МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра алгебры и математической логики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Заведующий кафедрой, к.э.н., доцент
____________________С.В. Вершинина
____23.06.____________2021г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
магистерская диссертация

РАЗВИТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ СРЕДСТВАМИ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ УРАВНЕНИЙ

44.04.01 Педагогическое образование
Магистерская программа «Современное математическое образование»

Выполнил работу
студент 2 курса
очной формы обучения — Унгбоев Мирзакобил Жума угли

Научный руководитель
к.п.н., доцент — Бердюгина Оксана Николаевна

Рецензент
к.п.н., доцент, декан факультета математики, информатики и естественных наук «Ишимский педагогический институт им. П.П. Ершова» (филиал ТюмГУ) — Ермакова Елена Владимировна

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие у обучающихся логического мышления – это одна из важных задач обучения в школе. Умение мыслить логически, выполнять умозаключения без наглядной опоры является необходимым условием успешного усвоения учебного материала. Логическое мышление считается очень важным потому, что без него школьник не сможет полноценно систематизировать, анализировать информацию, настоять на своем мнении.

В Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования изложены требования к результатам освоения образовательного процесса. С точки зрения развития логического мышления предъявлены следующие требования к медапредметным результатам: умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение и делать выводы.

Процесс логического мышления считается очень сложным по механизмам развития и является необходимым для хорошего психического, физического и социального развития ребенка. Благодаря логическому мышлению у обучающихся развиваются такие способности, как анализ ситуации, выявление закономерности, установление причинно-следственных связей и способность делать самостоятельные выводы. Школьник с развитой логикой сначала осмысляет задачу и потом решает ее. Одним из механизмов развития логического мышления в этом плане выступает математика. Роль математики в развитие такого вида мышления большая. Одной из причин такого мнения является тот факт, что она считается одной из теоретических наук с собственным инструментом.

Проблема развития логического развития мышления рассматривается в трудах Кущетеревой Ф.Т., Азимова Н.С., Ляховой Н.Е., Гришина А.И., Яковенко И.В. и других. В частности, Кущетерева Ф.Т. инструментом для развития мышления использует набор нескольких заданий на интерактивной доске, Азимов Н. С. в качестве средства развития логического мышления видит нестандартные методы решений уравнений. Это такие методы как: решение уравнений с использованием свойства ограниченности, монотонности, периодичности, функции, четности функции, области допустимого значения функции и исследование уравнения на промежутках действительной оси, а в исследовании Ляховой Н.Е., А.И. Гришина, Яковенко И.В. в качестве средства развития логического мышления выбран метод мини-максов. Магзумова Н.К., Степанова Г.У. рассматривают развитие логического мышления детей посредством игр. В качестве средства развития логического мышления выбраны дидактические игры.

Инструмент математики состоит из различных компонентов, одним из которых являются содержательные линии, принизывающие весь школьный курс математики. Самой распространённой линией с которой взаимодействуют школьники от начальной школы до старшей является линия уравнений.

Уравнение – одно из важнейших понятий математики. В большинстве практических и научных задач, где какую-то величину нельзя непосредственно измерить или вычислить по готовой формуле, удается составить соотношение (или несколько соотношений), которым оно удовлетворяет. Так получают уравнения (или систему уравнений) для определения неизвестной величины. Развитие методов решения уравнений, начиная с зарождения математики как науки, долгое время было основным предметом изучения алгебры.

Про уравнения и методику решения уравнений написаны много статьей и проведено большое количество исследований. В частности, Садыкова Л.К. в статье уделила внимание проблеме подготовки студентов вузов к решению нестандартных уравнений. В качестве инструмента для решения нестандартных уравнений разработана методика обучения приему решения уравнений на базе свойств функций [Садыкова, с. 45].

Автор статьи Марасанов А. Н. посвятил работу методике обучения школьников решению иррациональных уравнений. В работе предложены приемы решения и указана специфика иррациональных уравнений [Марасанов, с.76].

В ходе исследования возникает следующее *противоречие*:

между необходимостью развития логического мышления учащихся в процессе обучения и

недостаточным использованием для этого потенциала содержательной линии уравнений.

Проблема исследования состоит в поиске средств содержательной линии уравнений способствующих развитию логического мышления школьников.

Объект исследования – обучение учащихся решению уравнений.

Предмет исследования – процесс формирования логического мышления учащихся в содержательной линии уравнений.

Цель исследования – теоретически обосновать возможности развития логического мышления средствами содержательной линии уравнений.

Для достижения поставленной цели формулируются следующие *задачи* исследования:

1. Проанализировать литературу по теме исследования.

2. Сформулировать дидактические условия развития логического мышления школьников в процессе обучения.

3. Выделить содержательный аспект линии уравнений.

4. Построить модель развития логического мышления средствами содержательной линии уравнений.

5. Спроектировать содержательный компонент модели развития логического мышления средствами содержательной линии уравнений.

6. Провести входной эксперимент.

Теоретическая и методологическая база исследования:

- Основные положения методики обучения математике в школе (Епишева О.Б., Груденов Я.И., Миндюк Н.Г., Мордкович А.Г. и др).

- основные положения теории развития логического мышления
(Кабанаова- Меллер Е.Н., Епишева О.Б., Давыдов В.В. и др.).

- общедидактические принципы организации обучения.

Этапы процедуры исследования:

На первом этапе (2019-2020г.г.) изучены философская, психологическо-педагогическая и методические литературы по теме исследования, проведение сравнительный анализ литературы. Определены методологические основы исследования, сформированы понятийный аппарат исследования. Поставлены цели, задачи, объект, предмет исследования.

На втором этапе (2020 – 2021 г.г.) сформулирован теоретический аппарат исследования. Выявлены дидактические условия развития логического мышления учащихся. Определен содержательный аспект линий уравнений.

На третьем этапе (2020-2021 г.) разработана модель развития логического мышления учащихся средствами содержательной линии уравнений. Определены учебные задачи на развитие компонентов логического мышления. Сформулирована методика обучения методам решения уравнений. Проведен входной эксперимент для проверки уровня развития логических операций учащихся.

Научная новизна исследования заключается в следующем: в отличие от ранее проведенных исследований, посвященных данной проблематике, в настоящей работе реализована модель развития логического мышления средствами содержательной линии уравнений. Показана реализация данной модели в разработке методики обучения методам решения уравнений.

Теоретическая значимость исследования состоит в обосновании содержательной линии уравнения для развития логических компонентов мышления таких, как: анализ, синтез, сравнение, обобщение, конкретизация, абстрагирование.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработана модель развития логического мышления учащихся средствами содержательной линии уравнений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СРЕДСТВАМИ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ УРАВНЕНИЙ

1.1. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ АСПЕКТ ЛИНИЙ УРАВНЕНИЙ

Анализ Федерального государственного стандарта основного и полного образования, примерной образовательной программы по математике позволил выделить в школьном курсе следующие содержательные линии: числа и вычисления, выражения и их преобразования, уравнения и неравенства, функции, геометрические фигуры, измерение геометрических величин, стохастика.

Особое место занимает линия уравнений, так как она пронизывает все ступени обучения школьников.

В процессе обучения школьник должен овладеть следующими предметными результатами:

знать – понятия уравнения, корень уравнения, решить уравнения, равносильные уравнения, область допустимых значений, нет действительных корней,

уметь – решать различные уравнения и применять к решению задач;

владеть – понятиями, связанными с уравнениями, знаниями для решения различных типов задач.

Определение 1. Равенство с переменной, называется уравнением [Арефьева, Пирютко, с. 147].

Определение 2. Корнем уравнения называется значение переменной, которое обращает это уравнение в верное равенство [Арефьева, Пирютко, с. 147].

Определение 3. Корнем уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство [Макарычев, Миндюк, с. 23].

Определение 4. Каждое значение переменной, при каждом из которых уравнение обращается в верное числовое равенство, называется корнем уравнения [Мордкович, Николаев, с. 18].

Определение 5. Решить уравнение – это найти все неизвестные уравнения или доказать, что их нет [Арефьева, Пирютко, с. 147].

Определение 6. Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет [Макарычев, Миндюк, с. 23].

Определение 7. Решить линейное уравнение – это значит найти все те значения переменной, при каждом из которых уравнение обращается в верное числовое равенство [Мордкович, Николаев, с. 18].

Определение 8. Уравнения, имеющие одно и тоже множество корней, называется равносильными [Арефьева, Пирютко, с. 148].

Определение 9. Область допустимых значений – это значения переменных, при которых выражение имеет смысл. [Мордкович, Николаев, с. 25].

Определение 10. Неразрешимость уравнений – это утверждение, которое предъявляется, когда невозможно решить уравнения существующими методами [Макарычев, Миндюк, с. 24].

Существуют как стандартные, так и нестандартные методы решения уравнений. К стандартным методам относятся:

1. Метод разложения на множители

Суть метода заключается в том, что уравнение представляется в виде произведения множителей с помощью тождественных преобразований (вынесение общего множителя за скобки, использование способа группировки, применение формул сокращенного умножения и другие).

Пример 1.1. Решить уравнение $5x^2$- 10x = 0

Решение. Замечаем, что в левой части каждый одночлен имеет общий множитель 5x.

5x(x-2) = 0

5x = 0 или x – 2 = 0

x = 0 или x = 2.

Ответ: 0; 2

Пример 1.2. Решить уравнение $5x^3 - 215x^2 - 21x + 5 = 0$.

Решение: Сгруппируем одночлены.

$(5x^3 + 5) + (-215x^2 - 21x) = 0$

Выносим общий множитель из каждой скобки

$5(x^3 + 1) - 21x(x + 1) = 0$

Применяем формулы сокращенного умножения

$5(x+1)(x^2 - x + 1) - 21x(x + 1) = 0$

Выносим общий множитель за скобки

$(x+1)(x^2 - 5x + 5 - 21x) = 0$

$5(x+1)(5x^2 - 26x + 5) = 0$

Разделим обе части уравнения на $5 \neq 0$

$(x+1)(5x^2 - 26x + 5) = 0$

$x+1 = 0$ или $5x^2 - 26x + 5 = 0, D = b^2 - 4ac.$

$x = -1$ $D = 676 - 100 = 576 > 0$

$$x_1 = \frac{26-24}{10} = 0{,}2 \quad x_2 = \frac{26+24}{10} = 5.$$

Ответ: – 1; 0,2 и 5.

2. Метод подстановки или метод введения новой переменной

Суть метода заключается в том, что в процессе анализа находится выражение общее для частей уравнения. Это выражение позволяет ввести новую переменную и тем самым удается разбить задачу на подзадачи, тогда вместо одного сложного уравнения необходимо решить несколько стандартных уравнений.

Пример 1.3. Решить уравнение $(2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 6 = 0$.

Решение:

Делаем замену

$t = 2x - 1$

Тогда уравнение имеет вид: $t^2 - 5t + 6 = 0$

D = 25– 24 = 1$>$ 0.

$x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{D}}{2a}$;

$x_1 = \frac{5+1}{2}$ = 3 $x_1 = \frac{5-1}{2}$ = 2.

Теперь вернемся к замене:

3 = 2x – 1 или 2 = 2x– 1

x = 2 или x = 1,5.

Ответ: 2 и 1,5.

3. Графический метод решения уравнений

Суть метода заключается в том, что уравнение приводится к такому виду:

f(x) = g(x), где y = f(x), y = g(x) известные нам функции. Дальше строятся графики функций y = f(x) и y = g(x). Отмечаются все точки пересечения графиков. Находят абсциссы пересечения графиков и записывают. Это и будет корнями уравнения.

Пример 1.4. Решить уравнение графически x^2 – 2x +1 = 0.

Решение:

x^2 = 2x –1

Строим графики y = x^2 и y = 2x – 1 (Рисунок 1). Отметим все точки пересечения графиков и определяем точки абсциссы пересечения.

Первый график y = x^2

x	1	2	-1	-2	0
y	1	4	1	4	0

Второй график y = 2x – 1

x	1	2	-1	-2	0
y	1	3	-3	-5	-1

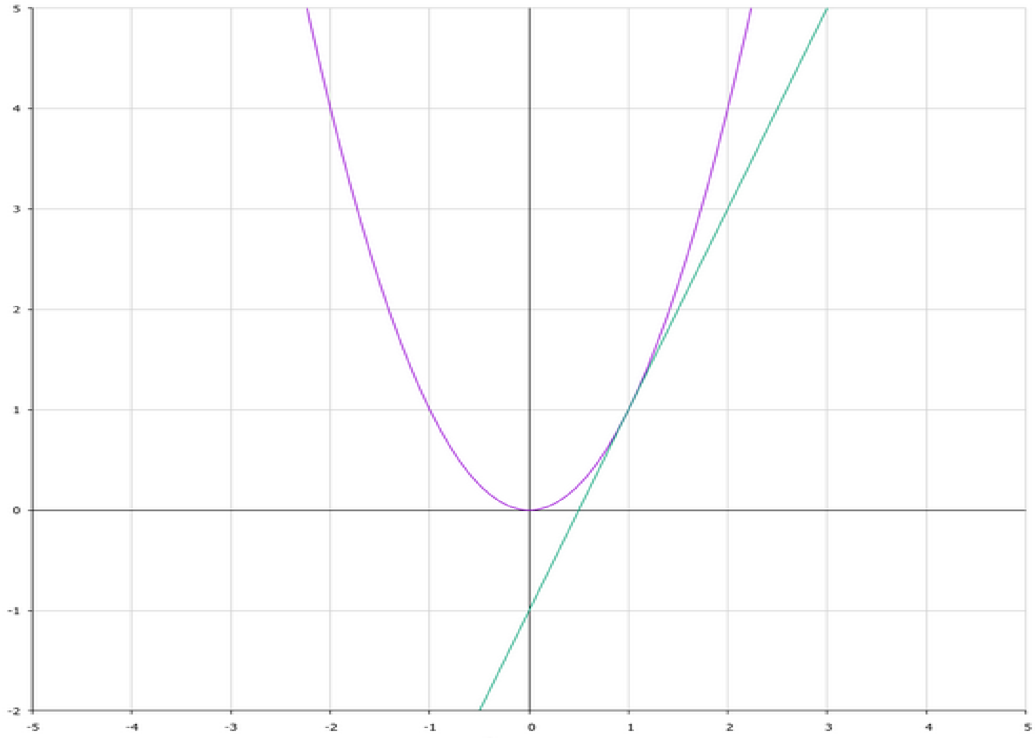


Рис. 1 График функций y = x^2 и y = 2x –1

Из графика видно, что данные графики пересекаются в одном месте. То есть при x = 1.

Ответ: x = 1.

4. Решение квадратных уравнений с помощью формул (дискриминанта), теоремы Виета

Суть метода заключается в том, что квадратное уравнение вида

ax^2 + bx + c = 0 (a≠0) решается с помощью формулы: D = b^2 – 4ac.

Рассматриваются 3 случая:

a) При D =0, то x = $\frac{-b}{2a}$;

b) При D> 0, то $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$;

c) При D < 0, то уравнение не имеет действительных корней.

Пример 1.5. Решить уравнение $2x^2$ + x –3 = 0.

Решение:

a = 2, b = 1, c = -3.

$D = b^2 - 4ac = 1^2 + 24 = 25 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+5}{4} = 1;$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-5}{4} = 1{,}5.$

Ответ: 1 и 1,5.

Приведенное квадратное уравнение можно решить с помощью теоремы Виета. Суть метода заключается в нижеперечисленных формулах.

$$x^2 + bx + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

<u>К нестандартным методам относятся:</u>

1. *Умножение уравнения на функцию*

Суть метода заключается в том, что обе части уравнений умножается обе на функцию, которая определена во всех точках x. Этот метод существенно облегчает решение уравнений.

Пример 1.6. Решить уравнение $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0.$

Решение: умножаются обе части на функцию $x^2 + 1$, которая определена во всех точках x. Тогда уравнение имеет вид:

$(x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = 0$

Посмотрев на полученное выражение, можно использовать формулу сокращенного умножения. Тогда уравнение приводится к виду:

$x^{10} + 1 = 0$

Если ставить вместо неизвестного x любое действительное число, то всегда получится положительное число. Положительное число если складывать с единицей, то получится опять положительное число. И оно не равно нулю.

Ответ: не имеются действительные корни.

2. *Угадывание корней уравнения*

Суть метода заключается в том, что по внешнему виду угадывают корни уравнения.

Пример 1.7. Решить уравнение x(x+1)+(x+1)(x+2)+ (x+2)(x+3)+ +(x+3)(x+4)+ (x+4)(x+5)+(x+5)(x+6) + +(x+6)(x+7)+ (x+7)(x+8) + +(x+8)(x+9) + +(x+9)(x+10) = 1·2 + 2· $3+3\cdot4+\ 4\cdot5+5\cdot6+6\cdot7+7\cdot8++8\cdot9+9\cdot10$.

Решение:

Посмотрев на уравнение, можно догадаться, что корнями уравнения являются числа $x_1=0, x_2$ = –10. Если раскрыть скобки, то получится у нас квадратное уравнение. Как мы знаем, квадратное уравнение имеет максимум 2 корня, а мы уже угадали их. Поэтому корнями уравнения является $x_1=0, x_2$ = –10.

Ответ: $x_1=0, x_2$ = –10.

3. *Использование суперпозиции функций.*

Суть метода заключается в том, что функция, которая находится в одной из частей уравнений, является суперпозицией более простых функций.

Пример 1.8. Решить уравнение$(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x$

Решение: Можно обозначить f(x) = x^2+2x-5, тогда уравнение можно переписать как: f(f(x)) = x

Видно, что если x_0 – корень уравнения f(x) = x, то x_0 – корень уравнения f(f(x) = x.

x^2+2x-5 = x.

Корнями этого уравнения являются

$x_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$; $x_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

То уравнение $(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x$ можно переписать в виде:

$x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0$

Разделяя многочлен $x^4+4x^3-4x^2-17x+10$ на многочлен

(x-x_1)($x-x_2$) получим, что уравнение $x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0$. Можно записать в виде $(x^2+x-5)(x^2+3x-2)=0$. Получается, что корнями уравнения наряду x_1 и x_2 являются также корни уравнения.

x^2+3x-2= 0, то есть числа $x_3=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ и $x_4=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ и $x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

4. *Использование монотонности функций*

Суть метода заключается в том, что уравнение f (x)=0, где f(x) – строго возрастающая или строго убывающая на некотором множестве, имеет только единственный корень.

Пример 1.9. Решить уравнение:

$$x\cdot 2^{x^2+2x+3} = 64$$

Решение: Видно, что при $x \leq 0$ уравнение не имеет решений, потому что слева получится отрицательное число, а справа в исходном уравнении положительное число.

Вместо неизвестного x ставить отрицательное число, то в левой части получится отрицательное число, а справа у нас положительное число.

При $x > 0$ функция $y = x\cdot 2^{x^2+2x+3}$ всегда возрастает, как произведение двух непрерывных возрастающих x функций f = x и $g(x) = 2^{x^2+2x+3}$. Тогда, при $x > 0$ функция $y = x\cdot 2^{x^2+2x+3}$ принимает значение только ровно в одной точке. Методом подбора, что x = 1 является решением данного уравнения. Следовательно, это единственное решение.

Ответ: x=1.

1.2. ДИДАКТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Логическое мышление – это мыслительный процесс, при котором человек использует логические понятия и конструкции, которому свойственна доказательность, рассудительность, и целью которого является получение обоснованного вывода из имеющихся предпосылок [Ананьев, с. 48].

По мнению авторов, Давыдова В.В., Эльконина Д.Б., Гальперина П.Я., Люблинской А.А. и других, логическое мышление представляет собой способность и умение обучающегося самостоятельно производить простые логические действия: анализ, синтез, сравнение, обобщение [Давыдов, Эльконин, Гальперина, Люблинской, с. 35].

Бурмистрова Е.В. считает, что логическое мышление это умение оперировать абстрактными понятиями, тем самым делая этот процесс управляемым через рассуждения, строгое следование законам неумолимой логики, безукоризненное построение причинно-следственных связей [Бурмистрова, с. 37-49].

Так же логическое мышление – это такое мышление, пользуясь которым учащийся в процессе решения задачи обращается к понятиям, выполняет действия в уме, непосредственно не имея дела с опытом, получаемым при помощи органов чувств. Школьник обсуждает и ищет решение задачи с начала и до конца в уме, пользуясь готовыми знаниями, полученными другими людьми, выраженными в понятийной форме, суждениях, умозаключениях [Андреев, с. 320].

Такой же точки зрения придерживается Огерчук Л.Ю. Он определяет логическое мышление как вид мышления, сущность которого состоит в оперировании понятиями, суждениями, умозаключениями на основе законов логики, их сопоставлении и соотнесении с действиями, или же совокупность умственных логических, достоверных действий или операций мышления, связанных причинно-следственными закономерностями, позволяющими согласовать наличные знания с целью описания и преобразования объективной действительности.

Таким образом, логическое мышление – это умение оперировать словами и понимать логику рассуждений, при этом выполняются специальные операции (сравнение, анализ, синтез, абстрагирование и обобщение) и процессы (суждение, умозаключение, определение понятий, индукция, дедукция).

Под анализом, в рамках данного исследования, понимается логический приём, метод исследования, состоящий в том, что изучаемый объект мысленно (или практически) расчленяется на составные элементы (признаки, свойства, отношения), каждый из которых исследуется в отдельности как часть расчлененного целого. Синтез – это логический приём, с помощью которого отдельные элементы соединяются в целое. Сравнение – логический прием умственных действий, требующий выявления сходства и различия между признаками объекта (предмета, явления, группы предметов). Сравнение подготавливает почву для применения аналогии, с помощью которой сходство предметов, выявленное в результате их сравнения, распространяется на новое свойство. Обобщение – это мысленное объединение предметов и явлений в группы по тем общим и существенным признакам, которые выделяются в процессе абстрагирования. Процессам абстрагирования и обобщения противоположен процесс конкретизации. Классификация – это логический прием разделения множества на группы по какому-либо признаку, который называют «основание классификации» [Абдульханова, с. 381].

Одним из средств развития приемов логического мышления (синтеза, аналогии, сравнения, классификации, обобщений и других) выступают задачи различного вида. Систематическое использование на уроках математики специальных задач и заданий, направленных на развитие логического мышления, расширяет математический кругозор школьников и позволяет более уверенно ориентироваться в простейших закономерностях окружающей их действительности и активнее использовать математические знания в повседневной жизни.

В статье Кущетеревой Ф.Т. средством развития логического мышления является заданий особого вида, предъявление которых возможно с использованием интерактивной доски. Научная статья посвящена проблеме логического мышления в начальных классах. В ней расписывается идея о необходимости начала работы с 1 класса по формированию логического мышления. Автор выделяет на раскрытие таких понятий как: мышление, синтез, сравнение, систематизация, классификация и обобщение. Акцентирует внимание на то, что для развития логического мышления реже используют самостоятельные интеллектуальные задания, связанные с игрой и практической деятельности. Особое внимание в статье уделено применение интерактивных досок для развития логического мышления. Автором в качестве средств для развития логического мышления приведен пример нескольких заданий на интерактивной доске. В статье анализируются результаты по проведению анкетирования для выявления интереса к таким занятиям с применением интерактивной доски. Проведено наблюдение за уровнем развития логического мышления в процессе применения этих заданий [Кущетерова].

В статье Дулатовой З.А., Лапшиной Е.С. предпринята попытка оценить влияние на уровень развития логического мышления такого признака как востребованность в обучении логического обоснования, доказательства, рассуждения. Авторами выделены четыре типа математических задач, способствующих развитию логического мышления. Тип 1. Задачи на определение истинности простых общих и частных суждений. Тип 2. Задачи на определение истинности сложных суждений. Тип 3. Задачи, формулировка которых содержит неограниченные или ограниченные кванторы существования и всеобщности. Тип 4. Задачи, направленные на обучение обобщенным методам доказательства утверждений, таким как, например, метод доказательства от противного, метод полной индукции. Отмечается, что первый тип задач мало встечается в учебниках 5 класса. Задачи второго и третьего типов отсутствуют за исключением учебников Дорофеева Г.В. и Петерсона Л.Г. Что касается 4 типа задач, то авторы отмечают, что они тоже либо отсутстуют либо имеются в очень ограниченном количестве в учебниках [Дулатова, Лапшина].

В статье Кузнецовой Е.А. отмечается, что программы по математике не нацеливают на формирование логического мышления, а обучение сводится к решению типичных задач. Проблемой также является сокращение разделов школьного курса по объему и необходимостью подачи заданий учащимися в тестовой форме. Автором статьи ставится акцент на решение проблемы недостаточного количества исследовательских и проблемных заданий. Это решение видится автором через создание и последующей реализацией методического комплекса задач такого типа в курсе школьной математики [Кузнецова].

Азимов Н. С. в качестве средства развития логического мышления видит нестандартные методы решений уравнений. Это такие методы как: решение уравнений с использованием свойства ограниченности, монотонности, периодичности, функции, четности функции, области допустимого значения функции и исследование уравнения на промежутках действительной оси [Азимов].

В исследовании Ляховой Н.Е. рассматривается один из приемов развития логического мышления - метод мини-максов. Для реализации метода мини-баксов необходимо производить оценки функций, входящих в уравнения или неравенства. Актуальными для школьников отмечаются приемы такой оценки, как: оценка функции вида $f\ (x)= A\ \pm\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ –некоторая неотрицательная функция, использование для оценки ограниченности тригонометрических и обратных тригонометрических функций, оценка квадратного трехчлена, использование для оценки функций известных неравенств, оценка сложной функции. Автором расписываются все приемы оценки [Ляхова].

Диссертация автора Балдиной Н.П посвящена усвоению логических приемов мышления. В ней сделан вывод о предпочтительности формирования логических приемов в процессе учения с получением знаний об этих приемах [Балдина]

В исследовании Кудриной Т.С. выявлены психологические условия становления и развития логических операций, доказательств, опровержений. Она доказала, что на разных возрастных группах логические операции проявляются в виде различных по сложности уровня. В младшем школьном возрасте проявляется объяснение, в среднем – доказательство, в среднем – опровержение [Кудрина].

Автором Талызиной Н.Ф. исследован вопрос о порядке формирования приемов мышления. Ей определяется порядковая очередь формирования отдельных приемов: анализ синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, конкретизация [Талызина, с. 24-48].

В психологии и педагогике формирование логических операций различаются на 2 пути: прямой и косвенный. Прямым путем называется объяснение сущности выполняемого приема, знакомство с его алгоритмом, функциями. Косвенный путь из себя представляет деятельность по усвоению определенных предметных знаний и умений по некоторым правилам.

Курбело Б.Ф. в своей диссертации сделал вывод, что вместе со специфическими приемами деятельности формируются логические приемы мышления намного эффективнее, чем когда оно формируется изолированно. Автором отмечается, что для осуществления логических приемов требуется 2 этапа: выделение содержательной составляющей и логических отношений [Курбело].

Многими современными психологами и педагогами отмечается важность развития логического мышления, овладение учащимися мыслительными операциями и о соблюдении необходимых условий обучения. На практике отмечается прямая зависимость между владением мыслительными операциями и успешностью школьного обучения. Идет систематическая работа для развития логического мышления, перенос умений при решении конкретных учебных заданий на другие дисциплины.

Выявлениями дидактических условий развития логического мышления у учащихся занимались Давыдов В.В. [Давыдов], Эльконин Д.Б., Занкова Л.В. [Эльконин, Занкова] и другие. Разработки по итогам исследований этих авторов говорят о том, что обучение учащихся и развитие их логического мышления имеют единый взаимосвязанный процесс. Выделяют следующие признаки эффективного функционирования системы дидактических условий:

а) признак целостности – эффективность, при изменении в какой-либо части системы приводит к тому, что изменяется в других частях или во всей системе;

б) признак совместимости – эффективность функционирования характеризуется степенью согласованности системы с окружающей средой;

в) признак систематизированности – сильная связь должна существовать между элементами системы;

г) признак оптимальности – эффективность должна достигаться при наименьших условиях, затратах времени и других ресурсов [Егорина].

Ученые в педагогических исследованиях выделяют различные комплексы дидактических условий развития или формирования логического мышления. Егориной В.С. предлагается следующая система дидактических условий:

1) специально отобранное содержание процесса обучения школьников мыслительным операциям;

2) обеспечение единства мотивационного, содержательного и операционного компонентов обучения;

3) единство репродуктивного и продуктивного характера познавательной деятельности учащихся;

4) постепенное повышение степени их самостоятельности в овладении мыслительными операциями;

5) побудительно-интенсифицирующая деятельность учителя [Егорина].

Хакбердыевом М. предлагается система упражнений, которая называется «средство формирования логических знаний и умений, изучения понятий и действий, раскрытая связей между ними». Им была разработана система по формированию интеллектуальных умений операционно-исполнительского блока учебной деятельности. Учитывались такие дидактические условия, как:

1) преемственность в интеллектуальной подготовке младших школьников с дошкольниками и средним звеном школы;

2) систематичность и целенаправленность работы;

3) использование специально разработанной системы заданий, способствующей усвоению материала, рассчитанного на интеллектуальное развитие школьников, применению его в новых условиях, в процессе изучения различных предметов. [Хакбердиев, с. 75]

Психологами Забрамной С.Д., Кабановой-Миллер Н.Н., Подгорецкой И.А. и другими на основе исследований выявлено, что самым важным условием является целенаправленное и систематическое формирование логических приемов, обучение, когда эти приемы становятся объектом специального усвоения [Забрамная, с. 48].

Преемственность в методах развития логического мышления, подборе методических приемов также является важным дидактическим условием. Шевченко Н.И. акцентирует особое внимание преемственности обучения обобщению и классификации. Ей отмечается, что разработка системы предметных заданий должна осуществляться «при особенном акценте на разработку формирования умений классификации и обобщения и, как частного случая этих умений, – умение устанавливать причинно-следственные связи» [Шевченко, с. 42].

Невозможно развить логическое мышление изолированно. Оно должно соединяться органично с предметным умением, отражаться на успешности обучения школьников.

Отметим, что в качестве дидактического условия в развитии логического мышления выступает опора на такие психические функции, как память, восприятие, воображение. Каждый урок необходимо проводить в три этапа познания мира. Это наглядно – действенный, наглядно - образный и абстрактно-логический. Учащиеся должны работать в положительной эмоции на уроках. Логический прием формируется благодаря конкретным математическим материалам, которые являются обязательным содержанием школьного курса математики.

Дидактические условия являются обстоятельствами обучения, которые получаются в результате отбора, конструирования и применения элементов содержания, форм, методов и средств обучения, способствующих эффективному решению поставленных задач.

Таким образом, под логическим мнением мы понимаем, что – это вид мышления, сущность которого в оперировании понятиями, суждениями и умозаключениями с использованием приемов логики [Дружинин, с. 56].

1.3 МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СРЕДСТВАМИ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ УРАВНЕНИЙ

Проведенный анализ в теоретической части позволил выделить структурную схему развития логического мышления школьников средствами содержательной линии уравнений (Рисунок 2). Структурная схема состоит из трех взаимосвязанных блоков: подготовительный, основной и результирующий.

Подготовительный блок описывает цель и дидактические условия развития логического мышления учащихся. Цель заключается в том, что необходимо развить логическое мышление учащихся средствами содержательной линии уравнений. В рамках анализа исследований нескольких авторов позволил выделить дидактические условия развития логического мышления:

- специально отобранное содержание процесса обучения школьников мыслительным операциям;
- обеспечение единства мотивационного, содержательного и операционного компонентов обучения;
- единство репродуктивного и продуктивного характера познавательной деятельности учащихся;
- постепенное повышение степени их самостоятельности в овладении мыслительными операциями;
- побудительно-интенсифицирующая деятельность учителя.

Основной блок описывает логические операции, формы мышления, структуру содержательной линии уравнений и связи между ними. Логические операции состоят из анализа, синтеза, сравнения, обобщения, абстрагирования и конкретизации, которые лежат в основе логического мышления. Анализ заключается в том, что изучаемые уравнения мысленно подразделяются на составные элементы: признаки, свойства, отношения. И после этого каждый элемент исследуется в отдельности, как часть целого.

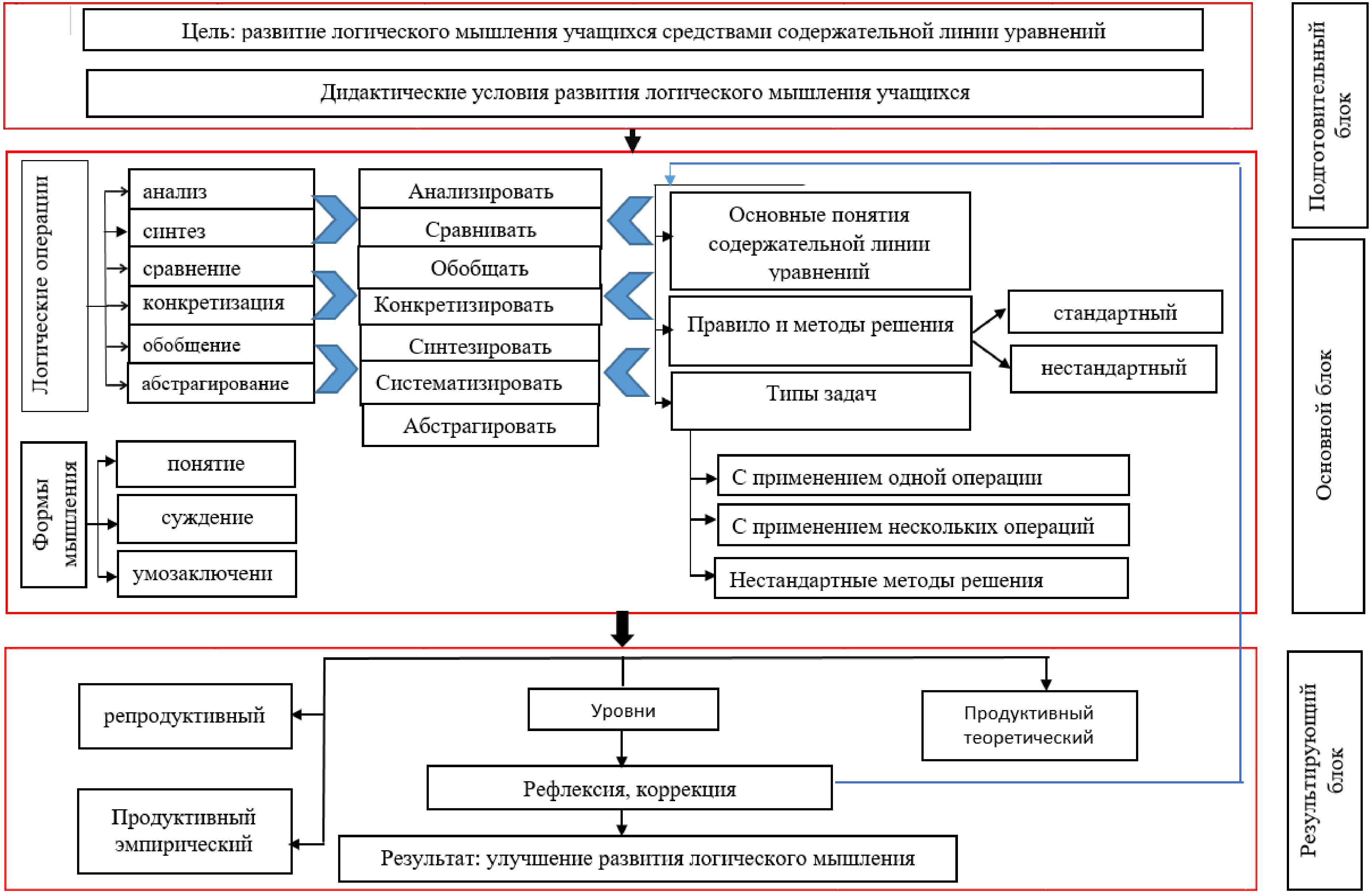


Рис.2.Модель развития логического мышления

Сравнение является логическим приемом мышления, на основе которого требуется выявить сходства или различия между признаками уравнения. При применении приема логического мышления синтеза отдельные элементы уравнения, задания соединяются в целое. В приеме обобщения школьник мысленно выделяет какой-нибудь общий критерий для нескольких уравнений, после этого включает уравнения в один класс. Абстрагирование – это логический прием мышления, при котором выделяется единственный компонент в уравнениях или уравнении. Конкретизация – это логический прием мышления, где выделяются серия уравнений, которые решаются одним способом или применение при решении уравнения конкретной формулы. Прием конкретизация является противоположным приемам обобщения и абстрагирования.

Формы логического мышления подразделяются на суждение, умозаключение и понятие. Понятие – это мысль, при которой выделяются общие, существенные и отличительные признаки явлений в содержательной линии уравнений. Суждение – выявление общих признаков, связей между содержательной линии уравнений и другими содержательными линиями. Суждение делится на три типа: общее, частное и единичное. Умозаключение является связывающим звеном между формами мышления суждением и понятием. В результате этой связи имеем другое суждение, на основе которого делается вывод или заключение. Бывают два вида умозаключения: индуктивное и дедуктивное.

Содержательная линия уравнений содержит основные понятия, правила и методы решений, различны типовые задачи. К основным понятиям содержательной линии относятся: решить уравнение, корень уравнения, равносильные уравнения, область допустимых значений. Методы решения уравнений бывают разные. Но их всех можно сопоставить к двум видам: стандартные – методы решения уравнений, которые проходят в обычных школах и нестандартные – методы решения уравнений, которые в школьной программе мало изучается или изучается только в школах с математическим уклоном. Задачи, в которых содержатся уравнения, делятся на 3 типа: задачи с применением одной логической операции, с применением нескольких логических операций и нестандартные методы решения задач.

Результирующий этап описывает уровни развития логического мышления, рефлексию, коррекцию и результат. Бывают три уровня развития логического мышления: репродуктивный, продуктивный - эмпирический и продуктивный – теоретический. При репродуктивном уровне развития логического развития школьник не способен решать задачи самостоятельно, не понимает, какие логические операции развиваются при решении задачи. Для этого учитель должен каждый шаг действия решения подсказывать. При продуктивно-эмпирическом уровне развития логического мышления школьник имеет представление о логических приемах мышления. Умеет решать уравнения, понимает алгоритм решения. При этом не знает, какие логические операции развиваются в решении уравнения. Школьник способен без помощи учителя решать уравнения, но допускает ошибки при решении в процентном соотношении. При продуктивном – теоретическом уровне развития школьник способен самостоятельно решать уравнения без помощи учителя. Понимает, какие логические операции развиваются при решении задачи. При достижении данного уровня процентное соотношение правильного решения уравнений очень высокое. Следует отметить, что продуктивно-теоретический уровень развития логического мышления достигается при решении нестандартных уравнений. На этапе рефлексии ученик оценивает себя, насколько его уровень логического мышления развился при решении задач на уравнения. Доказательством этого служит то, что он становится способным решать различные по сложности уравнения. Если на этапе коррекции учитель выявляет, что задача решена неправильно или ответ получился неправильным, то он подталкивает школьника возвращению обратно к этапу средствам содержательной линии уравнений, пока не достигнет улучшения уровня развития логического мышления. После правильной подстановки задачи, применения структурных компонентов логического мышления, правильного подбора метода и алгоритмов решения у учащихся развиваются логические приемы мышления: тем самым достигнет результата, повышается уровень развития логического мышления.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

В данной главе были рассмотрены теоретические основы развития логического мышления учащихся. Выявлен содержательный аспект линий уравнений. Определены основные понятия содержательной линии уравнения, рассмотрены методы решения уравнений. Это позволило выделить стандартный и нестандартные методы решения уравнений. Приведены примеры решения уравнений с помощью различных методов.

Анализ литературы позволил выделить дидактические условия развития логического мышления учащихся. За основу взяты дидактические условия Егориной В.С.

- специально отобранное содержание процесса обучения школьников мыслительным операциям;

-обеспечение единства мотивационного, содержательного и операционного компонентов обучения;

-единство репродуктивного и продуктивного характера познавательной деятельности учащихся;

- постепенное повышение степени их самостоятельности в овладении мыслительными операциями;

- побудительно-интенсифицирующая деятельность учителя

Разработана модель развития логического мышления учащихся средствами содержательной линии уравнений. В ходе исследования даны подробные объяснения каждому компоненту, которые имеются в схеме.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СРЕДСТВАМИ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ УРАВНЕНИЙ

2.1 УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ НА РАЗВИТИЕ КОМПОНЕНТОВ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Логическое рассуждение предполагает, что школьник может выполнять основные логические операции (обобщение, анализ, сравнение, синтез).

Анализ – логический прием мышления, при котором мысленное разделение уравнения на семантические части в определенном порядке и изучение каждой части в отдельности.

Продемонстрируем задания в процессе выполнения которых у учащихся формируется прием анализа. Так, например, многие задачи по содержательной линии уравнений начинаются со слов «решить уравнения».

Пример 2.1. Решить уравнения $x^2 + 6x + 5 = 0$.

Учащийся определяет вид уравнения, подбирает соответствующий прием решения. В результате есть предпосылки для развития такого лог. приема как анализ.

Пример 2.2. Решить уравнение $x^3 - 3x^2 + 4x = 0$.

Учащийся соотносит данное уравнение к кубическому, подбирает метод разложения на множители, а после разложения на множители каждый множитель приравнивает к нулю, понимает, что второй множитель квадратное уравнение и для него подбирает соответствующий прием решения. В результате развивается такое качество мышления, как умение анализировать.

При решении уравнения ученик исследует каждую смысловую часть уравнения.

Пример 2.3. Провести анализ уравнения $\sqrt{x^4 + 1} = 5$

При анализе уравнения ученик делает выводы:

а) уравнение является иррациональным, так как неизвестный находится под знаком корня;

б) неизвестное в 4 степени, поэтому уравнение соотносит степенному уравнению;

в) так как неизвестное находится под знаком квадратного корня и под знаком корня находится функция, то необходимо применять ОДЗ, в частности $x^4 + 1 \geq 0$;

г) справа, в уравнении положительное число, следовательно обе стороны можно возводить в квадрат;

д) найдется соответствующий метод для дальнейшего решения уравнения.

Тем самым у школьника развивается такой прием логического мышления как анализ.

Пример 2.4. Доказать, что уравнение $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$ не имеет действительных корней.

Решение:

Школьник отмечает, что неизвестное входит в уравнение в максимальной степени 4. Значит, необходимо разбить уравнение на части, каждое из которых представляет с собой уравнение в меньшей степени. Для этого можно воспользоваться методом разложения на множители. При этом может получиться 2 квадратных уравнения или 4 линейных, или линейное и кубическое. Можно заметить, что данное уравнение не имеет решения, если каждое из полученных уравнений его не имеет.

Отметим, что в связи не однозначностью разложения на множители, что вызывает большие вычисления, школьник может принять решение применить другой алгоритм решения. В частности, школьник замечает, что каждый одночлен входит в уравнение со знаком «+».

Если представить, что все неизвестные (x) положительные числа, то в сумме получается опять положительное число и это не равно нулю. Это условие удовлетворяет требованию примера.

Если все неизвестные (x) отрицательные числа, то допускается замена

x = – t;

тогда уравнение примет вид: $t^4 - t^3 + 2t^2 - 2t + 3 = 0$.

При этом возникают два возможных варианта.

а. Пусть положительные t, т.е. t>0 и $x<0$;

если t≥ 1, то заметим что $t^4 - t^3 > 0$ и $2t^2 - 2t > 0$.

Получается их сумма плюс 3 тоже положительное число. А положительное число не равно нулю, требование примера выполняется.

если 0$<$ t <1

Проверим одночлены, перед которыми стоит отрицательный знак, так как они уменьшают общее значение. Если подставлять вместо t^3 значения 0$<$ t <1, то получается число меньше нуля. Если подставлять вместо (–2t) значения 0$<$ t <1, то получается число меньше двух. Тогда в сумме (–2t) и (– t^3) меньше чем 3, то это выражение больше нуля. Требование выполняется.

б. Пусть отрицательные t, т.е. t<0 и $x>0$.

Тогда попадаем в ситуацию, рассмотренную в начале решения.

Таким образом, рассмотрены 2 варианта, но в обоих случаях доказано, что выражение $x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$ всегда больше нуля.

Ответ: уравнение не имеет действительных корней.

Заметим, что в процессе выполнении такого задания у школьника развивается логическая операция анализ, в частности он выполняет структурную схему анализа неосознанно.

Пример 2.5. Дано уравнение $4^{\sqrt{x}}$ +b$\cdot$ $2^{\sqrt{x}}$ + $4|b|$ – 16 = 0. Необходимо найти все значения b, при которых уравнение имеет ровно одно решение.

Решение:

а) замечаем, что $4^{\sqrt{x}} = 2^{2\sqrt{x}}$. Тогда можно делать замену $2^{\sqrt{x}} = t$

Тогда получим квадратное уравнение $t^2 + bt + 4|b|$ – 16 = 0

b) Посчитаем дискриминант по формуле D = $b^2 - 4ac$

D = $b^2 - 4ac$ = b^2 –4(4$|b|$ – 16) = b^2 – 16$|b|$ + 64;

D = b^2 – 16$|b|$ + 64

Можно заметить, что это полный квадрат:

D = $(|b| - 8)^2$;

c) находим 2 корня t по формуле:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(|b|-8)^2}}{2} = \frac{-b \pm (|b|-8)}{2}$

d) Делаем ОДЗ из условия задания видно, что неизвестное находится в степени под квадратным корнем, тогда x ≥ 0. Если x ≥ 0 , t = $2^{\sqrt{x}}$, t ≥ 1.

d) по свойству модуля:

1) при b≥0, $t_1 = \frac{-b+b-8}{2}$ = – 4, $t_2 = \frac{-b-b+8}{2} = \frac{-2b+8}{2}$ = – b+ 4;

– b + 4 ≥ 1;

-– b ≥ -3.

b ≤ 3, $0 \le b \le 3$

2) при b< 0, $t_1 = \frac{-b-b-8}{2} = \frac{-2b-8}{2}$ = – b – 4, $t_1 = \frac{-b+b+8}{2} = \frac{8}{2}$ = 4

– b – 4 < 1 t = 4

– b < -5 – b – 4 = – 4 – 4 = – 8.

0>b > -5

Ответ: b ∈ {-8}∪ (-5;3].

Отметим, что при выполнении задания у школьника формируется основа для развития логических операций анализа и конкретизации. Анализ проявляется, когда школьник мысленно разбивает на части разложив на множители, но при этом понимает, что данный метод довольно сложный. Тогда он принимает конкретный метод – метод подбора. Дальше школьник анализируя разбивает уравнение на 2 части. Подставляет в исходное уравнение сначала положительные значения x, а потом отрицательные. Убеждаясь в том, что нет во всех двух случаях решения делает соответствующий ответ.

Синтезом является логическим приемом мышления, который характеризуется тем, что результаты исследования смысловой части уравнения объединяются в единое целое, в решение уравнений.

Логический прием синтез в паре с анализом развивается при решении уравнений с параметрами. Действительно, для того, что найти корни этого нестандартного уравнения необходимо провести исследование самого параметра и уравнения. При этом у школьника появляются все предпосылки для развития умения анализировать.

Пример 2.4. Решить уравнение х – $\sqrt{t - x^2}$ = 1

Решение:

1) Перепишем уравнение немного по-другому

$\sqrt{t - x^2}$ = х – 1

2) Необходимо делать ОДЗ, так как в левой части уравнения имеется квадратичная корень. Выражение, которое находится под корнем должно быть больше или равно нулю. Получается:

t – $x^2 \geq 0$

3) Обе части иррационального уравнения возведем в квадрат. При этом х – 1 ≥ 0. Так как в квадрат можно возводить, если обе части отличны от нуля.

х≥ 1

4) При возведении в квадрат в правой части необходимо использовать формулу сокращенного умножения. Выполняем действие:

$t - x^2 = x^2 - 2x + 1$

$2x^2$–2х + (t + 1) = 0

5) Для того, чтобы дальше решить данное уравнение, необходимо воспользоваться формулой дискриминанта.

D = $b^2 - 4ac$

Из уравнения видно, что a = 2, b = –2, c = t+1

D= $(-2)^2$– 4·2(t+1) = 2t – 1.

6) Дискриминант приравниваем к нулю и получим особое значение

t = 0,5. Отсюда:

a) при $t > 0{,}5$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{D}}{2a}$ = 0,5·(1$\pm\sqrt{2t-1}$);

b) при t = 0

x = 0.5;

c) при $t < 0$ уравнение не имеет действительных корней.

7) Делаем проверку

a) когда подставляем x = 0.5 в уравнение, получим неверное равенство. Значит x = 0,5 не является корнем данного уравнения.

b) когда подставляем в уравнение x_1 = 0,5·(1$\pm\sqrt{2t-1}$), то получим:

– 0,5·(1+$\sqrt{2t-1}$) = – (0,5·(1$\left(0{,}5 \cdot \left(1+\sqrt{2t-1}\right)\right)^2$.

Из за того, что левая часть равенства отрицательное выражение, то x_1 не может являться корнем данного уравнения.

c) подставляем в уравнение x_2 и получим:

$\sqrt{t - (\frac{1+\sqrt{2t-1}}{2})^2}$ = t – $\frac{1+\sqrt{2t-1}}{2}$.

Проводим равносильные преобразования и получим:

При $\frac{\sqrt{2t-1}-1}{2} \geq 0$ можно возводить в квадрат полученное равенство:

$\frac{t-\sqrt{2t-1}}{2}$ = $(\frac{\sqrt{2t-1}-1}{2})^2$.

При условии

$\frac{\sqrt{2t-1}-1}{2} \geq 0$ имеем истинное равенство.

Чтобы данное условие выполнялось, а ≥ 1.

При t ≥ 1 равенство истинно . Поэтому x_2– корень уравнения при t ≥ 1.

Ответ: При t ≥ 1, x = 0,5·(1$-\sqrt{2t-1}$).

Отметим, что при решении данного уравнения школьник проживает логические операции таки как анализ и синтез, конкретизация. Когда школьник разбивает уравнение на части: определяет вид уравнения, ОДЗ, возводит в квадрат, у него развивается прием логического мышления анализ. После анализа он использует конкретную формулу: формулу сокращенного умножения и дискриминанта. При этом развивается логический компонент мышления конкретизация. После получения разных значений дискриминанта уравнение разбивает на части, подставляя разные значения. В этом случае неявно развивается опять логический прием анализ.

Пример 2.5. Определить связь между уравнениями и сделать обобщенную форму уравнения.

1) $\sqrt{x^2+8} = 4$;
2) $\sqrt{x^2+13} = 12$;
3) $\sqrt{x+1} = 5$;
4) $\sqrt{x-2} = 0$;
5) $\sqrt{x^3-4} = 3$.

Решение:

a) замечаем, что все уравнения находятся под знаком радикала, во всех уравнениях присутствует только квадратный корень, под знаком корня неизвестное x в первой, второй и третьей степенях. В каждом уравнении в правой стороне положительное число;

b) проанализировав, можно выделяем обобщенное свойство для всех уравнений, что квадратичный корень всегда равен положительному числу или нулю;

c) делаем обобщение и пишем вывод, что все уравнения в примере относятся к иррациональному уравнению;

d) обобщая данные уравнения, можно записать общую форму заданных уравнений. И она выглядит:

$\sqrt{f(x)} = a$, где $a \geq 0$.

При решении данного уравнений школьник определяет вид урванения. Разбивает на части, после проведения анализа он выводит обобщенную форму иррационального уравнения. Тем самым у него развивается логическая операция обобщение.

Абстрагирование - набор мысленных операций, логический прием, состоящий в отделении общих свойств, выделенных в результате общих свойств, от других незначительных или необщих свойств рассматриваемых объектов или отношений, отбрасывая последние.

При изучении уравнений, школьник выделяет один признак в уравнении. Тем самым учащиеся развивается компонент логического мышления абстрагирование.

Пример 2.6. Решить уравнение, $2x + \sqrt{x} - 1 = 0$

Решение:

а) уравнение присутствует x в степени одна вторая и в первой степени. Между ними имеются связь: $x = (\sqrt{x})^2$. Эта связь является основанием для абстрагирования. Делаем замену:

$\sqrt{x} = a$,

где $a \geq 0$.

b) данное уравнение приводится к квадратному уравнению, решаемое по известной последовательности, которое не имеет отношения к иррациональному уравнению.

$2a^2 + a - 1 = 0$

Воспользуемся формулой дискриминанта, которая имеет вид:

$D = b^2 - 4ac,$

где a = 2, b = 1 и c = – 1.

$D = 1 + 8 = 9 > 0$

Как нам известно, при $D > 0$ квадратное уравнение имеет 2 действительных корня. Для нахождения этих корней воспользуемся формулой:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{4} = 0,5;$

$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} = -1.$

Ответ: –1 и 0,5.

При решении данного уравнения школьник определяет вид уравнения, определяет связи x = $(\sqrt{x})^2$. При этом развивается прием логического мышления абстрагирования. Дальше принимает формулу для решения уравнения. Тогда развивается компонент логического мышления конкретизация.

Конкретизация – мыслительный прием, который переходит от общего к единичному, соответствующему этому общему.

При решении задачи школьник соотносит несколько уравнений к одному конкретному виду или к виду, которые решаются одним и тем же способом. Таким образом, развивается компонент логического мышления учащихся конкретизация.

Пример 2.7. Выделите уравнения, которые относятся к неполному квадратному уравнению.

1) x^2 – 5x = – 5x;
2) 3x^2 + 5 = 0;
3) 4x^2 – 10x + 7 = 0;
4) $(x+2)^2$ = 4;
5) $(x-3)^3$ = x^3;
6) $x^2 - 5x - (x-1)^2 = 0$
7) $x^2 = 7$.

Решение:

Для начала мы должны знать, что такое неполное квадратное уравнение. Начнем с полного квадратного уравнения. Уравнения, которые имеют вид

$ax^2 + bx + c = 0$, где a ≠ 0, называются полными квадратными уравнениями.

А неполными квадратными уравнениями являются те уравнения, в которых коэффициенты b или c, b и c одновременно равны нулю.

В первом уравнении, если перенести –5x влево, останется уравнение $x^2 =$ 0.

Замечаем, что коэффициенты b или c отсутствуют, значит, они равны нулю.

Получается, первое уравнение – неполное.

Во втором уравнении коэффициент с отсутствует, значит с = 0. Тогда мы можем сказать, что второе уравнение тоже неполное.

В третьем уравнении все коэффициенты уравнения отличны от нуля, значит, данное уравнение является полным.

В четвертом уравнении в левой части необходимо раскрыть скобки. Для этого воспользуемся формулой сокращенного умножения:

$x^2 + 4x + 4 = 4$;

В правовой части уравнения находится число 4. Его перенесем влево.

$x^2 + 4x + 4 – 4 = 0$;

$x^2 + 4x = 0$

Коэффициент с отсутствует, поэтому данное уравнение – неполное.

В пятом уравнении содержится кубическая степень, левую часть раскроем по формуле сокращенного умножения для третьей степени и правую часть уравнения перенесем влево. Тогда имеем:

$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 = 0$;

$-9x^2 + 27x - 27 = 0$.

Очевидно, что все коэффициенты отличны от нуля. Тогда данное уравнение – полное.

В шестом уравнении третий одночлен содержит скобки. Эти скобки необходимо раскрыть с помощью формулы сокращенного умножения. Тогда уравнение имеет вид:

$x^2 - 5x - (x - 1)^2 = 0$;

$x^2 - 5x - x^2 + 2x - 1 = 0$;

$- 3x - 1 = 0$.

Данное уравнение вообще не является квадратным, поскольку неизвестное содержит только первую степень. Получается, что и это уравнение не является неполным квадратным уравнением.

В седьмом уравнении в правой части содержится положительное число. Данное число перенесем влево и имеем уравнение. Получается в этом уравнении отсутствует коэффициент b. Поэтому уравнение – неполное.

Ответ: Уравнения под номерами 1, 2, 4, 7 являются неполными уравнениями.

Отметим, что при решении данного уравнения школьник анализирует каждое уравнение. Определяет вид уравнения, сравнивает коэффициенты, Тем самым соотносит к конкретному виду уравнения. При этом развиваются такие логические компоненты мышления, как: анализ, конкретизация, сравнение.

Пример 2.8. Решить уравнение аx^2+ 3x – 5 = 0.

Решение:

1) уравнение квадратное, поскольку имеет неизвестное во второй степени;

2) необходимо решить с помощью конкретной формулы, формулы дискриминанта

kx^2+ 3x – 5 = 0

D = b^2 – 4ac;

D = 9 – 4·a·3 = 9 – 12a

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

$x_1=\frac{-3+\sqrt{9-12a}}{2k}$;

$x_2=\frac{-3-\sqrt{9-12a}}{2k}$.

Ответ: $\frac{-3+\sqrt{9-12a}}{2k}$ и $\frac{-3+\sqrt{9-12a}}{2k}$.

Отметим, что при решении уравнения школьник определяет вид, коэффициенты уравнения. Дальше принимает формулу Дискриминанта. При решении этом бумерангом развивается компонент логического мышления конкретизация.

Таким образом, у содержательной линии есть потенциал для развития компонентов логического мышления, которые могут развиваться у школьника неявно. Решая уравнения разного типа, разной сложности бумерангом у школьника развиваются компоненты логического мышления.

2.2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Продемонстрируем реализацию модели развития логического мышления на примере темы «Решение иррациональных уравнений».

Цель: развитие логического мышления учащихся средствами иррациональных уравнений.

В качестве дидактических условий принимаем: специально отобранное содержание процесса обучения школьников мыслительным операциям; обеспечение единства мотивационного, содержательного и операционного компонентов обучения; единство репродуктивного и продуктивного характера познавательной деятельности учащихся; постепенное повышение степени их самостоятельности в овладении мыслительными операциями; побудительно-интенсифицирующая деятельность учителя.

При решении иррациональных уравнений школьники встречаются с такими понятиями как: решить уравнение, корни уравнения, равносильные уравнения, возведение в степень, знак модуля, область допустимых значений (ОДЗ), функция, график функции и т.д.

Алгебраический метод в иррациональных уравнениях применяется обычно в стандартных методах решения, а функционально-графический в нестандартных методах решения.

К стандартным методам решения иррациональных уравнений можно отнести такие методы, как метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень, метод замены переменной. Однако, при использовании данных методов нередко потребуется использование других вспомогательных методов таких, как: метод разложение на множители, метод группировки, свойства модуля, если неизвестное находится под знаком модуля. Данные методы помогут привести исходное уравнение к нескольким иррациональным уравнениям, тем самым упрощает решение. Нередко приходится сталкиваться с иррациональными уравнениями, выражение которых находятся под знаком модуля. Для успешного решения таких уравнений еще необходимо использование соответствующих методов.

К нестандартным методам для решения иррациональных уравнений относятся функционально – графический метод, метод умножения обеих частей уравнения на вспомогательную функцию, метод решения иррациональных уравнений, содержащий знак модуля и т.д.

Алгоритм решения иррациональных уравнений методом возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень следующий:

1) нахождение области допустимых значений (ОДЗ) уравнения;

2) если данное уравнение справа содержит функцию, то она всегда должна быть больше или равно нулю;

3) решение получившегося рационального уравнения;

4) проверка получившихся значений на правильность. Проверка происходит следующим образом: а) найденное значение корней проверятся на принадлежность в области допустимых значений; б) получившихся значения подставляют в исходное уравнение. Если подставленные значения удовлетворяет условия уравнения, то они являются корнями уравнения, а если нет – нет;

5) написание ответа.

На подробное изучение темы «Иррациональные уравнения» в школьном курсе математики уделяется недостаточное количество времени. Поэтому усвоение данного алгоритма решения стандартных методов решения иррациональных уравнений поможет лучше понимать эту тему.

Решая иррациональные уравнения, у школьника бумерангом развиваются такие компоненты логического мышления, как: анализ, синтез, сравнение, обобщение, конкретизация и абстрагирование. Ниже рассмотрим примеры решения иррациональных уравнений, с которыми развиваются логические компоненты мышления школьников.

Пример 2.9. Решить уравнение $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x - 4} = 1$.

Решение:

Учитель выстраивает беседу с учащимися. Постановка вопросов должна быть направлена на то, чтобы школьники могли реализовать процедуру анализа (т.е., вычленить частное на основе этого сделать обобщенный вывод).

а. Определить вид уравнения – иррациональное уравнение, поскольку неизвестное x находится под знаком корня.

б. Определить, какие значения могут применять неизвестное (x) – так как уравнение находится под корнем, а для этого определяем область допустимых значений (ОДЗ). Под квадратным корнем находятся две функции.

в. Проверить ОДЗ для данного уравнения и выяснить принимаемые значения (x) – поскольку они находятся под четным корнем, то выражение под корнем всегда должно быть больше нуля. Получится система неравенств:

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases};$$

Каждое неравенство решить по отдельности:

$3 - x \geq 0$;

Умножить Обе части неравенства на – 1.

Отметить, что из-за свойства неравенства вытекает, что если обе части неравенства умножить на отрицательное число, то знак неравенства поменяет направление. В данном случае было больше нуля, то после умножения на – 1, выражение, которое слева, станет меньше нуля. Тогда

$x - 3 \leq 0$;

$x \leq 3$.

Решить аналогичным образом решаем второе неравенство и получить интервал.

$x - 4 \geq 0$;

$x \geq 4$.

Сравнивать интервалы, полученные после решения неравенств.

$x \leq 3$ принимает значения меньше или равно 3. То есть от минус бесконечности до трех.

А $x \geq 4$ принимает значения больше или равно 4. То есть от четырех до бесконечности.

Заметим, что значения, полученные при решении неравенств не пересекаются в интервале. Исходя из этого мы делаем вывод о том, что неизвестное x не принимает никакое значение.

г. Обосновать необходимость прекращения дальнейшего решения уравнения.

По алгоритму решения иррациональных уравнений можно доказать, что данное уравнение не имеет решение. Но после анализа ОДЗ, который определил, что неизвестное x не может принимать никакое значение. Поэтому отпадает необходимость продолжения решения. Исходя из этого записывается ответ, что данное уравнение не имеет действительных корней.

д. анализировать, что было бы, если бы неизвестное не находилось под четным корнем, а находилось под нечетным корнем.

Заметим, что выражение, которое находится под корнем может быть отрицательным. Например, число $\sqrt[3]{(-8)}$. Из свойства корней знаем, что $\sqrt[3]{(-8)}$ = – 2. Получается, если неизвестное находится под нечетным корнем, то для него не стоит определять область допустимых значений. Так как она принимает любое значение.

е. Обобщенный вывод.

Мы можем говорить, что (x) в этом случае может принимать значения от минус бесконечности до минус бесконечности.

Ответ: Нет действительных корней.

Школьник разбивает уравнение на части: определяет вид уравнения – иррациональное, определяет ОДЗ, для того чтобы узнать принимаемые значения неизвестного (x). При определении ОДЗ окажется, что неизвестное (x) не может принимать никакое значение. Обобщая результаты ОДЗ, школьник придет к выводу, что уравнение не имеет решения. При решении данного уравнения у школьника развивается логические компоненты мышления анализ, обобщение и абстрагирование.

Пример 2.10. Решить уравнение $\sqrt{2 - \mathrm{x} - x^2}$ + 3х = $\sqrt{2x^2 + 2x - 4}$ – 6.

Учитель выстраивает беседу с учащимися. Постановка вопросов должна быть направлена на то, чтобы школьники могли реализовать процедуру анализа (т.е., вычленить частное на основе этого сделать обобщенный вывод).

Решение:

1. Определить вид уравнения.

2. разбить уравнение на части.

а) замечаем, что левая и правая часть уравнения имеет двучлен;

б) выявляем, что уравнение иррациональное, так как неизвестное находится под квадратным корнем в двух местах;

в) так как имеется выражение, которое находится под квадратным корнем, можно определить принимаемые значения х, потому что какие то значения, возможно, не принимает. А для этого определяется область допустимых значений. Имеется в двух случаях неизвестное под квадратным корнем, поэтому они должны быть всегда больше или равно нулю. Получится система неравенств, состоящей из двух неравенств. Записывается она.

$$\begin{cases} 2 - \mathrm{x} - x^2 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

г) каждое неравенство из системы неравенств решить по отдельности.

$$2 - \mathrm{x} - x^2 \geq 0$$

д) умножить обе части неравенства на – 1. Из свойства неравенства вытекает, что при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства поменяется.

$$x^2 + \mathrm{x} - 2 \leq 0$$

е) обобщить полученное выражение и принимать соответствующий метод. Дальше решить его с помощью метода интервалов. Для этого необходимо разложить на множители. И каждый множитель необходимо приравнивать к нулю. Полученные значения отметить в интервале. Для разложения на множители используется теорема Виета. Из теоремы Виета

$x_1 + x_2 = -1$

$x_1 \cdot x_2 = -2$

Методом подбора корнями этого выражения являются – 2 и 1.

Представить теперь в виде умножения двух множителей.

$(x + 2)(x - 1) \leq 0$

Заметить, что между числами – 2 и 1 имеется число ноль. Данное число подставляется в выражение. При этом получится отрицательное число. Значит, можно говорить, что интервал между – 2 и 1 отрицательный, а перед и после этим интервалом имеем положительные интервалы. Из требования необходимо, чтобы интервал был отрицательным или равным нулю. Поэтому принимается $x \in [-2; 1]$.

ж)рассмотрить второй случай при $2x^2 + 2x - 4 \geq 0$.

Аналогичным образом решить данное неравенство.

Обе части разделяется на 2.

$x^2 + x - 2 \geq 0$

По теореме Виета

$(x + 2)(x - 1) \geq 0$

Подставляется число 0 в выражение и получится отрицательное число. Значит, этот интервал отрицательный.

$x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty]$.

Обобщить полученные значения при решении неравенств.

$x \in [-2; 1]$;

$x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty]$.

Замечается, что для двух неравенств ОДЗ определяется при значениях *x – 2* и 1.

з) обобщить полученные значения и сделать вывод.

Анализируя отмечается, что неизвестное x может принимать только два значения. Можно говорить, что зачем дальше решать уравнения, если оно может принимать только *2 числа*? Дальше можно прийти к тому, что просто подставляется эти два числа в исходное уравнение. При выполнении условий принимается эти значения за корни. Отмечается, что x = 1 не удовлетворяет условия решения, а x = –2 условие выполняется. Поэтому данное значение является корнем уравнения.

Ответ: – 2.

При решении данного уравнения школьник сначала уравнение соотносит по видам – к иррациональному уравнению. Дальше решение разделяет на части. Определяет ОДЗ и применяет метод возведения в квадрат обеих частей. Но полученные 2 значения ОДЗ упрощает уравнение, тем самым использует метод постановки значений в исходное уравнение. При определении ОДЗ школьник получит два неравенства, после решения которого обобщает интервалы. При решении данного уравнения у школьника бумерангом развиваются логические компоненты анализ, обобщение.

Пример 2.11. Решить уравнение $\sqrt[3]{20+x} - \sqrt[3]{x-8} = 4$

Для решения данного уравнения учитель выстраивает беседу с учащимися. Постановка вопросов должна быть направлена на то, чтобы школьники могли реализовать процедуру анализа (т.е., вычленить частное на основе этого сделать обобщенный вывод).

Решение:

а. Разбить уравнение на части по виду, на определение ОДЗ, на определение метода для дальнейшего решения.

б. Определить вид уравнения – отмечается, что данное уравнение является иррациональным, так как неизвестное находится под корнем нечетной степени.

в. Исключить необходимость применения ОДЗ.

Так как неизвестное находится под корнем нечетной степени. Из свойств корней вытекает, что если выражение находится под корнем нечетной степени, то это выражение может принимать любое значение: как положительные, так и отрицательные.

г. Определить метод решения.

При решении данного уравнения используется свойство корня нечетной степени. Перепишется исходное уравнение

$\sqrt[3]{20+x}+\sqrt[3]{8-x}=4.$

д. Отмечается необходимость применения замены. Делается замена, введя переменные m = $\sqrt[3]{20+x}$ и n = $\sqrt[3]{8-x}$.

е. Актуализировать знания по прошлым темам.

Вспоминается формула сокращенного умножения. Возводятся обе переменные в третьею степень.

$m^3 = 20 + x;$

$n^3 = 8 - x.$

Замечается, что в первом случае неизвестное (х) со знаком плюс, а во втором со знаком минус. Зная, что при сложении они взаимоуничтожаются, складываются они.

$m^3+n^3=28.$

А исходное уравнение перепишется после замены.

$m + n = 4.$

Записывается два выражения в виде системы уравнений.

$$\begin{cases} m+n= 4 \\ m^3+n^3=28 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, отмечается необходимость применения формулы сокращенного умножения. Дальнейшее решение представляется.

$$\begin{cases} m+n= 4 \\ (m+n)(m^2-mn+n^2)=28 \end{cases}$$

$m^2-mn+n^2 = 7:$

$(m+n)^2-2mn-mn=7;$

$16 - 3mn= 7;$

$-3mn = -9;$

$mn=3.$

$$\begin{cases} m+n= 4 \\ m\cdot n=3 \end{cases}$$

$m \cdot (4 - m) = 3$

$m^2 - 4m + 3 = 0$.

Отмечается, что уместно применение теоремы Виета, чтобы разложить на множители и в дальнейшем каждый из них приравнивать к нулю.

$(m - 1)(m - 3) = 0$

Приравнивая каждый множитель к нулю, получится m_1 и m_2.

$m_1 = 1, m_2 = 3$.

Понимая, что $m + n = 4$, подставляются значения m_1, m_2 и получатся n_1, n_2.

$n_1 = 3, n_2 = 1$.

ж. Согласовать дальнейшие действия.

Смысл замены переменных, в чем было? В том, чтобы разбить уравнение на две части, чтобы упростить решение. Возвращается к замене переменной. Подставляется вместо m и n значения. Получатся корни уравнения.

$1 = \sqrt[3]{20 + x}$;

Возводить обе части на кубическую степень, чтобы избавиться из под корня кубического.

$1 = 20 + x$;

$x = -19$.

Аналогичным образом повторить данный алгоритм.

$1 = \sqrt[3]{8 - x}$;

$1 = 8 - x$;

$x = 7$.

з. Обобщить и сделать вывод.

И так получились два значения, которые могут быть корнями данного уравнения. Чтобы убедиться, что они являются корнями уравнения, подставляются они в исходное уравнение. Проверка покажет, что они действительно являются корнями уравнения. Делая вывод, можно сказать, что не допущено нигде ошибки.

Ответ: 7 и –19.

В ходе решения школьник разбивает уравнение на части: определяет вид, подбирает метод решения. В этом случае развивается компонент логического мышления анализ. Дальше используется свойство корня нечетной степени и это поменяет ход решения. Тогда развивается компонент логического мышления абстрагирование. Дальше школьник сталкивается с необходимостью использования сокращенного умножения при решении системы уравнений. При этом развивается компонент логического мышления конкретизация.

Пример 2.12. Решить уравнение $(x+4)\sqrt{2x-3} = x^2 + 3x - 4$.

В ходе решения уравнения учитель выстраивает беседу с учащимися. Постановка вопросов должна быть направлена на то, чтобы школьники могли реализовать процедуру анализа (т.е., вычленить частное на основе этого сделать обобщенный вывод).

Решение:

а. Разбить уравнение на части.

1) Определяется вид уравнения – иррациональное уравнение, так как уравнение находится под корнем.

2) Отмечается, что неизвестное находится под квадратным корнем. Значит, проверяется, какие значения оно может принимать. А для этого определяется область допустимых значений. Выражение, которое находится под четным корнем, должно быть больше равно нулю.

$2x - 3 \geq 0$

$x \geq 1{,}5.$

3) Отмечается, что если идти по алгоритму решения иррационального уравнения, то должны возвести обе части уравнения в квадрат. Тогда получится уравнение четвертой степени, а это усложняет решение.

4) Замечается, квадратный трехчлен, которое находится в правой части уравнения можно попытаться разложить на множители. Целью разложения на множители правой части уравнения является то, что при получении выражения, одинакового с левой частью имеем возможность вынести общий множитель за скобку. Разложится на множители по теореме Виета и перепишется уравнение.

(x+4) $\sqrt{2x-3}$= (x + 4)(x –1).

Замечается, что выражение *x +4* можно вынести за скобки при перенесении правой части уравнения в левую часть.

(x + 4)($\sqrt{2x-3}-(x-1)=0$;

Приравнивается каждый множитель к нулю

x + 4 = 0

x = – 4.

$\sqrt{2x-3}=x-1$;

Данное уравнение решаем по алгоритму. Возводится обе части уравнения в квадрат.

2x – 3 = x^2-2x+1;

$x^2-4x+4=0$;

x = 2.

б. Обобщить и сделать вывод.

Получились два значения 2 и – 4 при решении уравнения. – 4 не удовлетворяет условие ОДЗ. Подставляется значение 2 в исходное уравнение. Можно убедится, что оно удовлетворяет условие, то оно принимается за корень уравнения.

Ответ: x = 2.

В ходе решения школьник уравнение разбивает на части. Определяет вид, принимаемые значения неизвестного (x). В дальнейшем принимает соответствующий метод решения. При решении уравнения бумерангом развиваются такие компоненты логического мышления, как: анализ, конкретизация.

Пример 2.13 Решить уравнение$\sqrt{4-x}$ =$\left||x|-2\right|$.

При объяснении методики решения данного уравнения учитель выстраивает беседу с учащимися. Постановка вопросов должна быть направлена на то, чтобы школьники могли реализовать процедуру анализа (т.е., вычленить частное на основе этого сделать обобщенный вывод).

Решение:

а) разбить уравнение на части.

1) Определяется вид уравнения – уравнение является иррациональным, так как неизвестное находится под корнем.

2) Определяются принимаемые значения (x). Так как неизвестное находится под корнем. Определяется ОДЗ. Так как неизвестное находится под квадратным корнем, то оно должно быть всегда больше или равно нулю.

$4 - x \geq 0$

3) Обе части умножаем на – 1. При этом знак поменяется.

$x - 4 \leq 0$;

$x \leq 4$.

4)Выбирается подходящий метод решения.

Замечается, что в левой части уравнения неизвестное находится под знаком корня – для него имеется свой алгоритм решения. А в правой части уравнения неизвестное находится под знаком модуля. Для выражения, которое находится под знаком модуля имеются свои свойства и специфика. Отмечается, что их совмещать затрудняет решение уравнения, так как необходимо будет учитывать специфику. Поэтому мы приходим к выводу, что оптимальным методом, чтобы решить данное уравнение является графический метод. У данного метода в применении в этой задаче есть несколько преимуществ:

Во–первых, с помощью этого метода сокращается время на решение уравнения.

Во–вторых, наглядно можно просматривать пересечение графиков, определяя при этом корни уравнения.

В–третьих, расширяет арсенал учащихся для решения задач.

Теперь к самому методу: сначала выражения, которые находятся слева и справа записываем через функцию и строим для них графики. Отмечается, что корнями уравнения будут те значения x, где пересекаются два графика.

$f(x) = \sqrt{4 - x}$

Вместо (x) подставляются значения, тем самым получим значения функции в этих точках. Для этого составится таблица. По этим значениям строится график функции.

x	1	3	0	-5
f(x)	$\sqrt{3}$	1	2	3

Построение графика функции g(x) $=\left||x|-2\right|$. Для этого аналогично составляется таблица.

x	0	2	3	-2	-5
g(x)	2	0	1	0	3

Отмечается, что на рисунке (Рисунок 3) фиолетовым цветом построен график функции f(x) = $\sqrt{4-\mathrm{x}}$, а зеленым график функции g(x) = $\left||x|-2\right|$. После построения двух графиков определяются точки их пересечения. Для этого необходимо спускаться по этим точкам к оси *x*. Эти точки отмечаются и записываются данные значения. Дальше можно заметить, что функции пересекаются в точках *x* при –5, 0 и 3.

Ответ: –5, 0, 3.

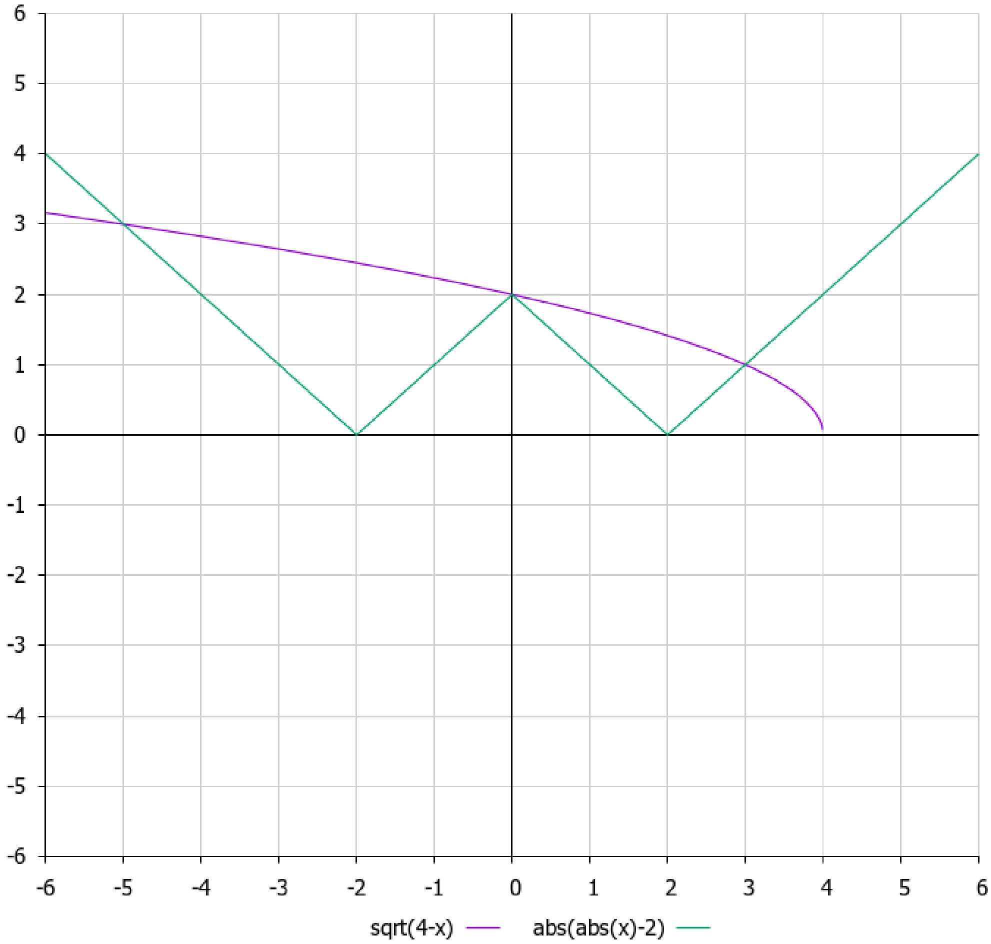


Рис. 3. График функций f(x) =$\sqrt{4-x}$ и g(x) =$\left||x|-2\right|$.

При решении данного уравнения школьник разбивает уравнение части: определяет вид уравнения, принимаемые значения (x), а дальше принимает соответствующий метод решения. При решении уравнения по алгоритму у школьника развиваются логические компоненты мышления анализ и конкретизация.

При обучении учащихся методике решения иррациональных уравнений учитель сталкивается с некоторыми проблемами, как: неумение учащихся анализировать условие уравнения, неумение определить ОДЗ, ошибка определения ОДЗ для нечетных корней, полученные значения сравнивать с ОДЗ, применение графического метода, как средство упрощения решения, затруднение с поиском решения.

2.3. ВХОДНОЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Входной эксперимент для определения уровня развития логического мышления проводился у учащихся девятых классов МАОУ Гимназия №1 города Тюмени. В эксперименте участвовали 30 человек.

Цель эксперимента: определить уровень развития компонентов логического мышления

Методика эксперимента: тест Амтхауэра для определения уровня развития компонентов логического мышления аналогии и обобщения. Он состоит из девяти субтестов, которые направлены на определение уровня интеллекта. Нами были использованы третий и четвертый субтесты [Туник, с. 16].

Субтест 3 использовался для определения развития логического компонента аналогии. В нем даны задания, где не хватает одного слова во второй паре слов. Первая пара слов – полная, состоящая из двух взаимосвязанных по смыслу слов. Нужно понять смысл этой связи чтобы в соответствии с ним выбрать недостающее во второй паре слово из пяти слов. Тест состоял из 20 заданий. Максимальный балл – 20. Ниже (в таблице 1) приведены результаты теста.

Таблица 1

Результаты теста аналогии

Номер ученика	Баллы (20макс)	Номер ученика	Баллы (20макс)
1	20	16	10
2	5	17	7
3	5	18	8
4	6	19	14
5	7	20	10
6	17	21	11
7	18	22	9
8	6	23	8
9	7	24	6
10	8	25	6
11	9	26	7
12	9	27	2
13	9	28	2
14	11	29	0
15	14	30	0

Для интерпретации результатов исследования определяется процентильный ранг (Таблица 2).

Уровни развития логических компонентов определяются следующим образом: низкий – средний от 0% до 50%, хороший от 51% до 75%, отличный от 76% до 100%.

Таким образом, результаты обработки данных показали, что низкий – средний уровень развития логического компонента аналогии у семнадцати учеников, хороший у шести учеников и отличный у семи учеников (Таблица 3, Рисунок 4).

Таблица 2

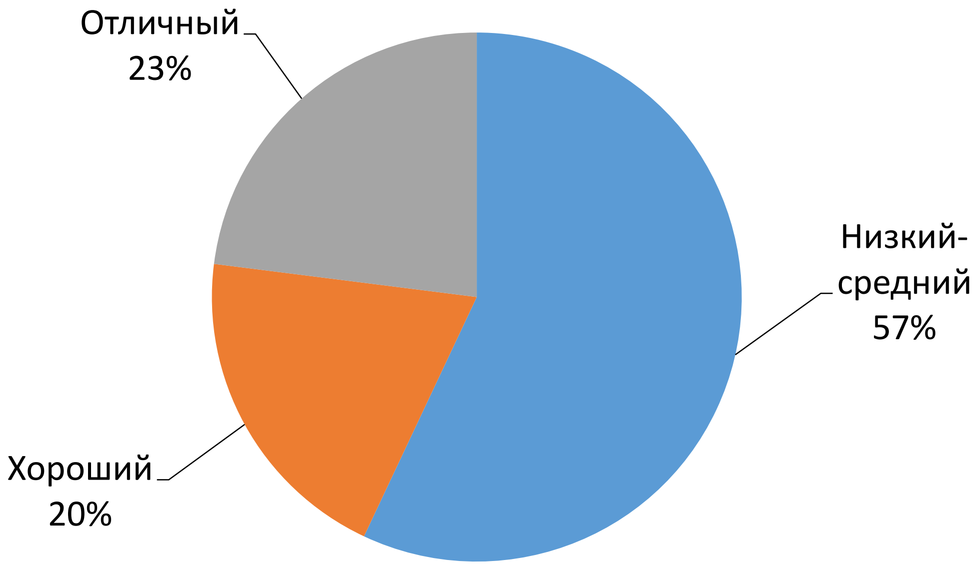
Результаты расчетов эксперимента

Номер ученика	Балл	Ранг	Количество рангов меньше данного	Количество рангов равных данному	Процентильный Ранг, %
29	0	1,5	0	1	1,(6)
30	0	1,5	0	1	1,(6)
27	2	3,5	2	1	8,(3)
28	2	3,5	2	1	8,(3)
2	5	5,5	4	1	15
3	5	5,5	4	1	15
4	6	8,5	6	3	25
8	6	8,5	6	3	25
24	6	8,5	6	3	25
25	6	8,5	6	3	25
5	7	12,5	10	3	38,(3)
9	7	12,5	10	3	38,(3)
17	7	12,5	10	3	38,(3)
26	7	12,5	10	3	38,(3)
10	8	16	14	2	50
18	8	16	14	2	50
23	8	16	14	2	50
11	9	19,5	17	3	61,(6)
12	9	19,5	17	3	61,(6)
13	9	19,5	17	3	61,(6)
22	9	19,5	17	3	61,(6)
16	10	22,5	21	1	71,(6)
20	10	22,5	21	1	71,(6)
14	11	24,5	23	1	78,(3)
21	11	24,5	23	1	78,(3)
15	14	26,5	25	1	85
19	14	26,5	25	1	85
6	17	28	27	0	90
7	18	29	28	0	93,(3)
1	20	30	29	0	96,(6)

Таблица 3

Результаты эксперимента для определения уровня развития компонента аналогии

Уровни развития	Ученики (экспер., n=30)	
	Абс.	%
Низкий-средний	17	56%
Хороший	6	20%
Отличный	7	23%



Уровень развития компонента логического мышления аналогии по методике Амтхауэра

Субтест 4 использовался для определения развития логического компонента обобщения. В заданиях этого раздела содержались всего по два слова, которые объединены общим смыслом. Этот их общий смысл нужно было постараться передать одним, в крайнем случае - двумя словами. Это одно слово и будет ответом на 16 заданий. Максимальный балл – 32. Ниже, в таблице 4, приведены результаты теста.

Таблица 4

Результаты теста обобщения

Номер ученика	Баллы (32 макс)	Номер ученика	Баллы (32 макс)
1	9	16	30
2	10	17	14
3	14	18	15
4	14	19	17
5	12	20	6
6	20	21	29
7	3	22	11
8	19	23	29
9	19	24	3
10	24	25	30
11	2	26	28
12	21	27	9
13	18	28	16
14	7	29	15
15	21	30	28

Для интерпретации результатов исследования определяется процентильный ранг (Таблица 5).

Уровни развития логических компонентов определяются следующим образом: низкий – средний от 0% до 50%, хороший от 51% до 75%, отличный от 76% до 100%.

Таким образом, результаты обработки данных показали, что низкий – средний уровень развития логического компонента обобщения у шестнадцати учеников, хороший у семи учеников и отличный у семи учеников (Таблица 6, Рисунок 5).

Таблица 5

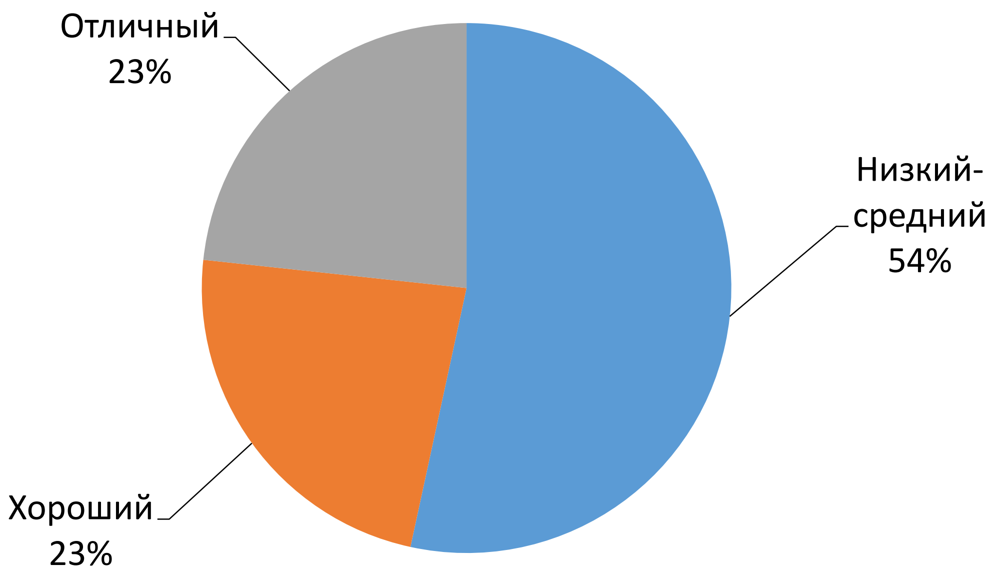
Результаты расчетов эксперимента

Номер ученика	Балл	Ранг	Количество рангов меньше данного	Количество рангов равных данному	Процентильный Ранг, %
11	2	1	0	0	0
7	3	2,5	1	1	5
24	3	2,5	1	1	5
20	6	4	3	0	10
14	7	5	4	0	13,(3)
2	9	6,5	5	1	18,(3)
27	9	6,5	5	1	18,(3)
1	10	8	7	0	23,(3)
22	1	9	8	0	26,(6)
5	12	10	9	0	30
3	14	12	10	2	36,(6)
4	14	12	10	2	36,(6)
17	14	12	10	2	36,(6)
18	15	14,5	13	1	45
29	15	14,5	13	1	45
28	16	16	15	0	50
19	17	17	16	0	53,(3)
13	18	18	17	0	56,(6)
8	19	19,5	18	1	61,(6)
9	19	19,5	18	1	61,(6)
6	20	21	20	0	66,(6)
12	21	22,5	21	1	71,(6)
15	21	22,5	21	1	71,(6)
10	24	24	23	0	76,(6)
26	28	25,5	24	1	81,(6)
30	28	25,5	24	1	81,(6)
21	29	27,5	26	1	88,(3)
23	29	27,5	26	1	88,(3)
16	30	29,5	28	0	95
25	30	29,5	28	0	95

Таблица 6

Результаты эксперимента для определения уровня развития компонента обобщения

Уровни развития	Ученики (экспер., n=30)	
	Абс.	%
Низкий-средний	16	54%
Хороший	7	23%
Отличный	7	23%



Уровень развития компонента логического мышления обобщения по методике Амтхауэра

Проведенный эксперимент для определения развития компонентов логического мышления показал, что у большинства учеников данные компоненты логического мышления слабо развиты. В качестве средств для развития компонентов логического мышления аналогии и обобщения можно предложить содержательную линию уравнений.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

В данной главе разработаны учебные задачи на развитие компонентов логического мышления анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, конкретизация, обобщение.

Компоненты логического мышления развиваются при решении уравнений бумерангом. Для этого необходимо придерживаться алгоритму при решении уравнений.

Приведена методика обучения методам решения уравнений на примере иррациональных уравнений. Она показала, что содержательная линия уравнений развивает логическое мышление учащихся.

Был проведен входной эксперимент для определения развития компонентов логического мышления. Он показал, что у многих учащихся логические компоненты мышления аналогия и обобщение недостаточно развито. Решением этого предложена содержательная линия уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие у обучающихся логического мышления – это одна из важных задач обучения в школе. Умение мыслить логически, выполнять умозаключения без наглядной опоры является необходимым условием успешного усвоения учебного материала. Теоретический анализ литературы показывает, что проблема развития логического мышления рассматривалась достаточно широко. Вопросами развития логического мышления занимались такие ученые, как: Кущетерева Ф.Т, Азимов Н.С., Давыдов В.В., Огерчук Л.Ю. и так далее.

В теоретической части работы нами проанализированы основные понятия логического мышления, компоненты логического мышления.

В процессе написания магистерской диссертации была разработана модель развития логического мышления учащихся. На основе модели приведена методика обучения методам решения уравнений, сформулированы учебные задачи на развитие компонентов логического мышления. Был проведен входной эксперимент для определения развития компонентов логического мышления аналогии и обобщения.

Таким образом, в ходе проведения исследования по теме: «Развитие логического мышления учащихся средствами содержательной линии уравнений» цель была достигнута, поставленные задачи решены.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абдульханова-Славская К.А. Стратегия жизни. Москва: Педагогика, 1990. 57с.
2. Агеева С.Р. Учет профиля моторной асимметрии: психофизиологическая основа дифференцированного обучения и воспитания //Возрастные особенности физиологических систем детей и подростков. Москва: Педагогика, 1990. С.37-49.
3. Азимов Н.С. Применение свойств функции в решении математических задач // cyberleninka.ru [сайт]. 2021 19 янв. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-svoystv-funktsii-v-reshenii-matematicheskih-zadach. (дата обращения: 19.01.2021).
4. Андреев В.И. Педагогика творческого саморазвития: Инновационный курс. Казань: Казанский университет, 1998. 320 с.
5. Арефьева И.Г., Пирютко О.Н. Алгебра 7 класс: учебное пособие для общего среднего образования с русским языком обучения. Минск: Нородная света, 2017. 316 с.
6. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. Москва: Просвещение, 1993. 351 с.
7. Болтянский В.Г., Груденов Я.И. Как учить поиску решения задач//Математика в школе. 1988. №4. С. 8-14.
8. Брадис В.М. Ошибки в математических рассуждениях. Москва: Просвещение, 1967. 205 с.
9. Воннова И.В. Обучение логическим приемам мышления учащихся основной школы в процессе изучения курса алгебры: Автореф.дисс. … канд.пед.наук. Саранск, 2006. 173с.
10. Гольдич В.А. Решение уравнений и неравенств. Санкт-петербург: «Литера», 2004. 96с.
11. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. Москва: Просвещение, 2000. 284 с.

12. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. Москва: ИПТОР, 1996. 544 с.

13. Дружинин В.Н. Когнитивные способности: структура, диагностика, развитие. Москва: ПЕР-СЭ, Иматон, 2001.224 с.

14. Дулатова З.А. О развитие логического мышления учащихся средствами математики// cyberleninka.ru [сайт]. 2020 23 дек. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-razvitii-logicheskogo-myshleniya-uchaschihsya-sredstvami-matematiki (Дата обращения: 23.12.2020).

15. Егорина В.С. Формирование логического мышления младших школьников в процессе обучения: Дисс....канд. пед. наук. Брянский Государственный университет им. академика И.Г. Петровского. Брянск, 2001. 159 с.

16. Епишева О.Б. Учить школьников учиться математике. Формирование приемов учебной деятельности: книга для учителей. Москва: Просвещение, 1990. 128 с.

17. Епишева О.Б. Формирование приемов учебной деятельности // Математика в школе. Москва: Педагогика, 1989. №1. С. 31-37.

18. Забрамная О.Д. Психолого-педагогическая диагностика умственного развития детей. Москва: Просвещение, Владос, 1995. 112 с.

19. Занков Л.В. Избранные педагогические труды. Москва: Просвещение, 1990. 310 с.

20. Крамор В.С. Задачи с параметрами и методы их решения. Москва: ООО «Издательство Оникс», 2007. 416 с.

21. Кретинин О.С. Обучение обобщению и конкретизации на уроках математики: пособие для учителей. Москва: Просвещение, 1978. 208 с.

22. Кудрина Т.е. Развитие логического мышления в диалоге: Авто.реф. дисс.... канд. психол. наук. Москва, 1987. 18 с.

23. Курбело Б.Ф. Соотношение логических и специфических приемов мышления в обучении: Автореф. дисс…. канд. психол. наук. Москва, 1990. 19 с.

24. Кущетерева Ф.Т. Развитие логического мышления на уроках математики//cyberleninka.ru [сайт]. 2020. 10 дек. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-logicheskogo-myshleniya-na-urokah-matematiki (Дата обращения: 10.12.2020).

25. Ляхова Н.Е. Использование ограниченности функций в школьном курсе математики// cyberleninka.ru [сайт]. 2020. 15 дек. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-ogranichennosti-funktsiy-v-shkolnom-kurse-matematiki/viewer (Дата обращения: 15.12.2020).

26. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. Москва: Просвещение, 2009. 240 с.

27. Мордкович А.Г., Николаев Н.П. Алгебра 7 класс. В 2 ч: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. Москва: Мнемозина, 2009. Ч 1. 191с.

28. Никольская И.Л. учимся рассуждать и доказывать. Книга для учащихся 6-10 кл. сред. Шк. Москва: Просвещение, 1989.

29. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. Москва. 1997 . 219 с.

30. Поспелов Н.И. Формирование мыслительных операций у старшеклассников. Москва: Педагогика, 1989. 152 с.

31. Рязановский А.Р. Математика. Решение задач повышенной сложности. Москва: Интеллект-центр, 2008. 480 с.

32. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. Москва: Просвещение, 2002. 195 с.

33. Тихомирова Л.Ф. Развитие логического мышления учащихся. Ярославь, 1993. 53 с.

34. Туник Е.Е. Тест интеллекта Амтхауера. Анализ и интерпретация данных. СПб: Речь, 2009. 96 с.

35. Федеральные государственные образовательные стандарты: официальный сайт. Москва. URL: https://fgos.ru (Дата обращения: 15.03.2021).

36. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике. Книга для учащихся. М: Просвещение, 1985. 106 с.

37. Хакбердыев М. Формирование интеллектуальных умений упервоклассников на примере математики: Дисс....канд. пед.наук. Душанбе, 1991. 135 с.

38. Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. СПб: ЧеРо-на-Невс, 2003. 192 с.

39. Шахмейстер А.Х. Уравнения. 4-е издание. Москва: МЦНМО, 2011. 264 с.

40. Шевченко Н.В. Дидактические условия формирования общеучебных интеллектуальных умений у учащихся 5-6 классов основной школы: Дисс... канд. пед. наук. - Москва: Изд-во института повышения квалификции и переподготовки работников народного образования Московской области, 1999. 167 с.

41. Эльконин Д.Б. Обучение и умственное развитие в младшем школьном возрасте // Психологическая наука и образование. 1996. № 4. С.18-23.