = 32$; $x : 6 + 8 = 10$.

Многие методисты, опираясь на реальный практический опыт рекомендуют знакомить школьников как можно раньше с уравнениями, чтобы в процессе изучения и работы с ними осуществлялось усвоение обучающимися правил о взаимосвязи компонентов. Вместе с тем, отмечается что существует точка зрения, что обучающихся необходимо знакомить с уравнениями только после того, как они усвоят математическую терминологию и правила, которыми будут использовать при их решении.

Действительно, при нахождении неизвестного уменьшаемого в уравнении $\mathrm{y} - 10 = 3$, обучающие должны увидеть алгебраическую операцию «вычитание» и для нахождения неизвестного числа прибавляют к вычитаемому разность и получают уменьшаемое, тем самым они используя правило, если есть знак минус, то нужно прибавлять известные значения.

Понятие «Решить уравнение» - это значит найти значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство, (или установить, что таких значений нет). Процесс изучения уравнений в начальной школе протекает в несколько этапах, следует отметить что учебная программа для данной ступени обучения (вне зависимости от авторского учебника) предусматривает решение уравнений только с одним неизвестным и в первой степени.

Для подготовки обучающихся к решению уравнений, как отмечают педагоги, целесообразно подбирать упражнения для нахождения пропущенного числа в равенствах вида

$2 + \Delta = 6, 8 - \square = 5, \square - 4 = 3$ и т.п.

Отмечается, что при выполнении заданий такого вида учащиеся должны понять, что неизвестное число, может быть, любим членом выражения. В учебных программах до 2 класса неизвестные числа представлены с использованием различных символов (например, □, Δ). Со второго класса обучающие знакомятся с уравнениями вида

число + буква = число (например, 2+x=6).

На первом уровне знакомства, с уравнениями обучающиеся решают их с помощью состава числа. Учитель знакомит учащихся с новыми понятиями, такие как: неизвестное число, уравнение, решить уравнение, корень уравнения. Также учащиеся должны приобрести такие умения как: записывать под диктовку уравнение, использовать и читать символическую запись, делать проверку после нахождения неизвестного члена уравнения.

На втором уровне происходит взаимосвязь между членами уравнения. Происходит замена неизвестного числа равнозначным ему уравнением.

Анализ доступных учебных пособий для начальной школы позволил выделить основные способы решения уравнений (Рисунок 1).

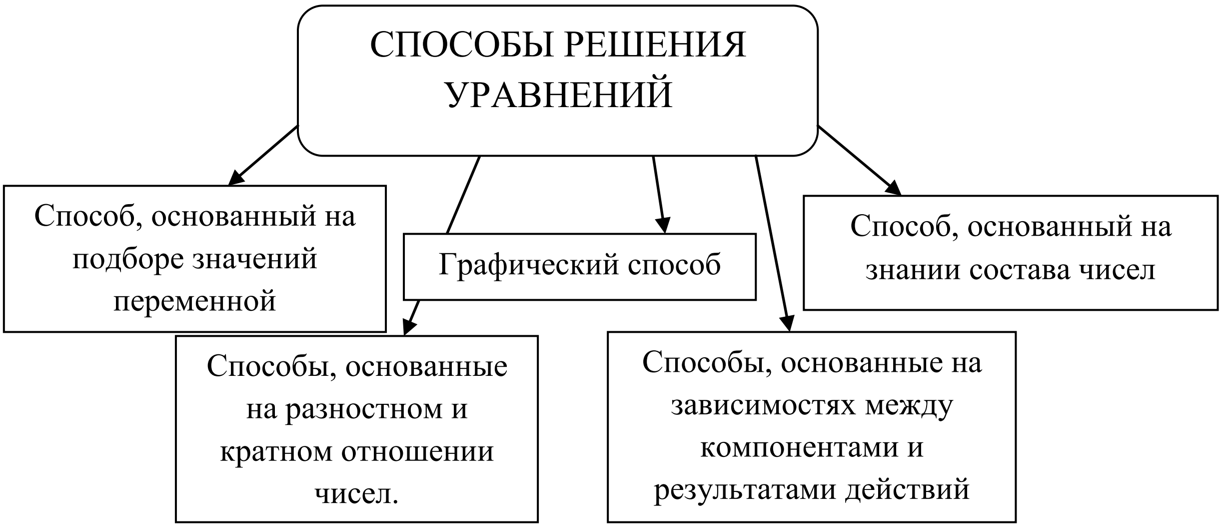


Рис. 1. Способы решения уравнений

Способ, основанный на подборе значений переменной (способ подбора)

Данный способ способствует развитию умственной деятельности учащихся и логического мышления, раскрывающихся в выполнении последовательности действий и применения алгоритмов /правил при решении уравнений. Кроме того, ученик должен иметь представление и понимать, что при нахождении числа его необходимо подставить в уравнение и проверить полученное выражение на выполнимость равенства.

Например, при решение уравнения $x + 2 = 6$, школьник подставляют цифры 1,2,3,4, даже если он сразу дал правильный ответ. Это объясняется тем, что, необходимо еще доказать, что найденное число является верным. При этом, необходимо спросить у школьника, почему x равен именно 4, а не 2 или 3. Устно произвести все рассуждения при подборке верного значения x.

Следует отметить, что данной способ помогает в дальнейшем решать уравнения с помощью определенных правил.

Способ основанный на соотношении между частью и целым

Петерсон Л. Г. предложила при решении уравнений в начальных классах использовать геометрические фигуры.

При помощи геометрических фигур, обучающиеся наглядно могут увидеть, что целая часть будет состоять из нескольких маленьких частей и для того чтобы найти неизвестную часть, необходимо из самой большой вычесть известную.

Благодаря наглядным рисункам учащиеся находят взаимосвязь между целым числом и его частями, с легкостью понимают и видят, как найти различные неизвестные члены уравнения.

Способ, основанный на взаимосвязи между компонентами действий

Когда учащиеся научаться решать уравнения простейшего вида $x + 9 = 25$, они приступают к решению уравнений, в которых необходимо сделать определенные преобразования, чтобы найти неизвестный член уравнения. Для правильности решения данных уравнений необходимо хорошо решать уравнения простейшего вида, соблюдать очередность действий в равенстве.

Рассмотрим уравнение, где в правой части находится числовое выражение $n + 14 = 25 - 3$

учащиеся сначала решают правую часть,

$$n + 14 = 22$$

после чего уравнения принимает простейшую форму, затем находят неизвестное число.

$$n + 14 - 14 = 22 - 14$$

$$n = 22 - 14$$

$$n = 8$$

Уравнения, которые содержат в себе выражения с неизвестным числом $(x + 5) - 4 = 3$, являются сложными для обучающихся, тем самым они изучаются с четвертого класса. Для решения уравнений использую взаимосвязь между компонентами. Выражения в скобках можно считать за одно неизвестное число, сначала необходимо выполнить действия со скобками или же привести уравнение к простейшему виду, затем приступить к вычислению неизвестного.

Решение уравнений данного вида требует длительных тренировок, также необходимо владеть знаниями, которые помогут найти неизвестные компоненты равенства. Данные уравнения способствуют преемственности в обучении между начальной и средней школой.

Таким образом, изучение уравнений в начальных классах подготавливает учащихся к усвоению системы знаний, умений и навыков, определяемых учебными программами.

Изучение уравнений имеет важное теоретическое и практическое значения. Также необходимо подготовить учащихся в начальных классах, к углубленным знаниям об уравнениях, которые будут необходимы им в средней школе. В процессе работы с уравнениями у обучающихся формируются вычислительные способности, прослеживается взаимосвязь между членами выражения, закрепляется порядок выполнения и нахождения неизвестного числа или буквы, умение решать текстовые задачи. Изучение уравнений в начальном звене, подготавливает школьников к успешному усвоению математического материала в средних классах.

Метод разложения на множители.

Пусть задано уравнение с одним неизвестным

$$f(x) = 0$$

Кроме того, левая часть уравнения представима в виде:

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) * \dots * f_n(x).$$

Тогда уравнение $f(x) = 0$ можно заменить совокупностью более простых уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots \\ f_n(x) = 0 \end{array}\right.$$

После нахождения корней уравнения, необходимо подобрать такие корни, которые будут подходить под область определения $f(x) = 0$, тем самым выявим все подходящие корни уравнения $f(x) = 0$ [Мордкович, 1995].

Чтобы решить уравнение алгебраическим способом, необходимо само уравнение разбить на множители.

Разложение многочлена на множители происходит только тогда, когда происходит преобразование многочлена в произведении двух и более многочленов. Приведем несколько случаев разложение многочленов первой и второй степени на множители (Рисунок 2).

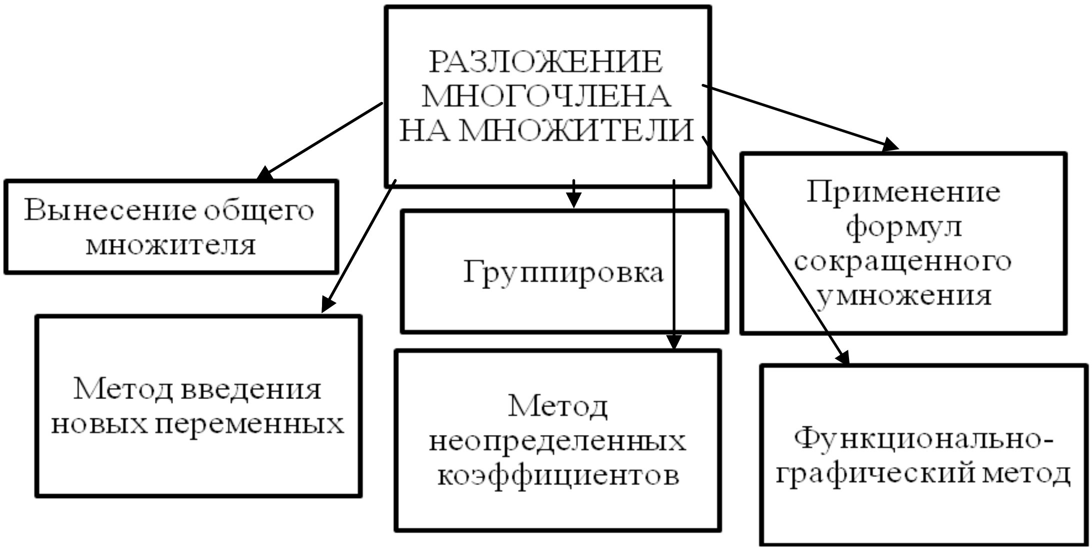


Рис. 2. Методы разложения многочлена на множители

Вынесение общего множителя.

Разложение многочлена на множители происходит только тогда, когда в равенстве есть общий множитель, который можно вынести за скобки

Пример 1. Разложить на множители многочлен $3x^3 - 13x^2 + 5x$

Решение. Отметим, что данном примере все члены уравнения имеют общий множитель (x), который можно вынести за скобки, тем самым происходит разложение многочлена на множители

$$3x^3 - 13x^2 + 5x = x(3x^2 - 13x + 5)$$

Применение формул сокращенного умножения.

При разложении многочлена на множителе, также можно использовать формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^{3b} + a^{2b^2} + ab^3 + b^4)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$
$$n \epsilon Z$$

Пример 2. Разложить на множители многочлен $x^4 + 6x^2 - 10$

Решение. Замечаем, что в примере переменная содержится только в четной степени. Выделяя полный квадрат, а затем, применяя формулу разности квадратов, имеем

$$x^4 + 6x - 10 = (x^2)^2 + 2 * 3 * x^2 + 3^2 - 3^2 - 10 = (x^2 + 3)^2 - 19 = (x^2 + +3)^2 - (\sqrt{19})^2 = (x^2 + 3 - \sqrt{19})(x^2 + 3 + \sqrt{19})$$

Группировка

Данный способ используется при решении уравнений с различными степенями. В данном методе степени с одинаковыми основаниями переносят в одну часть уравнения, а затем происходит вынесение общего множителя за скобки.

Пример 3. Разложить на множители многочлен $x^4 + 5x^2 + x^3 - 5x$

Решение. Объединим в одну группу первое и второе слагаемые, а в другую – третье и четвертое слагаемые. Тогда имеем

$$x^4 + 5x^2 + x^3 - 5x = (x^4 - 5x^2) + (x^3 - 5x).$$

Выноси из первой скобки множитель x^2, а из второй скобки x получаем

$$(x^4 - 5x^2) + (x^3 - 5x) = x^2(x^2 - 5) + x(x^2 - 5) + x(x^2 - 5)$$

Наконец, вынося за скобку общий множитель $x^2 - 5$, получаем

$$x^2(x^2 - 5) + x(x^2 - 5) = (x^2 - 5)(x^2 + x),$$

и, наконец, вынося за скобки множитель x, получим, что

$$x^4 + 5x^2 + x^3 - 5x = (x^2 - 5)(x - 1)x.$$

Метод неопределенных коэффициентов

Используется в математике для нахождения искомого уравнения. Происходит «обратное» отражение результата каких- то операций. Суть данного метода заключается в разделение сложного уравнения на сумму более простых. Данный способ используется для решения уравнений компоненты которого имеют первую, ворую , третью и четвертую степень. Любое равенство, которое имеет третью или четвертую степень, возможно преобразовать в произведение состоящие из многочлена первой или второй степени.

Пример 4. Разложить на множители многочлен x^3-5x^2+7x-3.

Решение. Несморя на то, что в примере четное количество одночленов, предыдущие способы не позволяют разложить на множители. Найдем многочлены $x-\alpha$ и $\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3$, при которых тождество равно $x^3-5x^2+7x-3=(x-\alpha)(\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3)$.

Тогда правая часть имеет вид:

$$\beta_1x^3+(\beta_2-\alpha\beta_1)x^2+(\beta_3-\alpha\beta_2)x-\alpha\beta_3.$$

Преобразовываем левую и правую часть уравнения с одинаковыми степенями. Затем для нахождения членов уравнения $a,\beta_1,\beta_2,\beta_3$, составляем систему уравнения:

$$\begin{cases}\beta_1=1,\\ \beta_2-\alpha\beta_1=-5,\\ \beta_3-\alpha\beta_2=7,\\ \alpha\beta_3=3.\end{cases}$$

Легко видеть, что этим равенствам удовлетворяют числа

$$\beta_1=1,\beta_2=-2,\beta_3=1,\alpha=3,$$

а это означает, что $x^3-5x^2+7x-3=(x-3)(x^2-2x+1)$ [Олехник, Потапов, Пасиченко, 1998].

Метод введения новых переменных

Суть метода заключается в следующем: крайне проста: если уравнение $f(x)=0$ удалось преобразовать к виду $p\big(g(x)\big)=0$, то можно ввести новую переменную $u = g(x)$, решить уравнение $p(u) = 0$, а затем рассмотреть совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = u_1, \\ g(x) = u_2, \\ \ldots \\ g(x) = u_n, \end{array}\right.$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ - корни уравнений $p(u) = 0$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}.$$

Решение. Замечаем, что в каждом подкоренном выражении явно или неявно присутствует общая часть (x^2-x). Положив $y = x^2 - x$, получим

$$\sqrt{y + 2} + \sqrt{y - 7} = \sqrt{2y + 21}.$$

Далее имеем последовательность:

$$y + 2 + y + 7 + 2\sqrt{(y + 2)(y + 7)} = 2y + 21,$$

$$\sqrt{y^2 + 9y + 14} = 6,$$

$$y^2 + 9y + 14 = 36,$$

$$y^2 + 9y - 22 = 0,$$

$$y_1 = 0; y_2 = -11.$$

Найденные значения могут являться корнями уравнениями, поэтому необходимо выполнить проверку. Чтобы проверить является ли найденное значением корнем уравнения, необходимо их подставить в исходное уравнение: $\sqrt{y + 2} + +\sqrt{y + 7} = \sqrt{2y + 21}$

Отсюда следует, что $y_1 = 2$ удовлетворяет данное уравнение, а $y_2 = -11$– нет, это посторонний корень.

Возвращаясь к x переменной, получаем уравнение $x^2 - x = 2$, откуда находим $x_1 = 2, x_2 = -1$.

Ответ: 2; –1 [Мордкович, 1995].

Замечание. Если необходимо ввести новое значение (переменную), сначала необходимо решить уравнение, а после этого только подставить новую переменную, после необходимо проверить значение корней.

Функционально-графический метод

Суть метода заключается в следующем, чтобы решить уравнения $f(x) = g(x)$ графическим способом необходимо построить график функций $y = f(x), y = g(x)$ и найти абсциссы точек их пересечения, это и будет являться ответом – конями уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Решение. Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$. и пересекаются в двух точках: (1; 1) и (4; 2) (Рисунок 3). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1, x_2 = 4$ [Мордкович, 1995].

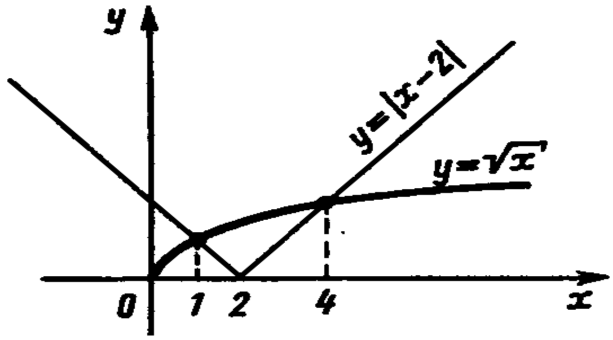


Рис. 3. Графическое решение уравнения $\sqrt{x} = |x - 2|$

Рассмотрим уравнения алгебраического вида (Рисунок 4).

Рисунок 4. Виды алгебраических уравнений

Рассмотрим способы решения алгебраических уравнений.

Способы решения алгебраических уравнений

Рассмотрим алгебраические уравнения степени n, т.е. уравнения вида

$P_n(x) = 0$ (1)

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, т.е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$ *(2)*

Линейные уравнения

В случае $n = 1$ уравнение (1) обычно записывается в виде $ax + b = 0,\ a \neq 0$ (3) и называется уравнением первой степени или линейное уравнение.

При решение линейных уравнений, корень уравнения может состоять из одного числа, либо из нескольких, либо вообще не иметь решения. (Рисунок 5).

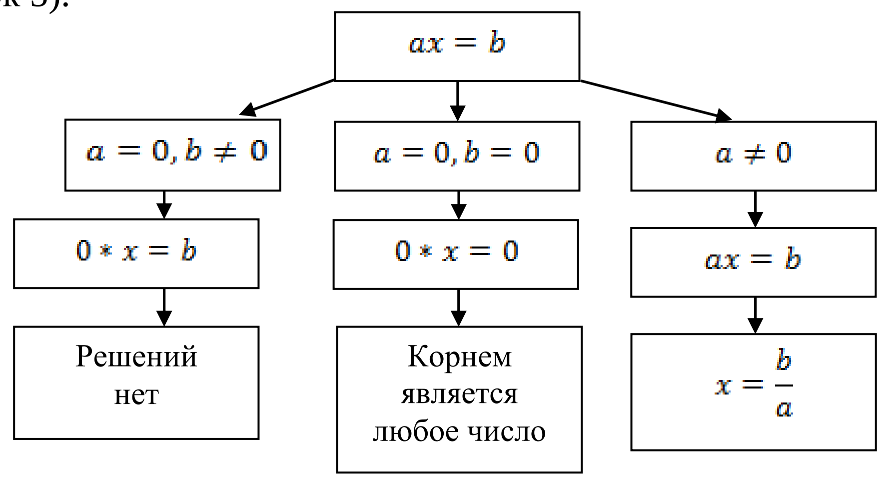


Рис. 5. Решение линейных уравнений

Квадратные уравнения

В случае уравнение $n = 2$ (1) обычно записывается в виде $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (4) и называется квадратным уравнением.

На рисунке 6 приводится алгоритм решения квадратного уравнения.

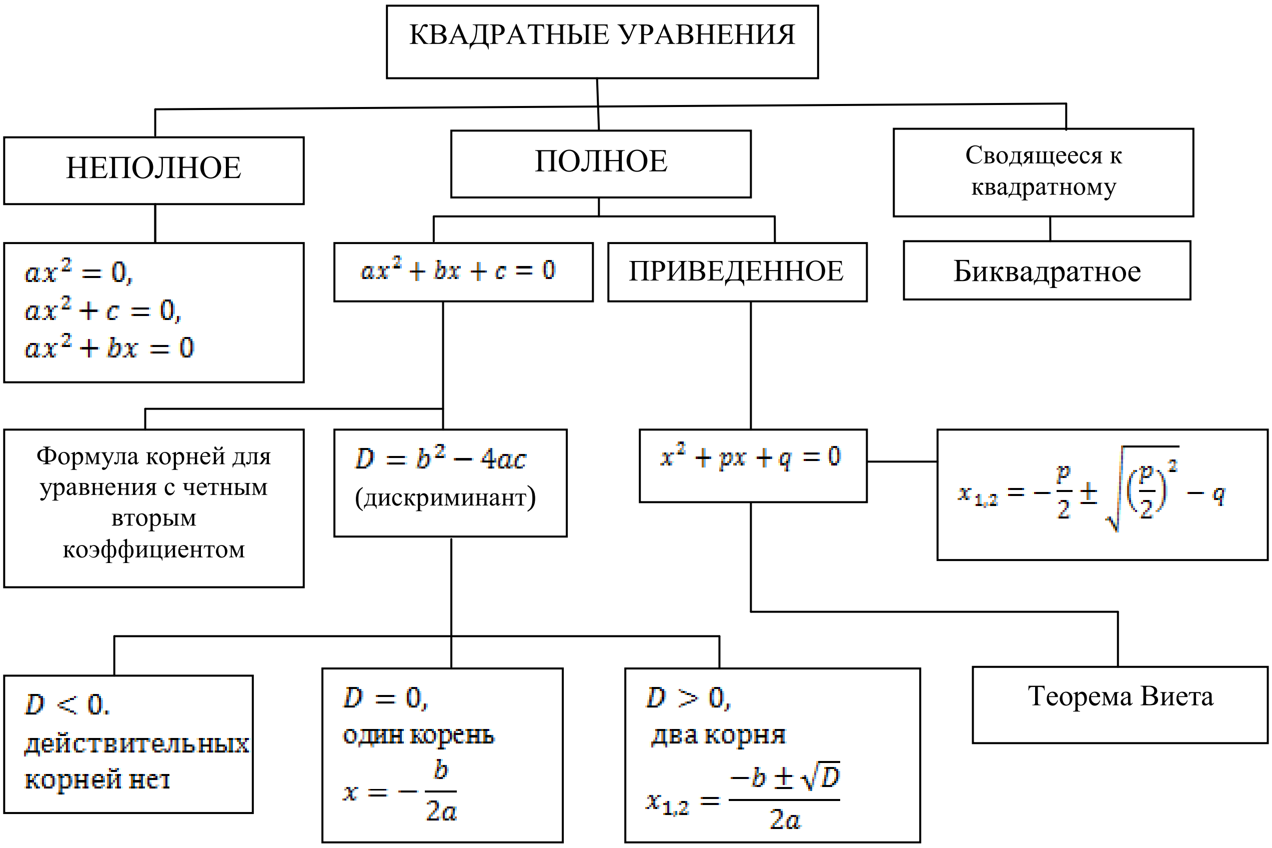


Рис. 6. Решение квадратных уравнений

Заметим, что для решения приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ удобно использовать Теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

На рисунке 7 приведен алгоритм решения неполных квадратных уравнений.

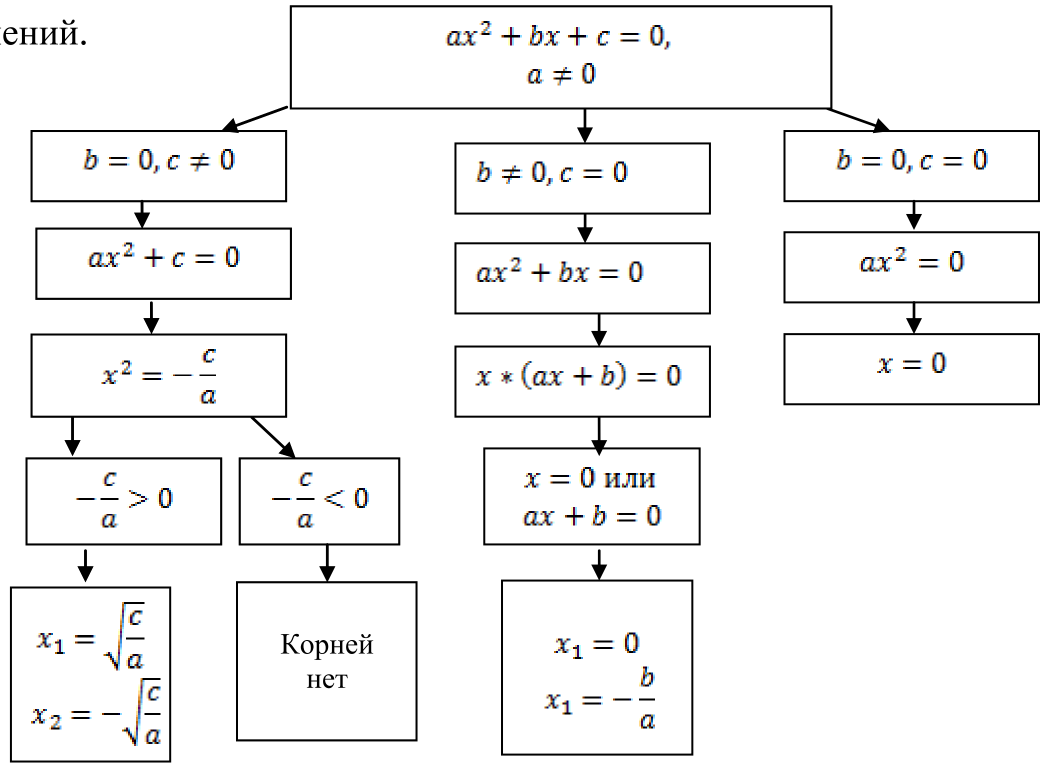


Рис. 7. Алгоритм решения неполных квадратных уравнений

Уравнения высших степеней

В математике также встречаются уравнения третьей и четвертой степени, но для решения данных алгебраических уравнений необходимо много времени и не существует конкретных формул для их решения.

Если многочлен $P_n(x)$ содержит произведение первой и второй степени, то уравнение (1) возможно решить с помощью уравнений первой и второй степени решения произведены выше.

Если многочлен $P_n(x)$ состоит из степеней больше, чем 2, при этом не разложен на множители первой и второй степени, необходимо сначала разложить на множители, затем заменить на уравнения равносильные им. [Олехник, Потапов, Пасиченко, 1998].

Рассмотрим несколько видов решения уравнений 3и 4 степени (Рисунок 8, Рисунок 9).

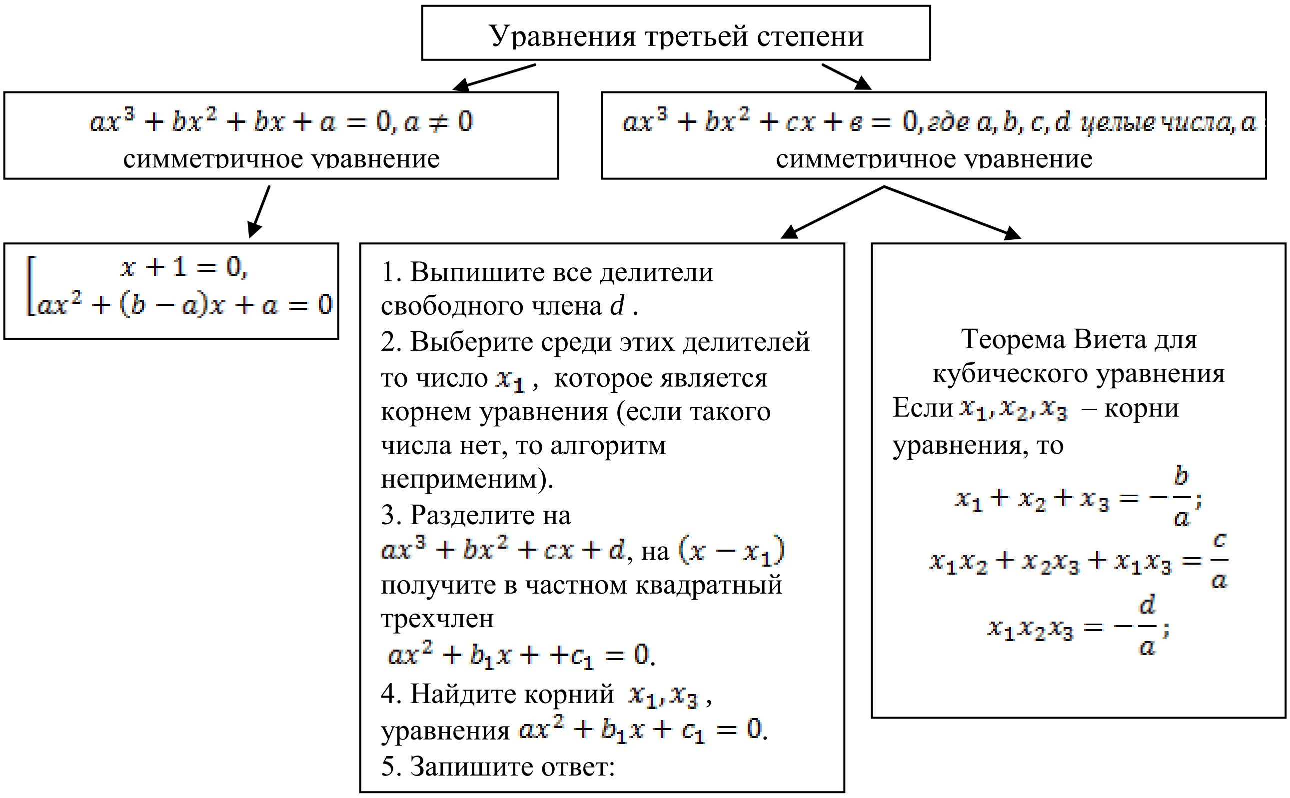
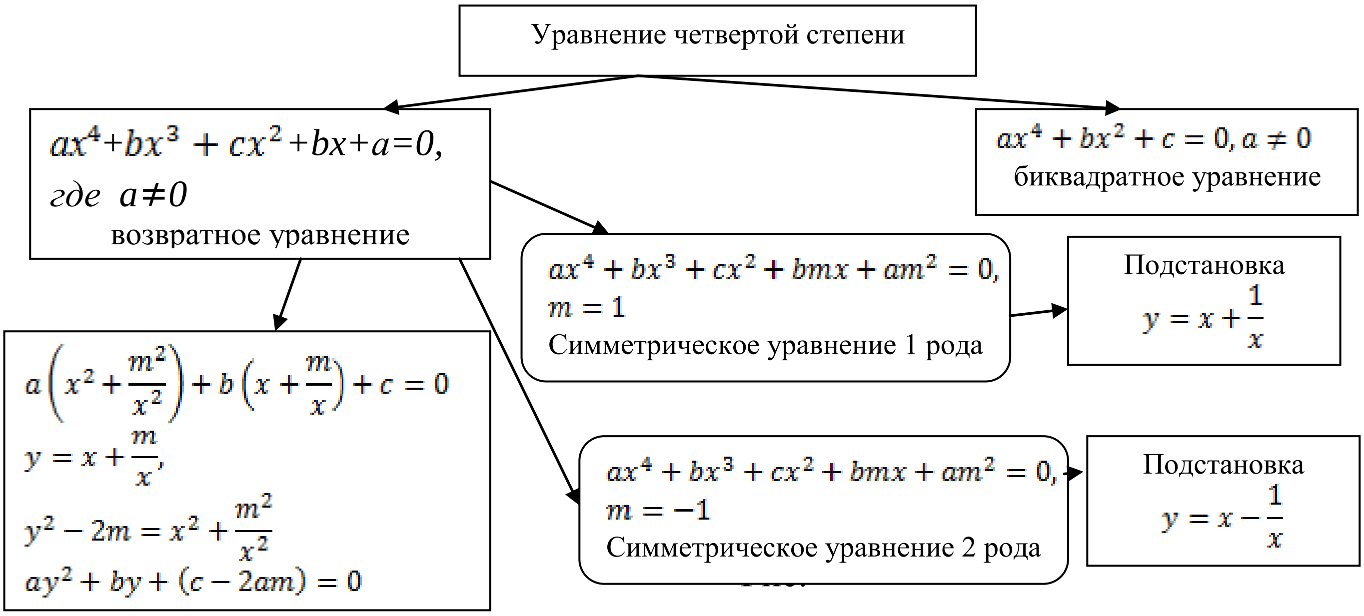


Рис. 8. Частные случаи решения уравнений третьей степени



9. Частные случаи решения уравнений

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения вида $\frac{P(x)}{q(x)}=0$

Дробно-рациональные уравнения (или просто дробные уравнения) – это уравнения с одной переменной вида *f(x)=q(x)*, где f(x) и q(x) – рациональные выражения, хотя бы одно из них которое содержит алгебраическую дробь (в знаменателе есть переменная) [Алгебра, справочная информация].

1. Перенести все члены уравнения в одну часть.
2. Преобразовать эту часть уравнения к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$. Дробь $\frac{P(x)}{q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x)=0 \\ q(x)=0 \end{cases}$.
3. Решить полученную систему.
4. Полученные корни системы являются ответом.

Пример 7. Решить уравнение $\frac{x^2-5x}{2x-6}=1$

Решение. $\frac{x^2-5x}{2x-6}=1$

1) $\frac{x^2-5x}{2x-6}-\frac{1}{2x-6}=0;$

2) $\frac{x^2-5x}{2x-6}-\frac{2x-6}{2x-6}=0; \frac{x^2-5x-2x+6}{2x-6}=0; \frac{x^2-7x+6}{2x-6}=0;$

3) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ 2x - 6 \neq 0; \end{cases}$

$x^2 - 7x + 6 = 0; x_1 = 1, x_2 = 6; 2x - 6 \neq 0; x \neq 3;$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \\ x \neq 3 \end{cases} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 6.$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 6$

Иррациональные уравнения

Неизвестное под знаком корня, или возведенное в степень, которое не образует целое число, называют иррациональным уравнением [Мерзляк, с.109].

Рассмотрим более подробно некоторые виды иррациональных уравнений, способы их решения (Таблица 2).

Таблица 2

Решение иррациональных уравнений

Вид иррационального уравнения		Алгоритм решения	Пример
Простейшие уравнения	$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$	1) Необходимо возвести обе части уравнения в степень $2n$. 2) Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases}$	Решить уравнение: $\sqrt{7-3x} = x + 7$ 1) Возводим обе части уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{7-3x}\right)^2 = (x+7)^2$; 2) Уравнение $\sqrt{7-3x} = x + 7$ равносильно системе: $\begin{cases} x + 7 \geq 0, \\ 7 - 3 = (x+7)^2 \end{cases}$ Решаем неравенство системы: $\sqrt{7-3x} = (x+7)^2$ Имеем $x \geq -7$. Решаем уравнение системы: $7 - 3x = (x+7)^2; 7 - 3x = x^2 + 14x + 49; x^2 + 17x + 42 = 0; x_1 = -3; x_2 = -14.$ $\begin{cases} x_1 = -3; x_2 = -14 \\ x \geq -7 \end{cases} \rightarrow x = -3.$ Ответ -3.

Продолжение таблицы 2

	$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$	1) Необходимо возвести обе части уравнения в степень $2n+1$. 2) Решить уравнение $f(x) = g^{2n+1}(x)$	Решить уравнение: $\sqrt[3]{10-x} = x$ 1) Возводим обе части уравнения в степень: $2n+1$: $\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^3 = x^3$; 2) Решаем уравнение: $10 - x = x^3; x^3 + x - 10 = 0; x_1 = 2.$ Разделяем многочлен $10 - x = x^3$на двучлен $x - 2$, имеем $x^3 + x - 10 = (x-2)(x^2 + 2x - 5).$ Затем, решением уравнения $x^2 + 2x - 5$ являются $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{6}.$ Ответ. $2, -1 \pm \sqrt{6}$
	$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$	1) Необходимо возвести обе части уравнения в степень $2n+1$. 2) Решить уравнение $f(x) = g^{2n+1}(x)$	Решить уравнение: $\sqrt[3]{10-x} = x$ 1) $\left(\sqrt[3]{10-x}\right)^3 = x^3$; 2) Решаем уравнение: $10 - x = x^3; x^3 + x - 10 = 0; x_1 = 2.$ Разделим многочлен $10 - x = x^3$на двучлен $x - 2$, имеем $x^3 + x - 10 = (x-2)(x^2 + 2x - 5).$ Решением уравнения $x^2 + 2x - 5$ являются $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{6}.$ Ответ. $2, -1 \pm \sqrt{6}$
	$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	Необходимо решить систему: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	Решить уравнение: $\sqrt{8 - x^2} = \sqrt{2 - x}$ 1) Составляем и решаем следующую систему: $\begin{cases} 8 - x^2 = 2 - x \\ 8 - x^2 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ 8 - x^2 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases} \leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x^2 \leq 8, \\ x \leq 2. \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3\ x_2 = -2, \\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \\ x \leq 2. \end{cases} \leftrightarrow x = -2$ Ответ. -2
	$g(x)\sqrt{f(x)} = 0$	Необходимо решить систему: $\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$	Решить уравнение: $(x-1)\sqrt{2x-5} = 0$ 1) Составляем и решаем следующую систему: $\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 2x - 5 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2.5 \\ x = 2.5 \\ x = 1 \end{cases} \leftrightarrow x = 2{,}5$ Ответ.2,5

Продолжение таблицы 2

$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$	1) Необходимо составить систему для нахождения ОДЗ: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$ 2) Воспользуемся методом «изоляции» квадратного корня: $\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)^2 = \left(\sqrt{h(x}\right.$ 2 $\sqrt{(f(x)g(x))} = h(x) \mp f(x)$ 3) Необходимо сделать проверку	Решить уравнение $\sqrt{7+5x} - \sqrt{5+4x} = \sqrt{x+2}$ ОДЗ: $\begin{cases} 7+5x \geq 0, \\ 5+4x \geq 0, \to x \geq -1.25 \\ x+2 = 0. \end{cases}$ $(\sqrt{7+5x} - \sqrt{5+4x})^2 = \left(\sqrt{x}+2\right)^2;$ $7+5x+5+4x-2\sqrt{(7+5x)(5+4x)} =$ $2\sqrt{35+53x+20x^2} = 10x+8;$ $\left(\sqrt{35+53x+20x^2}\right)^2 = (5x+4)^2;$ $35+53x+20x^2 = 25x^2+40x+16;$ $4x^2+13x+10 = 0;$ $x_1 = -1.25; x_2 = -2.$ Учитывая ОДЗ и выполнив проверку, имеем $x = -1.25$. Ответ. $x = -1.25$.

1.3.АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ И ПРАКТИКЕ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Исследования, характеризующие существенные свойства и возможности средств обучения в определенной образовательной среде, происходит развитие мыслительной деятельности.

1. Формируется последовательное изучение теоретического материала.

Таким образом, специалистами в сфере образования были предложены пути решения преемственности при изучении уравнений в начальной и средние школах. Данные методы педагоги использовали при изучении школьных дисциплин.

В приведенных ниже учебниках, прослеживается последовательность полученных и примененных знаний при изучении темы «Уравнения».

Рассмотрим линейку учебников авторского коллектива С. М. Никольского, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин [Никольский, с. 86].

В учебнике по математике для 5 класса нет темы уравнения.

В учебнике по математике 6 класса вводятся основные понятия.

Ведущей содержательно-методической линией является арифметическая. Для решения задач текстовой формы используются арифметические способы решения уравнений, которые являются ведущими в данном учебнике математики. Благодаря данному способу у обучающихся развивается мышление, прослеживается причинно – следственная связь между компонентами уравнения, умения анализировать и делать правильный вывод на основе данных исследований. Учебные тексты краткие, написаны согласно возрасту учащихся научным языком, содержат мало образцов решения заданий.

И. И. Аргинской, Э. И. Александровой, Н. Б. Истоминой, Л.Г. Петерсон и др. [Аргинская, с. 68], данные авторы учебника математики для начальной школы, в большей степени стремятся развить мышление у обучающихся. В данных учебниках прослеживаются уровень образования, системность содержания и руководства учебной деятельности. Также стремятся создать оптимальные условия для усвоения знаний, чтобы учащиеся осознанно подходили к выполнению различных задач.

Учебники Н. Я. Виленкина рассматривают уравнения на нескольких примерах. После каждого параграфа есть задания на отработку навыков решения.

Математику с первого по четвертый класс Н. Я. Виленкина, продолжает учебник для пятого – шестого класса Г. В. Дорофеева; учебник И. И. Аргинской продолжает А. Г. Ванцян; а учебники Н. Б. Истоминой являются единой для обучения школьников с первого по шестой класс.

Некоторые авторы предлагают решать уравнения в несколько этапах, исходя из способа нахождения неизвестного члена уравнения:

1. Необходимо отталкиваться от взаимосвязи между компонентами уравнения и результатами, полученных в результате арифметических действий (начальная школа);

2. Необходимо опираться на свойства равенств (средняя школа) [Кахаров, с. 59].

Преемственность обучения проявляется не только между уравнениями, но и тождественными преобразованиями равенств.

Нецелесообразным считали то, что изучение уравнений происходит на разных уровнях обучения, тем самым сначала изучается арифметический способ, затем только алгебраический [Фарсили, с. 25]. Происходит нарушение преемственности, предлагали отказаться от арифметического способа решения уравнений в начальной школе и решать их «по здравому смыслу».

Учебная программа, которая направлена на решение образовательных задач, не в полном объеме развивает мыслительную деятельность обучающихся. «Слабое влияние начального обучения на умственное развитие детей было связано прежде всего с тем, что дети овладевали учебным материалом по преимуществу посредством эмпирического абстрагирования и обобщения, которые не могли служить должной основой для качественных сдвигов в развития мышления младших школьников» [Давыдов, с 141].

В учебной деятельности для развития образовательного потенциала обучающихся были использованы различные методы, приемы, задания, упражнения, которые способствовали активной познавательной деятельности. Развитию мыслительной деятельности обучающихся помогает использование продуктивных заданий творческой направленности по различным темам, тем самым, прослеживается связь между компонентами системы знаний.

Таким образом, необходимо было распределить темы в конкретной последовательности, от простой к сложной, чтобы прослеживалась содержательная линия полученных знаний.

Содержательная линия преемственности рассматривается в разных направлениях:

– преемственность между уравнениями и различными другими понятиями математики [Шихалиев, с. 84];

– между типами уравнений [Фока, с. 25];

– между ступенями обучения (начальное — среднее; средние классы — старшие классы) [Цирулик, с. 35-37].

Особое место уделялось содержательной линии цравнений, отбору примеров заданий, установление связей между темами при изучении темы «Уравнения» в начальной и средней школе.

Самым обсуждаемым был вопрос – это, на каком уровне образования, и каким способом будут решать уравнения.

При изучении уравнений необходимо выделить два компонента:

1. Взаимосвязь между компонентами уравнения и результатами, полученных в результате арифметических действий.

2. Свойство равенств [Моро, с. 39].

Наличие данных свойств, показывает, что изучение уравнений необходимо только после того, как обучающиеся познакомиться с простыми числами, преобразование выражение.

Тем самым, происходит обеспечение преемственно при изучении содержательной линии уравнений, числовых множеств и выражений, при их преобразовании [Фока, с. 20].

Часть сторонников данного подхода, считало, что обучающие слишком рано прибегают к способу решения уравнений с помощью взаимосвязи между компонентами уравнения и результатами, полученных в результате арифметических действий, тем самым подчеркивают его формальность. Рекомендовалось решать в начальной школе только методом подбора и прикидки чисел, так как они показывают учащимся все возможные отношения между левой и правой частями уравнения [Кахаров, с. 19].

Сторонники второго направления предлагали отказать вообще от данного способа решения уравнений в начальной школе, так как данный способ:

1. Нарушает преемственность между начальной и средней школой [Фарсиян, с.17] , так как принцип равносильности уравнений не имеет смысла [Шихалиев, с. 83];

2. способствует усвоению *формальной* точки зрения на уравнения [Шимаров, с. 153]; нарушает *принцип научности*, так как изучаются положения, от которых придется отказаться в дальнейшем образовании [Шимаров, с. 13] — «то, что усвоено детьми в течение пяти предыдущих лет, становится неприемлемым на новом этапе обучения, начиная с шестого класса…» [Шихалиев, с. 83].

Сторонники данного направления считали, что уравнения должны решаться логически, обсуждая пути его решения. «При этом разумеется, не следует оперировать терминами, апеллирующими к отрицательным числам…» [Фарсиян, с. 17].

Предлагали применить следующие способы решения уравнений:

- способ подбора;
- графический способ;
- составление таблиц;
- способ разложения на множители;
- использование свойств произведения и частного [Виленкин, с. 358].

Таким образом, данный способ позволит избежать различного уровня знаний у обучающихся, также не нужно будет переучивать их на разных ступенях образования.

Изучения арифметического и алгебраического способа решений уравнений, на разных уровнях обучения трактовалось как нарушение преемственности в изучение темы «Уравнения», так как происходит разрыв содержательной линии изучения информации. Но, не смотря на этого, на различных уровнях обучения раскрываются разные свойства, расширяются понятия, прослеживается связь между компонентами и обучающиеся получают разрозненные знания. Это повышает эффективность усвоения и обеспечивает долговременность знаний.

Также происходило активное обучения для изучения алгебраического способа решения уравнений в начальной школе.

Исследования Э. Ф. Грудановой [Груданова, с. 17], Г. С. Крыжко [Крыжко, с. 24] и Ж. С. Фарсияна [Фарсиян, с. 22] подтвердили выводы Ф. Г. Богданского о том, что учащиеся начальной школы, хорошо усваивают алгоритм решения уравнений первой степени и могут применить его при решение текстовых задач [Богдановский, с. 132]. Н. А. Менченский. и М. И. Моро проводили экспериментальные исследования по выяснению возможности подготовки младших школьников к решению уравнений и текстовых задач алгебраическим способом.

В 2000 – е году программа предусматривала запись задач в виде примера с использованием неизвестного числа *x*, понять, какой компонент известен, а какой нет и как его найти [Моро, с. 30]. Однако, данная программа была бы слишком сложной для обучающихся начальных классов, так как она носит абстрактный характер [Якунина, с. 82]. Поэтому началось усовершенствование и упрощение программы, изучаемому материалу. Алгебраический способ – был сокращен до минимума, из начального звена убрали решение задач с помощью уравнений.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что со временем стали использовать более рациональные подходы к изучению содержательной линии математики. Поэтому и преемственность прослеживали с содержательной точки зрения.

Осуществлять преемственность обучающихся на всех уровнях образования, помогло бы использование обобщенных методов и приемов умственной деятельности. Развивающая деятельность учащихся создала бы такую систему, при которой ученики самостоятельно добывают информацию на каждом этапе обучения. Благодаря результатам исследования Ю. К. Бабского, можно сделать вывод о том, что методы решения уравнений различны. Поисково – исследовательская деятельность обучающихся необходима при усвоении теоретического материала, также способствует познавательной деятельности [Бабанский, с. 48-56].

Создание методических рекомендаций было направлено в основном на начальную школу, так как были раскрыты познавательные возможности учащихся. Произошло внедрение большого числа различных программ, и были произведены учебники метода проб и ошибок. В результате длительного исследования, начальное звено сделало огромный шаг в системе образования развивающегося обучения, в отличие от среднего.

При переходе из начальной школы в основную, а именно при нарушении преемственности появились новые проблемы. Учителя начальных классов, психологически не готовы обучать учащихся по традиционным методам обучения [Воронцов, с. 11]. Кроме того, также остается проблема с преемственностью содержательной линии информации, в учебниках математики переходя из начальной школы в среднюю.

Таким образом, необходимо решить некоторые проблемы, которые не будут препятствовать положительному развитию учебной деятельности обучающихся – это:

1. Разработать единую последовательность при изучении определенного понятия.

2. Выбрать такие методы обучения, которыми можно будет пользоваться на всех этапах учебного процесса.

Чтобы проверить правильность решения поставленных задач, необходимо проанализировать содержательную линию преемственности при изучении уравнений между начальной и средней школой с помощью традиционной и несколькими современными программами обучения.

Тема «Уравнения» в учебниках для начальной школы традиционной направленности:

1. Изучается со второго класса.

2. Определяется контекстуально.

Впервые учащиеся знакомятся с уравнениями, *совмещая при этом следующие этапы:*

1. Вводится понятие термина;
2. Происходит изучение способов решения уравнений;
3. Закрепление пройденного материала.

2. Понятие «корень уравнения» не вводится.

3. Обучающиеся знакомятся с различными способами решения уравнений разного вида, данное знакомство происходит поэтапно и последовательно, на протяжении нескольких уроков.

4. При решении *различных видов уравнений, используется также другой математический материал,* но связь таким образом не прослеживается, отсюда получается, *что обобщающий потенциал уравнений утерян.*

5. *В схеме изучения уравнений есть «пробелы»* — продолжительное время не затрагиваются уравнения.

6. Изложения материала однообразен и скучен, тем самым преподаватель использует объяснительные методы обучения, а учащиеся исполнительные.

7. Мотивации для изучения уравнений в учебниках нет, так как нет обоснования для практической значимости данной темы.

8. *Повторение* уравнений осуществляется на прежнем уровне и *является репродуктивным* — расширения данного понятия не происходит [Магомеддибирова, с. 240].

К началу средней школу учащие должны решать уравнения простейшего вида при использовании различных арифметических действий.

В учебниках Г. В. Дорофеева значительно отличается содержательная линия при изучении уравнений. В данных учебниках обучающиеся встречаются с уравнениями к концу шестого класса, решают уравнения простейшего вида арифметическими способами, которыми они решали в начальных классах, затем продолжают решать уравнения только в седьмом классе, тем самым происходи большой необоснованный перерыв при решении уравнений.

При анализе учебников, можно сделать вывод о том, что в них находятся:

1. Однотипные задания;
2. Репродуктивные задания на повторение;
3. Отсутствие заданий на обобщающий потенциал решения уравнений;
4. Стиль изложения информации носит информационно – сообщающий.

В учебниках Л. Н. Шеврина [Шеврин, с. 140], автор пытается вести диалог с учащимися, обращается к ним и задает различные вопросы. Однако, автор сам отвечает на поставленные вопросы, там самым не вызывает никаких побуждающих действий к поиску ответов у школьников.

Несмотря на то, что используются общие методы и способы при изучении темы уравнения, для начальной и средней школы, отсутствует преемственность содержательной линии понятий, методов и способов решения уравнений. Недостаточно учитываются закономерности решения и внедрениях новых понятий об уравнениях, так как учебники средней школы ориентированы на продолжение традиционной линии уравнений.

Действительно, современные программы отличаются от традиционной, не только перечнем изучаемых вопросов, но и объемом содержания.

Сравним некоторые учебные программы для начальной школы с точки зрения содержательной линии при изучении темы «Уравнения» (Таблица 3)

Таблица 3

Альтернативные программы для начальной школы

Тема «Уравнение»	Сроки изучения		
	Традиционная программа	Программа Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова	Программа Л.В. Занкова
1. Введение понятия уравнения	2 класс	1 класс – дочисловой период	1 класс
2. Решение уравнений на основе взаимосвязи между результатами и компонентами арифметических действий	2-3 класс	1-2 класс	1-2 класс
3. Решение уравнений при помощи основных свойств равенств	-	3 класс	3 класс
1. Решение уравнений с однородными членами	-	3 класс	3 класс
2. Решение уравнений с неизвестными в обеих частях	-	3 класс	3 класс
3. Решение задач при помощи уравнений	-	1 класс – составление задач по схемам и уравнениям 3 класс – решение задач на составление уравнений разного типа	3 класс

В данной таблице отражены объемы знаний полученные по теме «Уравнения» в современных программах в отличии от традиционной. Такая разница свидетельствует о том, что для некоторых учащихся информацию, которую они будут получать в средней школе будет давно известной, а для других будет совершенно новой.

По программе Л. В. Занкова происходит понижения уровня знаний у учащихся, так как обучающие уже умеют решать уравнения различными арифметическими способами, и могу производить простые преобразования с уравнениями. Также возникает проблема при рассмотрении алгебраического способа решения уравнений, при переходе из начальной школы в среднюю.

Таким образом, отличительной чертой в современных учебных программах, является: нахождения темы «Уравнения» среди других тем в курсе начальной школы; степень сложности решения уравнений, которые предоставляют школьниках на разных уровнях обучения; позиция автора при решении уравнений алгебраическим способом.

По традиционной образовательной программе обучения математики обучающиеся знакомятся с уравнениями только во второго классе, а к концу третьего могут решать с помощью простых арифметических действий [Моро, с. 224]. На данном этапе обучения не рационально использовать более сложные примеры заданий, так как обучающиеся не смогут решить их простыми арифметическими действиями, тем самым понизится мотивация к их изучению и решению. Несмотря на то, что данная программа предусматривает «использование уравнений при решения задач» [Вохмянина, с. 59] в третьем классе, это не нашло отражения в указанных учебниках.

В учебниках математики для начальной школы (относящихся к системе

развивающего обучения) «информация представлена в виде системы заданий, отражающей организацию целенаправленной учебной деятельности

ученика, его развитие, освоение им общих способов действий, усвоение знаний» [Дукарт, с. 11].

В системе заданий учебника:

1. Соблюдается содержательная линия теоретических знаний, предусмотрено повторение изученных терминов. Для осознанного изучения теоретического материала предоставленного в учебниках математики, учащимся предложены различного рода задания, которые способствуют положительному развитию их мыслительной деятельности.

2. Показан процесс познавательной деятельности.

3. Предпочтения получают задания, которые способствуют активной познавательной деятельности учащихся.

4. Предусмотрены различные варианты изучения нового материала.

5. Происходит продуктивная деятельность между педагогом и обучающимися, благодаря, введению дискуссионных вопрос в учебниках по математике [Дукарт, с. 13-19].

Уравнения носящие более сложный характер, также решаемые алгебраическим способ можно найти в учебниках Занкова Л. В. [Занков, с. 424] но и уровень сложности, и сроки введения тем различны. Во втором классе обучающиеся уже решают уравнения с умножением, делением, а в третьем с однородными членами, затем и с алгебраическим способом.

При введение нового способа решения уравнений, не учитывается возрастная особенность обучающихся, тем самым, происходят затруднения с решением задач при помощи уравнений. Мотивация введения алгебраического способа достаточно сильна и приводит уравнения к виду: $ax + b = c, a - bx = c, a(d + x) = c \text{ и т.д.}$

Мотивации снижается при изучении нового способа.

По программе Д. В. Эльконина - В. В. Давыдова, уравнения вводятся уже в первом классе для нахождения неизвестного числа, при уравнивании величин. Таким образом, уравнения вводились для решения текстовых задач, различными арифметическими способами [Эльконин - Давыдова, с. 44].

В третьем классе, чтобы расшить круг текстовых задач, вводится основное свойство уравнения, которое при решении равенства образует его в тождество.

Учебники математики ориентированы на традиционное обучение, при этом материал учебника должен содержать преемственность содержательных линий каждого курса, как в теоретическом, так и в практическом аспекте. Алгебраический способ решения уравнений, в начальной школе не изучается, поэтому следуют сделать опор на него в средней школе.

В учебнике Н. Я. Виленкина [Виленкин, с. 358] необходимо решить задачу с помощью уравнения, которая приводит его к простейшему виду, но арифметическим способом ее решить легче и быстрее. Предварительная работа с данным способом не просматривается. Затем, предлагается решить и составить уравнение по рисунку, объяснить смысл буквенного равенства. Происходит подготовительный этап для решения заданий нового вида $ax * b = c$.

Усложненные задания, которые решаются с помощью уравнения, не сопровождаются объяснением и способом решения. Образец решения представлен позже, при решении задачи с однородными членами выражения.

Решение задач сводится к одному способу, нет возможности сравнить с другим способом, также отсутствует способ составление уравнения в зависимости от выбора переменной, так как тема «Деление натуральных чисел» стоит в учебнике позже.

Данный способ не является проблемным, но и не вызывает активную мыслительную деятельность обучающихся, а лишь направляет их на репродуктивную деятельность.

В учебниках математики для средних классов Г. В. Дорофеева, С. Б. Суворовой, Е. А. Бунимовича, знакомство с алгебраическим способом решения уравнений происходит только в 6 классе [Суворова, с. 381]. Уравнение – верное равенство, содержащие неизвестное число. Верность данного равенства заключается в правильности написания на математическом языке, также дает представление о разных или одинаковых величинах, предоставленных в задаче. При составлении уравнений для решения текстовых задач в действительности «мы записываем не уравнение ..., а… истинное равенство, характеризующее искомую величину в соответствии с условием задачи, которое мы также считаем истинным. И лишь затем - по многовековой традиции - рассматриваем букву, обозначающую искомую величину (точнее, число - меру этой величины) как переменную для того, чтобы применить теорию решения уравнений для нахождения требуемой величины, и поэтому начинаем называть рассматриваемое равенство уравнением, чтобы наиболее естественно с терминологической точки зрения войти рамки этой теории» [Дорофеев, с.43].

На данном этапе обучения предлагается решить и составить уравнения по рисунку, также записать с помощью уравнения условия задачи. Позже происходит знакомство с «алгебраическим способом» [Дорофеев, с. 125].

Предлагаются к решению задания вида:

1. Составить буквенные уравнения по условию задачи;
2. Придумать задачу с уравнением;
3. Выбрать задачу, решение которой будет уравнение;
4. Составить уравнение по условию задачи, с помощью плана.

Таким образом, данная работа будет познавательной, но недостаточной разнообразной для обучающихся. Данные задания можно найти в учебниках шестого класса. Также прослеживается тенденция о том, что уравнения изучают во втором классе, потом около трех – четырех лет с ними никак не контактирую, а позже снова изучают. Учащиеся не понимают практическую значимость уравнений, и необходимость их изучения.

Выше перечисленные сведения, указывают на отсутствие теоретической и практической преемственности между начальным и среднем уровнем образования.

Также следует отметить, что способы и методы обучения в начальном и среднем звене различны, отсутствует преемственность в практическом плане.

Сравнительный анализ с этой точки зрения учебников математики для начальной школы (системы развивающего обучения) Э. И. Александровой [Александрова, с. 3-5]; И. И. Аргинской [Аргинская, с. 7-9] и учебников математики для пятых и шестых классов Н. Я. Виленкина и другие [Виленкина, с.124]; Г.В. Дорофеева и др. [Дорофеева, с. 303]; Э. Р. Нурка и А. Э. Тельгмаа [Нурка, с. 304]; Л.Н. Шеврина и др. [Шеврина, с. 224] позволяет констатировать, что они моделируют учебные процессы разного характера.

Учебники для средней школы содержат неоспоримые математические понятия, тем самым обучающиеся не выполняет поисково –

исследовательскую деятельность при изучении нового материала. Также информация представлена в большом объеме, что свидетельствует о понижении заинтересованности в обучении.

Задания, которые показаны в учебниках для начальной школы, стимулируют учащихся на частично – поисковый или поисковый метод обучения. Методы, которые основаны на анализе, синтезе и обобщении информации в средней школе не особо используются. Таким образом, происходит нарушение преемственности при организации учебной деятельности.

Представленный анализ учебников по математике для начальной и средней школы, показывает нарушения преемственности в теоретическом и практическом плане при изучении темы «Уравнения».

Данное нарушение указывает, на не систематизированное изучение уравнений, с начальной школы, переходя в среднюю, тем самым происходит нарушение педагогических принципов обучения [Чуприкова, с. 143].

Также, встает проблема о создании методических рекомендаций при изучении темы «Уравнения» в математике с первого по шестой класс, основанный на принципах методической концепции развивающего обучения и обеспечивающий преемственность в изучении уравнений на всех этапах обучения, как в теоретическом, так и в практическом плане.

При создание методических пособий по решению уравнений были использованы все достоинства и недостатки, существующих методик.

Методика изучения уравнений будет наиболее эффективна, если:

1. Знакомство с уравнениями будет в конце обучения в начальной школе.

Тем самым, взаимосвязь между компонентами и результатами арифметических действий, необходимо использовать как готовое средство решения уравнений, с которым обучающихся, необходимо познакомить заранее, с помощью различных мыслительных упражнений.

2. Произвести необходимое определение возрастных особенностей учащихся, их способность к изучению и восприятию учебной информации. Произвести отделение этапа знакомства и изучения темы « Уравнения». Благодаря, этому разделению, обучающиеся лучше усвоят информацию: определят отличительные признаки уравнений и после этого приступят к способам их решения.

3. Ввести понятия, которые будут необходимы для решения уравнений, восприятия и математического общения.

4. Создание проблемных ситуация для знакомства со способами решения уравнений.

5. Изучение всех видов простейших уравнений будет на одном уровне образования, также рассмотреть усложненные варианты решения уравнений с двумя арифметическими действами.

6. При формировании новых понятий, используются такие упражнения и задания, которые будут побуждать учащихся на активно - познавательную деятельность.

7. Произойдет максимальное сближение изучения уравнений различных видов и способов решения, тем самым повысится мотивация у обучающихся.

8. Использовать тему « Уравнения» для повторения различных тем из курса математики начальной школы.

9. Использовать преемственность повторения уравнений в пятых, шестых классах при изучении новых тем.

ВЫВОДЫ ПО I ГЛАВЕ

1. Преемственность является условием, без соблюдения которого невозможно дальнейшее развитие. Таким образом, необходимо найти такие пути обучения при соблюдении преемственности, при которых будет максимально высокий уровень знаний.

2. Преемственность как главный компонент при осуществление образовательной деятельность, обеспечивает поэтапное формирование знаний у обучающихся на всех уровнях образования, тем самым образует целостную систему обучения.

3. Переосмысление преемственности происходит под влиянием развивающих функций обучения.

При этом практическая значимость преемственности будет рассматриваться не только с точки зрения деятельности преподавателя, но и учебной занятости учащегося на всех уровнях образования.

4. Максимальная вовлеченность в рабочий процесс у обучающихся обеспечивается, благодаря рациональному выбору методов обучения.

5. Во время анализа школьных учебников были выявлены нарушения преемственности в теоретическом и практическом плане, которые препятствует систематизации и общению полученных знаний при обучении. Чтобы обеспечить преемственность и способность развития мыслительной деятельности у обучающихся, необходимо разработать единую методику по изучению уравнений с первого по шестые классы.

6. Осуществление преемственности при изучении необходимо осуществлять комплексно:

а) выстраивание изучения уравнений с учетом необходимости формирования у обучающихся соответствующих понятий и общих способов деятельности; использовать уравнения при решении различных задач и изучении новых понятий; создать необходимые условия, которые способствовали бы созданию поисковой и эвристической деятельности учащихся.

б) создание систематизированных учебников, отвечающих на все требования стандартов.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В РАЗВИТИИ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ УРАВНЕНИЙ МЕЖДУ НАЧАЛЬНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛОЙ

2.1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕАЛИЗАЦИИ ПЕРВИЧНЫХ УСЛОВИЙ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ В ОБУЧЕНИИ

Объективность реализации преемственности в учебной деятельность, осуществляется с помощью взаимосвязи, как внутри дисциплины, так и между метапредметами. При формировании знаний, умений и навыков у обучающихся, необходимо развивать способность переноса знаний и умений на различные виды образовательной деятельности, осуществлять аналитическую деятельности в усвоение нового материала. Для реализации преемственности в обучении необходимо четко придерживаться к содержательной линии теоретического материала. Отбор информации для изучения тем – это важный компонент образовательной деятельности.

В качестве педагогических требований к содержанию учебного материала выделяют [Магомеддибирова, с.38]:

-учитель должен показать основу научных знаний и практику (принцип мировоззренческой направленности обучения),

- учитель должен показать логику науки изучаемого предмета (научность обучения),

- учитель должен показать содержание предмета, так чтобы ученик смог применить его на практике (практическая направленность),

- учитель должен показать содержание предмета при решении частично-дидактические задачи (принцип доступности обучения).

Информация содержания учебника, темы должна соответствовать возрастным особенностям ученика.

При преемственности обучения важна структура содержания учебной информации. Темы для изучения должны быть выстроены одинаково и с точки зрения методики удобные для учителя, чтобы прослеживалась взаимосвязь с другими темами.

В дидактике предлагается [Магомеддибирова, с.45] три варианта структуры содержания информации:

-исторический подход – целесообразность развертывания содержания учебной информации с логикой развития науки данного предмета,

-исторический подход – структура содержания учебной информации с логической современно-научной информацией предмета,

-психолого-педагогический подход – связан с закономерностями познавательных возможностей обучающихся и структура содержания учебной информации.

Каждый подход связан со структурой содержания учебной информации и имеет свои условия решения, но по отдельности не работает. Все подходы должны работать совместно, обеспечивая преподавателю возможность учитывать трудность при усвоении материала, показывать межпредметные и предметные связи содержания информации.

Методика обучения должна показывать внутрипредметную связь элемента содержания информации и установление логических связей. Значимость элементов содержания информации в учебнике должна проводиться с учетом специфики содержания информации, простой для усвоение, но и с методической точки путем содержательных рассуждений сложно. Методика строения содержания образовательной информации в учебнике, сложно - структурированная как внутренне, так и внешне.

Преемственность при изучении темы «Уравнения», должна прослеживаться:

- между уравнениями и другими понятиями,
- между ступенями обучения (начальная школа-средняя школа, средняя школа-старшие классы),
- между этапами изучения уравнений.

Особое внимание при преемственности обучения должно выделяться:

- содержанию обучения,
- объему обучения,
- нахождение местоположения темы « Уравнения» на различных уровнях образования,
- связь уравнений с другими математическими понятиями,
- детальный обор заданий, для каждого уровня образования.

Главный вопрос преемственности при обучении уравнений состоит в:

- последовательное изучение способов решения уравнений,
- нахождение неизвестных членов уравнения,
- изучение и применения свойств многочленов.

2.2. МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ОБЩИХ УМЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При изучении математики тема «Уравнения» занимает важное место. Тема основана на построении, изучении некой математической модели, при изучении которой ученики исследуют, строят, решают задачи из смежных дисциплин.

Изучив тему «Уравнения», учащиеся должны научится решать различные уравнения, использовать приобретенные знания, умения и навыки в практической деятельности. В ходе освоения математики должен обладать определенными способностями (Таблица 4).

Таблица 4

Способности, которыми должен обладать ученик при освоения математики

Способности	Должен знать и уметь
Запоминание и воспроизведение изученного материала	– определение видов уравнений, – теоремы равносильности неравенств, – методы и приемы решений уравнения,
Готовность к преобразованию изученного из одной формы в другую, к его интерпретации	– термины: уравнение, корень уравнения, решение уравнения, система уравнений, решение системы уравнений, в тексте задачи и речи учителя

Продолжение таблицы 4

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности	– решение простейших, линейных, квадратные, уравнения третьей и четвертой степени, системы уравнений, также рациональные и другие, – решение систем уравнений с двумя и более неизвестными, – решение уравнений с помощью указанных параметров, – решение текстовых задач, с помощью уравнений, – графически изображать решение уравнений.

Перед тем как ввести понятие «уравнение» школьником предлагается повторить понятия: равенство, верное равенство, найти значение выражения, а также проверить умение читать буквенные выражения.

Основные подходы к обучению решения уравнений:

- подготовительный,
- введение понятия «уравнение»,
- формирование умения решать уравнение,
- формирование умения решать задачи с помощью уравнения.

Например ознакомление с уравнениями и способами их решения происходит в 1-2 классах в учебниках следующих авторов: И.И. Моро, М.А. Бантова, И.Э. Аргинская, Л.Г. Петерсон (Таблица 5).

Таблица 5

Анализ учебников

Подходы изучения уравнений	Учебные программы		
	Школа России (И.И. Моро)	Школа 2100 (Л.Г. Петерсон)	Система Занкова (И.Э. Аргинская)
1. Подготовительный этап	Какие записи верны? $5 + 2 = 7$ *или* $10 - 4 = 7$ Подставьте в окошко то число, при котором получится верное равенство: $3 + \quad = 8$		
2.Введение понятия	Вместо окошек, используются латинские буквы (a.b.c.x.y) и такие записи называются уравнениями $x + 5 = 10$ *или* уравнение $12 : x = 4$ Важно закрепить умение узнавать уравнение. Найти уравнение: $2 - 3 = 2,\ x + 9 = 18,\ 16 - x = 3$.		
3.Формирование умения решать уравнение	– подбор – зависимость между компонентами и результатами арифметического	– подбор, – зависимость между компонентами и результатом арифметического	– подбор, – по таблице сложения, использование числового ряда, – с опорой на десятичный состав (десятки+единицы)

Продолжение таблицы 5

	действия.	действия (между частью и целым), – исходя из понятия «часть-целое» с использованием отрезка.	– зависимость между компонентами и результатом действия, – с опорой основные свойства равенств *умножение числа на сумму $12x + 2 = 10 + 2$, *вычти из обеих частей равенство $12{:}\,2x = 10x + 2$ и $18x{:}\,3x = 2$ *найдем неизвестный множитель $x = 12{:}\,2x = 12$
	Результат полученный в левой части нужно сравнить с результатом в правой части. Осознанно выполнять проверку.		
4. Формирование умения решать задачи с помощью уравнения	Процесс решения задачи состоит из этапов: – чтение задачи и анализ ее содержания, – поиск решения, – выделение неизвестных чисел, – выбор неизвестного и обозначение его буквой, – запись текста, – составление уравнения, его решения, проверка, перевод – найденного значения на язык текста, – проверка решения задачи, формулирование ответа.		

Равносильные преобразований уравнений бывают: общие (перенос слагаемых из одной части в другую, деление всех членов уравнения на одно и то же число, приведение уравнения к целому виду, смена знаков всех членов, замена переменной) и специальные (возведение обеих частей в степень с натуральным показателем, извлечение из обеих частей уравнения корня, использование основных тригонометрических тождеств). Также равносильными называются уравнения, которые имеют одни и те же корни уравнения или вовсе не имеют никаких корней. Таким образом, определенное количество корней одного уравнения, подойдет и к решению другого уравнения.

Ознакомление с темой «уравнения», понятиями «уравнение» и другими определения понятий, объем и содержание понятий в учебниках изменяется, дополняется с каждым курсом, рассмотрим учебники (Таблица 6).

Таблица 6

Ознакомление с понятиями «Уравнений»

Автор учебника	Название темы	Определение (понятие)	Примеры
1 класс			
Т.Е. Демидова, Ч. 2	Уравнение. Проверка решения уравнения.	- решить уравнение	$y-4=3$ $x+4=9$
2 класс			
Т.Е. Демидова, Ч.1	Учимся решать уравнения.	-через неизвестные компоненты найдем решение (или корень)	$x+4=11$
М.И. Моро, Ч. 1	Уравнение.	- определение уравнения, - что значит решить уравнения	$x+2=11$
3 класс			
М.И. Моро, Ч. 1	Решение уравнений.	- решение уравнений с помощью неизвестных компонентов, которые подбором решить трудно	$14-x=5$
4 класс			
А.Л.Чекин, Ч. 2	Уравнение. Корень уравнения. Учимся решать задачи с помощью уравнений.	- корень	$x+(x+8)=28$ $x*3=72$
5 класс			
Н.Я. Виленкин	Уравнение.	-определение уравнения, -корень уравнения, -решить уравнения, -неизвестные компоненты	$15-x=9$
И.И. Зубарева	Уравнение.	-уравнение, -решить уравнение, -деление на нуль	$36 \div x=3$
6 класс			
С.М. Никольский	Уравнения. Решение задач с помощью уравнений.	-решить уравнение, -корень уравнения, -алгоритм решения задач с помощью уравнений	$12 \div 2x=3$
Н.Я. Виленкин	Решение уравнений.	-корни уравнения с помощью переноса слагаемых и приведения подобных слагаемых, -линейное уравнение, -дополнительный материал	$-7y+9=-8y$

Изучение уравнений, способствует развитию мышления, формированию вычислительных способностей у школьников, также подготавливает учащихся к изучению различных видов уравнений в средней школе.

Обучение уравнений начинается с простейшего вида. После изучение нового вида уравнений, решение которого, обучающийся все равно должен довести до простейшего вида.

Общие этапы знакомства учащихся с уравнениями:

1. Знакомство с понятием « Уравнение».
2. Решение простейшего вида уравнений.
3. Анализирование работы с уравнениями.
4. Построение алгоритма решения простейших равенств.
5. Решение усложненных уравнений,
6. Анализирование действий при решении уравнений.
7. Применение общих методов и приемов при решении уравнений.
8. Построения алгоритма решения уравнений общими методами.
9. Описание частных методов решения равенства, к данным видам уравнения.
10. Построение алгоритма решения уравнений частными способами.
11. Анализирование своих действий при работе с частными примерами решения уравнений.
12. Создание общих приемов решения уравнений.

Чтобы сформировать навыки решения уравнений у обучающихся, необходимо сначала ознакомить их с основными понятиями, которые используются при решении уравнений, обучить способам и методам решения уравнений. Последовательно ознакомить с различными способами решения уравнений, переходя от простого к сложному методу. Также научить адекватному выбору способа решения уравнения.

2.3. ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ЕГО РЕЗУЛЬТАТЫ

В рамках магистерской диссертации был проведен педагогический эксперимент (2019-2020 год) в четвертом классе 63 школы, шестом классе 67 школы города Тюмени, четвертом, шестом классах школы №1 Вагайского района.

Для выявления результатов выполненных заданий школьников были использованы следующие критерии:

1. Способность и умения решать уравнения различных видов;
2. Осознанное применение учащихся уравнений в решении различных задач.

Преемственность находит свое отражение в результате усвоения школьником знаний об уравнениях, также позволяет определить степень осознания понятия уравнения и способ его решения.

Констатирующий эксперимент проведен в школах города Тюмени, где обучение проходит по программе: «Начальная школа 21 века».

Анализ результатов эксперимента № 1

Цель: проверить способности обучающихся находить и решать уравнения на основе взаимосвязанных компонентов.

Вариант №1

1. Решите уравнение:
   а) $62 - x = 53$ б) $x \cdot 4 = 32$
2. Найди уравнение и реши его:
   а) $x \cdot 2 \geq 12$ б) $2x \cdot 7 = 42$
3. Решите уравнение. Сравни значение уравнений.
   а) $x - 210 = 350$ б) $16 \cdot x = 80$

В таблице 7 представлены результаты задания №1.

Таблица 7

Результаты задания №1

Классы		Задание а		Задание б	
		выполнили	не выполнили	выполнили	не выполнили
Экспериментальные классы 50 чел.	кол. чел.	50	-	49	1

Продолжение таблицы 7

Контрольные классы 28 чел.	кол. чел.	48	-	48	1

Учащиеся экспериментальных и контрольных классов выполнили задание А все правильно, а задание Б решили уравнения неправильно по одному человеку из каждого класса, ошибки были вычислительного характера.

Результаты задания №2 (Таблица 8).

Таблица 8

Результаты задания №2

Классы		Задание 1		Задание 2	
		выполнили	не выполнили	выполнили	не выполнили
Экспериментальные классы 50 человек	кол. чел.	50	1	50	-
Контрольные классы 28 человек	кол. чел.	28	1	28	-

Учащиеся экспериментальных и контрольных классов выполнили задание б все правильно нашли и решили уравнение, а в задание а допустили ошибки при вычислении.

Результаты задания №3 (Таблица 9).

Таблица 9

Результаты задания №3

Классы		Задание 1			Задание 2		
		выполнили	не выполнили	выполнили не в полном объеме	выполнили	не выполнили	выполнили не в полном объеме
Экспериментальные классы 50 человек	кол. чел.	2	-	48	2	-	48
Контрольные классы 28 человек	кол. чел.	2	-	26	2	-	26

Ученики правильно решили уравнения, но задание выполнили не в полном объеме (не сравнили значение уравнений), как в первом задании, так и во втором. Это думаю не прочитали полностью задание.

Почти все ученики справились с заданием 1, ошибки были в вычислении. Ученики выделяют из предложенных выражений - уравнения, решают методом нахождения неизвестного компонента. Большая часть учеников не довыполнили третье задание, думаю это определено тем, что плохо прочитали задание.

Абсолютное большинство учащихся экспериментальных и контрольных классов (98%) выполнили задание 1, решили уравнения на нахождение неизвестного компонента, правильно выбрали уравнение из предложенных выражений.

Ученики, которые обучались по развивающей методике обучения, лучше усвоили материал, при этом была сохранена содержательная линия преемственности.

Анализ результатов эксперимента № 2

В эксперименте №2 участвовали ученики шестых классов.

Цель: определить уровень знаний обучающихся при решении уравнений и проверить умения составления уравнения по условию задачи.

Вариант №1

1. Перепишите, заменив x числом так, чтобы получилось верное равенство: а)$-3\,x = x + (-8)$ б) $x + (-8\,) = -10$

2. Решите уравнения и подберите к каждому из приведенного ниже списка правило, которое использовали при его решении : $x + 210 = 350$, $560 - x = 350$, $(60 + x) + 50 = 250$, $4 \cdot x = x \cdot 4 = 56$

а) правило нахождения неизвестного слагаемого

б) переместительное свойство умножения.

в) правило вычитания из числа

г) сочетательное свойство сложения

3. Решите задачу: В классе 27 учащихся. Причем девочек на 3 больше, чем мальчиков. Сколько мальчиков в классе?

За x обозначим количество мальчиков.

Объясни, что могут означать эти записи:

$x + 3$, $27 - x$, $x + (x + 3)$, $27 - (x + 3)$

Составь уравнение по условию задачи и реши его.

С этими данными составь другие задачи, изменив условие задачи.

Результаты задания №1 (Таблица 10)

Таблица 10

Результаты задания № 1

Классы		Задание a		Задание b	
		выполнили	не выполнили	выполнили	не выполнили
Экспер-ые классы: 28 человек	кол. чел.	25	3	25	3
Контрольные классы: 26 человек	кол. чел.	24	2	23	3

По несколько учеников из экспериментального и контрольного классов не справились с заданием. Здесь учитывалось: правильность переноса знаков из одной части в другую и правильно вычисление неизвестного. Неправильно перенесли число со знаком, соответственно уравнение решено не верно. Перенос знака из одной части в другую вызывает затруднение у школьников.

Результаты задания № 2 (Таблица 11)

Таблица 11

Результаты задания № 2

Классы		Решение уравнений		Сопоставление	
		выполнили	не выполнили	выполнили	не выполнили
Экспериментальные классы 28 человек	кол. чел.	24	4	25	3
Контрольные классы 26 человек	кол. чел.	24	2	24	2

В этом задание не предусматривалось выполнение не в полном объеме, нужно было сделать все задания. Но если хотя бы в одном задании была совершена ошибка, то всё задание выполнено не верно. Проверялось умение решать уравнения с помощью предоставленных правил.

Ученики допустили такие ошибки в экспериментальном и контрольном классах: не правильно решили уравнения, во втором - не указали правило.

Результаты задания № 3 (Таблица 12)

Таблица 12

Результаты задания № 3

Классы		Объяснили записи			
		одну	две	три	четыре
Экспериментальные классы 28 человек	кол. чел.	1	12	13	2
Контрольные классы 26 человек	кол. чел.	21	3	1	1

Ученики с трудом понимают условие задачи и объясняют записи правильно. В контрольном классе затрудняются ученики, не могут объяснить выражения.

Результаты задания № 3 (Таблица 13)

Таблица 13

Результаты задания № 3

Классы		Составили уравнение			
		составили правильно	составили неправильно	не составили	решили, записали ответ
Экспериментальные классы 28 человек	кол. чел.	18	2	2	6
Контрольные классы 26 человек	кол. чел.	13	5	4	4

Разобрав записи, многие все равно не смогли записать уравнение правильно и решить задачу. Так решение задач с помощью уравнения у школьников получается плохо. Ученики затрудняются решать такие задачи. В контрольном классе больше всего учеников не смогли решить задачу и записать ответ.

Результаты задания № 3 (Таблица 14)

Таблица 14

Результаты задания № 3

Классы		Составили новую задачу		
		составили одну задачу	составили две задачи	не составили
Экспериментальные классы 28 человек	кол. чел.	5	3	20
Контрольные классы 26 человек	кол. чел.	2	-	24

В экспериментальном классе составили одну задачу пять человек, две задачи три человека, эти ученики усвоили метод решения задач с помощью уравнения и смогли изменив условие задачи составить другие задачи.

В контрольном классе ученики затруднились выполнить задание, справились только двое.

Анализируя эксперимент, учащиеся умеют решать уравнения, но затрудняются изменять условия задачи. В классах требуется работа по формированию умений составлять и решать уравнения.

Зависимость между компонентами школьники видят, решают, но затрудняются переносить, изменив знак.

Таким образов, результаты эксперимента дают возможность говорить, что в 4, 6 классах ученикам интересна тема «уравнения», но также вызывает некоторые затруднения.

Учащиеся могут решать уравнения, разными способами, применяют их, выделяют уравнения из разных выражений, составляют понятия и находят связь между ними.

ВЫВОДЫ ПО II ГЛАВЕ

Для осуществления преемственности с первого по шестой класс, был произведен четкий отбор изучаемого материала, который в дальнейшем, обучающиеся смогли бы применить его на практике.

Умения решать уравнения у школьников закладывается постепенно, от простейших уравнений переходят к более усложненным, а затем решают текстовые задачи с их помощью.

При решении уравнений школьники использовали арифметические и алгебраические способы решения уравнений, различные свойства и правила при нахождении неизвестного множителя.

Данный эксперимент показал, что не все учащиеся могут решать уравнения, испытывают затруднения при решение текстовых задач с помощью уравнения, также при переносе компонентов из одной части в другую.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена содержательная линия преемственности при изучении темы «Уравнения» в начальной и средней школе.

Реализации преемственности возможно только при единой учебной программе с первого по девятый класс, при различных учебных программах, невозможно выделить единую, содержательно – методическую концепцию обучения.

Разработка методических рекомендаций по решению уравнений с первого по шестой класс осуществлялась с помощью:

– психологической и педагогической литературы;

– возрастных особенностей обучающихся;

– специфических понятий преемственности, основных математических понятий, которые необходимы для решения уравнений.

Благодаря, данной методической разработке, было осуществлено подготовление обучающихся к усвоению курса алгебры, производилась работа как с учащимися, так и с преподавателями, создавалась благоприятная атмосфера для познавательной деятельности обучающихся.

Приведенный анализ исследования показал эффективность методики, также показал, на что следуют обратить больше внимания при изучении уравнений на основе преемственности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра. Справочная информация по алгебре URL:http://www.algebraclass.ru/drobno-racionalnye-uravneniya (дата обращения 15.01.2021).

1. Александрова Э.И. Математика I. Харьков: Инфолайн, 1995. 140с.

2. Александрова Э.И. Математика II. Харьков: Инфолайн, 1995. 172 с.

3. Александрова Э.И. Математика III. Харьков: Инфолайн, 1996. 308 с.

4. Аргинская И.И. Математика I. Москва: Просвещение, 1995. 351 с.

5. Аргинская И.И. Математика II. Москва: Просвещение, 1996. 286 с.

6. Аргинская И.И. Математика III. Москва: Просвещение, 1997. 269 с.

7. Аргинская И.И. Математика. Учебник для 2 класса ч.1. Самара: Издательство «Учебная литература, 2013. 128 с.

8. Бабанский Ю.К. Проблемы методов обучения в современной общеобразовательной школе. Москва, 1998. 224 с.

9. Бантова М.А. Методика преподавания математики в начальных классах. Учеб. пособие для учащихся. Москва, 2004. 335 с.

10. Баранова И.В. Математика: пробный учебник для 5 класса средней школы. Москва: Просвещение. 1989, 239 с.

11. Батаршев А.В. Преемственность в применении методов и дидактических приемов обучения на уроке. Таллинн: Валгус, 1989. 96 с.

12. Батаршева А.В. Преемственность обучения в общеобразовательной и профессиональной школе. СПб: Ин-т профтех. образ., 2016. 80 с.

13. Бекаревич А.Н. Основные вопросы методики преподавания уравнений в средней школе. Минск: ГПИ, 1998. 21 с.

14. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. Математика. Москва: Дрофа, 2010. 395 с.

15. Богоявленский Д.Н. Моделирования как основа построения курса «Математика и конструирование» в начальных классах. Москва, 1992. 185 с.

16. Бондарев А.А. Общие учения об уравнениях в курсе элементарной математики. Краснодар, 2002. 15 с.

17. Ванцян А.Г. Математика: Экспериментальный учебник для 5-го класса общеобразовательной школы. Самара: корпорация « Фёдоров», 1998. 216 с.

18. Веккер Л.М. Психические процессы. Т. З.: Л, 1998. 326 с.

19. Виленкин Н.Я. Математика 5 класс: учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений. Москва, 2013. 280 с.

20. Виленкин Н.Я. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. М.: Мнемозина, 2008. 288 с.

21. Виленкин Н.Я., Петерсон Л. Г. Математика: учебник для 1 класса. Москва: Инпро- рес, 1996. 80 с.

22. Виленкин Н.Я., Петерсон Л. Г. Математика: учебник для 2 класса. Москва: Инпро- рес, 1996. 64 с.

23. Виноградова Л.В. О задачах на составление уравнений. Москва, 1994. 16 с.

24. Воителева Г.В. Преемственность в изучении чисел в начальной и основной школе. Москва, 1999. 17 с.

25. Волович М. Б. Математика: учебник для 6 класса. Москва, 1995. 192 с.

26. Волович М.Б. Математика: учебник для 5 класса с использованием калькулятора. Москва, 1994. 255 с.

27. Воронина Л.В. Реализация преемственности в обучении математике (на материале 1-6 классах). Екатеринбург, 1999. 16 с.

28. Воронцов А.Б. Подходы к преемственности на разных ступенях образования в рамках системы Д.Б. Эльконина - В. В. Давыдова, 1999. 9-16 с.

29. Восканян А.Н. Обучение решению уравнений в средней школе с точки зрения функциональной зависимости. Ереван: ЕГУ, 1966. 16 с.

30. Гальперин П. Я. Обучение и умственное развитие. Тбилиси, 1971. 78-78 с.

31. Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий. Москва: Наука, 1996. 476 с.

32. Ганелин Ш.И. Педагогические основы преемственности учебно - воспитательной работы в 4-5 классах, 2005. 4 с.

33. Ганелин Ш.И. Преемственность учебно - воспитательной работы в 4-5 классах. Известие, 1987. 18 с.

34. Гергенова В.Е. Текстовые задачи как средство формирования математических понятий и представлений у младших школьников. Москва, 1989. 16 с.

35. Груданова Э.Ф. Формирование у учащихся умение решать задачи с помощью уравнений, 2010. 17 с.

36. Груденов Я.И. Психолого- педагогические основы методики обучения математики. Москва: Педагогика, 2004. 160 с.

37. Давыдов В. В. Концепция гуманизации российского начального образования. Москва, 1996. 16 с.

38. Давыдов В.В. Опыт введения элементов алгебры в начальной школе. Москва, 2007. 31-43 с.

39. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. Москва: Педагогика, 2006. 268 с.

40. Давыдов В.В. Психологические возможности младших школьников. Москва: Просвещение, 1998.

41. Давыдов В.В. Российская педагогическая энциклопедия. Москва: Большая Рос. Энцикл., 1992. 608с.

42. Дарский Н.Н. О преемственности в обучении. Народное образование. Москва, 2000. 21-23 с.

43. Левшин Н. Н. Особенности обучения математическому языку младших школьников. Киев, 1981. 156 с.

44. Демидова Математика 1 класс Ч.2. Москва: Издательство Дом РАО. 2005. 80 с.

45. Демидова Т.Е. Математика 1 класс: учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. М.: Баласс, 2016. 80с.

46. Дорофеев Г.В. О принципах сбора содержания школьного математического образования. 1990. 2-5 с.

47. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика: 5 класс. Москва: Баллас, 1997. 240 с.

48. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика: 6 класс. Москва: Баллас, 1998. 112 с.

49. Дукарт М. Научно - методические основы развивающего учебника математики для начальных классов. Москва, 2000. 16 с.

50. Ждан А.Н. Преемственность в обучении. Т. 3., 1966. 485- 487 с.

51. Жилина Е.И. Алгоритмическая и алгебраическая линии в изучении числовых систем в курсе математики 4-5 классов. Москва, 1980. 16с.

52. Зубарева И.И. Математика. 5 клас: учеб. Для учащихся общеобразоват. учреждений/ И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович.-14-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2013. 270 с.

53. Истомина - Кастровская Н. Б. Методическая система развивающего обучения математике в начальной школе. Москва, 1995. 42 с.

54. Истомина И.Б. Методические рекомендации к учебнику « Математика 3 класс». Москва, 1995. 113 с.

55. Истомина И.Б. Развивающие обучение. 1996. 30-40 с.

56. Истомина Н. Б. Методика обучения математики в начальных классах. Смоленск, 2005. 272 с.

57. Истомина Н.Б. Концепция обучения математике в начальной школе, 1997. 48 с.

58. Истомина Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах. Учеб. пособия для студ. сред. и высш. пед. учеб. заведений.-4-е изд. Стереотип. Москва, 2001. 288 с.

59. Кабанова - Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. Москва: Просвещение, 1968. 288 с.

60. Кадькалова Т.И. Методика изучения математических выражений в начальных классах школы. Москва, 2008. 21 с.

61. Казуаров Р. Методика преподавания уравнений и неравенств. Ташкент, 2003, 66 с.

62. Калин Р.А. Алгебра и элементарные функции. Москва, 1969. 502 с.

63. Киллиан Н.Г. Методика формирования у учащихся понятий начальной алгебры. Москва, 1987. 15 с.

64. Колмогоров А.Н. О системе основных понятий и обозначений для школьного курса математики, 1971. 5-8 с.

65. Колягин Ю.М. Основные понятия современного школьного курса математики. Москва: Просвещение, 2001. 382 с.

66. Коркина П.С. Проблемность обучения математике как стимул развития у учащихся познавательного интереса. Шаринск, 1994. 194 с.

67. Кустов Ю.А. Дидактический принцип преемственности и методика его реализации. Куйбышев, 1987. 20 с.

68. Лебединцев К.Ф. Основы алгебры. Киев, 1990. 144 с.

69. Лебединцев К.Ф. Руководство алгебры. Москва, 1985. 142 с.

70. Леонтьев И.Я. Непрерывность и преемственность образования. 1998. 3-5 с.

71. Лысенкова С.Н. Когда легко учиться. Из опыта работы учителя начальных классов школы №587 Москвы. Москва, 1985. 176 с.

72. Люблинская А.А. О преемственности учебной работы в школе. Л., 1969. 260 с.

73. Магомеддибирова З.М. Методическая система реализации преемственности при обучении математике. Москва. 2003

74. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 6. Москва: Просвещение. 1985. 223 с.

75. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс. Москва: Просвещение, 2018. 223 с.

76. Матюшенко П.З. О преемственности между начальными классами и средней школой. 1990. 71-72 с.

77. Махкамов М. Формирование обобщенных приемов решения уравнений и неравенств в курсе алгебры неполной средней школы. Москва, 1998. 16 с.

78. Мерзляк А.Г., Поляков Д.А., Номировский В.М.. Математика: Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник. Углубленное изучение. М. Вентана-Граф, 2019. 480 с.

79. Методика обучения решению уравнений на основании свойств равенств. URL: https://studbooks.net/1755987/pedagogika/metodika_obucheniya_resheniyu_uravneniy_osnovanii_svoystv_ravenstv (дата обращения 06.01.2021).

80. Микулина Г.Г. Психологические возможности младших школьников в усвоении математики. Москва, 1969. 288 с.

81. Мордкович А.Г. Алгебра 6. Москва: Авангард, 2017. 168 с.

82. Мордкович А.Г., Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2013. 175 с.

83. Моро М.И. Математика. 2 класс. учеб. для общеобразоват. учреждений с прил. на электрон. носителе. М.: Просвещение, 2012. 96 с

84. Мукашев З.А. Преемственность как момент всеобщей связи и развития. Москва, 1987. 39 с.

85. Недоливаете Е.Ф. Внутрипредметные связи при изучении уравнений и неравенств в курсе математики 4-8 классов. Москва, 1988. 16 с.

86. Никифоровский В.А. В мое уравнений, Москв: Наука, 1997. 174 с.

87. Никольский С.М. Алгебра: учеб. за 7 кл. образовательного учреждения. М.: Образование, 2000. 285 с.

88. Никольский С.М., Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. Организаций. М.: Просвещение, 2016. 256 с.

89. Ожегов С.И. Толковый словарь русского языка: 80000 слов и фразеологических выражений. М.: Азбуковник, 1999. 994 с.

90. Оспанов Т.К. Перспективность и преемственность в обучении как условие активизации образовательной подготовки обучающихся. 1990. 25 с.

91. Смолянского М.Л. Пособие по математике для поступающих в техникумы. Москва, 1977. 334 с.

92. Цирулик Н.А. Некоторые приемы работы с уравнениями. Москва, 2001. 35-34с.

93. Шимаров П.А. Функциональная и формальная трактовка уравнений в курсе алгебры средней школы. Казань: КГПИ, 2015. 19 с.

94. Шихалиев Г.Г. Единый подход к решению уравнений и неравенств. 1995. 65 с.

95. Ярыгин А.Н. Методика решения уравнений в повторительном курсе математики. Москва, 1989.