ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2003, том 43, № 12, с. 1870–1883

УДК 519.634

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НА ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

© 2003 г. В. А. Баринов, Н. Н. Бутакова
(625003 Тюмень, ул. Семакова, 10, ТюмГУ)
e-mail: vbarinov@utmn.ru

Поступила в редакцию 16.12.2002 г.

Поставлена пространственная задача о поверхностных волнах на слое двухфазной смеси. Задача решена в нелинейной постановке с точностью до второго приближения по малому амплитудному параметру, решение получено в виде затухающих бегущих волн. Найдены фазовая скорость, частота и декремент затухания волны, определено возмущение концентрации дисперсной фазы. Библ. 8. Фиг. 1.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования распространения волн по свободной поверхности многофазных (в частности, двухфазных) сред мало отражены в современной научной литературе, хотя эти исследования представляют как теоретический, так и практический интерес. Они могут быть использованы для изучения влияния примесей на волновые параметры (частоту, фазовую скорость, высоту волны и т.п.). Такое влияние на распространение прибрежных волн описано в [1]. Кроме того, с точки зрения практики интересна и обратная задача – определение зависимостей концентрации примесей по заданным характеристикам волны. Аналитические выражения таких зависимостей могут быть основой волнового метода определения степени загрязнения водного бассейна. В рамках многоскоростной модели линейная задача о распространении плоских поверхностных волн на слое двухфазной (дисперсной) среды решена в [2]. В этой статье найдена зависимость частоты и декремента волны от параметров дисперсной фазы, а также установлено, что волновое возмущение концентрации дисперсной фазы является величиной более высокого порядка малости по сравнению с остальными возмущениями. В [3] эта задача решена в нелинейной постановке с точностью до второго приближения, что позволило определить возмущение концентрации. В указанных выше работах межфазное взаимодействие моделировалось только как межфазное трение. В настоящей работе приводится решение нелинейной задачи о распространении по свободной поверхности слоя двухфазной среды пространственных волн. Используемая здесь модель учитывает не только межфазное трение, но и силу присоединенных масс.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим слой двухфазной смеси постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Сверху слой граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности, атмосферным). Положим, что несущая фаза – идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе, дисперсная – недеформируемые частицы. Движение такой среды в отсутствие тепло- и массообмена описывается многоскоростными уравнениями сохранения массы и импульса [4]:

$$\partial\rho_i/\partial t^* + \nabla(\rho_i \mathbf{v}_i^*) = 0,$$

$$\rho_i\frac{d\mathbf{v}_i^*}{dt^*} = -\alpha_i\nabla P_i + (-1)^i\alpha_1\alpha_2\chi^m\rho_1^0\left(\frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} - \frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*}\right) + (-1)^i\alpha_1\alpha_2 R(\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*) + \rho_i\mathbf{g}, \quad (1.1)$$

$$\rho_i = \rho_i^0\alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho_i^0 = \text{const}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь индексы $i = 1, 2$ относятся, соответственно, к несущей и дисперсной фазе; звездочкой (где это необходимо) обозначены размерные величины; α_i, $\mathbf{v}_i^*$, P_i, ρ_i, ρ_i^0 – объемная концентрация, вектор скорости, давление, приведенная и истинная плотность i-й фазы; $\mathbf{g}$ – вектор ускорения силы тяжести. Эмпирический коэффициент R характеризует силу вязкого трения Стокса, вызванную несовпадением скоростей фаз. Например, для сферических частиц радиуса a его значение принимается равным $R = 9\eta/(2a^2)$, где η – коэффициент динамической вязкости жидкости. Второе слагаемое в правой части уравнений движения (1.1) соответствует силе присоединенных масс, возникающей из-за ускоренного движения частиц относительно несущей фазы. Значение коэффициента χ^m определяется экспериментально. В случае идеальной несжимаемой несущей фазы $\chi^m = 1/2$ (см. [4]).

Введем декартову систему координат так, чтобы невозмущенная свободная поверхность совпадала с плоскостью $z^* = 0$, а дно – с плоскостью $z^* = -l^*$ (l^* – глубина слоя); ось z^* направлена вертикально вверх. Для того чтобы система (1.1) описывала волновое движение смеси, необходимо ввести волновые возмущения концентрации и давления. Полагая, что в отсутствие волны среда находится в покое, из уравнений движения (1.1) при $\mathbf{v}_i^* = 0$ и условия равенства давлений на невозмущенной свободной поверхности $z^* = 0$ находим гидростатические составляющие давлений $P_{i0} = P_a - \rho_i^0 gz^*$. Считая, что возмущения давления, вызванные распространением волны, одинаковы в обеих фазах и равны p' (см. [2]), получаем

$$P_i = P_a - \rho_i^0 gz^* + p', \quad i = 1, 2. \tag{1.2}$$

Предполагая, что в невозмущенном слое смеси дисперсная фаза распределена равномерно, объемные концентрации фаз можно представить в виде

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_0 - \alpha', \quad \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha', \tag{1.3}$$

где $\alpha_0 = \text{const}$ и $\alpha' = \alpha'(t^*, x^*, y^*, z^*)$ – концентрация дисперсной фазы в покоящемся слое смеси и ее волновое возмущение соответственно. Подставляя (1.2) и (1.3) в уравнения (1.1), получаем систему уравнений для описания волнового движения смеси:

$$-\frac{\partial\alpha'}{\partial t^*} + (1 - \alpha_0 - \alpha')\nabla\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_1^* \cdot \nabla\alpha' = 0, \quad \frac{\partial\alpha'}{\partial t^*} + (\alpha_0 + \alpha')\nabla\mathbf{v}_2^* + \mathbf{v}_2^* \cdot \nabla\alpha' = 0, \tag{1.4а}$$

$$\left[\rho_1^0 + \frac{1}{2}\rho_1^0(\alpha_0 + \alpha')\right]\frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} - \frac{1}{2}\rho_1^0(\alpha_0 + \alpha')\frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} - R(\alpha_0 + \alpha')(\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*) + \nabla p' = 0, \tag{1.4б}$$

$$\left[\rho_2^0 + \frac{1}{2}\rho_1^0(1 - \alpha_0 - \alpha')\right]\frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} - \frac{1}{2}\rho_1^0(1 - \alpha_0 + \alpha')\frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} + R(1 - \alpha_0 - \alpha')(\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*) + \nabla p' = 0. \tag{1.4в}$$

На свободной поверхности среды $z^* = \xi(t^*, x^*, y^*)$ должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия [2], которые представляют собой условия отсутствия потока массы смеси через поверхность и непрерывности потока импульса соответственно:

$$\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^* = V_n, \quad P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a,$$

где $\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^*$ и V_n – нормальные проекции объемной скорости смеси и свободной поверхности. С учетом равенств (1.2) и (1.3) кинематическое и динамическое условия принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi}{\partial t^*} - (1 - \alpha_0 - \alpha')v_{1z}^* - (\alpha_0 + \alpha')v_{2z}^* + \frac{\partial\xi}{\partial x^*}[(1 - \alpha_0 - \alpha')v_{1x}^* + (\alpha_0 + \alpha')v_{2x}^*] + \\ + \frac{\partial\xi}{\partial y^*}[(1 - \alpha_0 - \alpha')v_{1y}^* + (\alpha_0 + \alpha')v_{2y}^*] = 0, \\ p' - [\rho_1^0(1 - \alpha_0 - \alpha') + \rho_2^0(\alpha_0 + \alpha')]g\xi = 0, \quad z^* = \xi(t^*, x^*, y^*),\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $\rho^0 = (1 - \alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0$ – плотность покоящейся смеси. Считая, что поток массы через твердую поверхность горизонтального основания отсутствует, на дне получаем условие непротекания для каждой фазы (см. [4]):

$$v_{\text{in}}^* = 0, \quad i = 1, 2, \quad z^* = -l^*. \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.4)–(1.6) образует замкнутую математическую модель для определения неизвестных скоростей волнового движения фаз, возмущения давления и концентрации, а также формы свободной поверхности.

2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЛНАХ

Рассмотрим пространственное движение двухфазной среды, вызванное распространением по свободной поверхности слоя прогрессивной волны длиной λ. Фазовая скорость распространения трехмерной волны вдоль оси x^* равна c^* и подлежит определению при решении задачи. В данном случае переменная x^* входит в решение только в комбинации $x^* - c^*t^*$. Полагаем, что длина волны много больше характерного размера дисперсных частиц ($\lambda \gg \alpha$) и высоты волны ($\lambda \gg \xi_{max}$). Последнее условие позволяет искать решение в виде разложения по малому амплитудному параметру

$$\varepsilon = k\xi_{max},$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Предполагаем, что волна периодическая по x^*, y^* и плоскость $z^* = 0$ проходит вдоль среднего уровня волновой поверхности. Это равносильно выполнению следующих условий (см. [5]):

$$\xi(t^*, x^* + \lambda_1, y^* + \lambda_2) = \xi(t^*, x^*, y^*), \quad \int_0^{\lambda_1} dx^* \int_0^{\lambda_2} \xi(t^*, x^*, y^*)dy^* = 0, \tag{2.1}$$

где λ_1 и λ_2 – длины волны в направлении осей x^* и y^* соответственно.

Обезразмерим переменные и величины, входящие в (1.4)–(1.6), (2.1), считая, что все волновые возмущения одного порядка малости ε:

$$\begin{gathered} t^* = t/(kc^*), \quad x^* = x/k, \quad y^* = y/k, \quad z^* = z/k, \quad l^* = l/k, \quad \rho_i^0 = \rho^0\mu_i, \\ R = \rho^0 kc_0 r, \quad \alpha' = \varepsilon\alpha_0\gamma, \quad \xi = \varepsilon\varsigma/k, \quad \mathbf{v}_i^* = \varepsilon c_0 \mathbf{v}_i, \quad p' = \varepsilon\rho^0 c_0^2 p, \quad c^* = c_0 c, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где c_0 – фазовая скорость, соответствующая линейной задаче. Подставляя (2.2) в (1.4)–(1.6), (2.1), получаем следующую нелинейную краевую задачу.

В области, занятой смесью, выполняются уравнения

$$-\alpha_0 c\frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1-\alpha_0)\left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\right) - \varepsilon\alpha_0\left[v_{1x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + v_{1y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + v_{1z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \gamma\left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\right)\right] = 0, \tag{2.3а}$$

$$c\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} + \varepsilon\left[v_{2x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + v_{2y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + v_{2z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \gamma\left(\frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z}\right)\right] = 0, \tag{2.3б}$$

$$\begin{gathered} \left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\right)c\frac{\partial v_{1s}}{\partial t} - \frac{1}{2}\mu_1\alpha_0 c\frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - r\alpha_0(v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} + \\ + \varepsilon\left[\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\right)\left(v_{1x}\frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1y}\frac{\partial v_{1s}}{\partial y} + v_{1z}\frac{\partial v_{1s}}{\partial z}\right) - r\alpha_0\gamma(v_{2s} - v_{1s}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\left(v_{2x}\frac{\partial v_{2s}}{\partial x} + v_{2y}\frac{\partial v_{2s}}{\partial y} + v_{2z}\frac{\partial v_{2s}}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\gamma c\left(\frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1s}}{\partial t}\right)\right] + \\ + \varepsilon^2\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\gamma\left(v_{1x}\frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1y}\frac{\partial v_{1s}}{\partial y} + v_{1z}\frac{\partial v_{1s}}{\partial z} - v_{2x}\frac{\partial v_{2s}}{\partial x} - v_{2y}\frac{\partial v_{2s}}{\partial y} - v_{2z}\frac{\partial v_{2s}}{\partial z}\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.3в}$$

$$\left(\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right)c\frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)c\frac{\partial v_{1s}}{\partial t} + r(1-\alpha_0)(v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} +$$

$$+\varepsilon\left[\left(\mu_2+\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right)\left(v_{2x}\frac{\partial v_{2s}}{\partial x}+v_{2y}\frac{\partial v_{2s}}{\partial y}+v_{2z}\frac{\partial v_{2s}}{\partial z}\right)-r\alpha_0\gamma(v_{2s}-v_{1s})-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\left(v_{1x}\frac{\partial v_{1s}}{\partial x}+v_{1y}\frac{\partial v_{1s}}{\partial y}+v_{1z}\frac{\partial v_{1s}}{\partial z}\right)-\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\gamma c\left(\frac{\partial v_{2s}}{\partial t}-\frac{\partial v_{1s}}{\partial t}\right)\right]+ \tag{2.3г}$$
$$+\varepsilon^2\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\gamma\left(v_{1x}\frac{\partial v_{1s}}{\partial x}+v_{1y}\frac{\partial v_{1s}}{\partial y}+v_{1z}\frac{\partial v_{1s}}{\partial z}-v_{2x}\frac{\partial v_{2s}}{\partial x}-v_{2y}\frac{\partial v_{2s}}{\partial y}-v_{2z}\frac{\partial v_{2s}}{\partial z}\right)=0,\quad s=x,y,z.$$

На свободной поверхности $z=\varepsilon\varsigma(t,x,y)$ заданы граничные условия

$$c\frac{\partial\varsigma}{\partial t}-(1-\alpha_0)v_{1z}-\alpha_0v_{2z}+$$
$$+\varepsilon\left\{\frac{\partial\varsigma}{\partial t}[(1-\alpha_0)v_{1x}+\alpha_0v_{2x}]-\alpha_0\gamma(v_{2z}-v_{1z})+\frac{\partial\varsigma}{\partial y}[(1-\alpha_0)v_{1y}+\alpha_0v_{2y}]\right\}+$$
$$+\varepsilon^2\alpha_0\gamma\left\{\frac{\partial\varsigma}{\partial x}(v_{2x}-v_{1x})+\frac{\partial\varsigma}{\partial y}(v_{2y}-v_{1y})\right\}=0, \tag{2.4}$$
$$p-\nu_0^2\varsigma+\varepsilon\alpha_0(\mu_1-\mu_2)\nu_0^2\gamma\varsigma=0,\quad \nu_0^2=g/(kc_0^2).$$

На дне $z=-l$ имеем

$$v_{iz}=0,\quad i=1,2. \tag{2.5}$$

Условия (2.1) в безразмерных величинах примут вид

$$\varsigma\left(t,x+\frac{2\pi}{\kappa_1},y+\frac{2\pi}{\kappa_2}\right)=\varsigma(t,x,y),\qquad \int_0^{2\pi/\kappa_1}dx\int_0^{2\pi/\kappa_2}\varsigma(t,x,y)dy=0, \tag{2.6}$$

где $\kappa_1=k_1/k=\lambda/\lambda_1$, $\kappa_2=k_2/k=\lambda/\lambda_2$, а волновые числа k_1 и k_2 связаны с λ_1 и λ_2 соотношениями $k_1=2\pi/\lambda_1$, $k_2=2\pi/\lambda_2$.

Граничные условия (2.4) заданы на неизвестной поверхности $z=\varepsilon\varsigma(t,x,y)$. Разложим неизвестные функции, входящие в (2.4), в ряд Тейлора в окрестности невозмущенной свободной поверхности $z=0$, например

$$v_{1z}=v_{1z}(t,x,y,0)+\left.\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\right|_{z=0}\varepsilon\varsigma+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2v_{1z}}{\partial z^2}\right|_{z=0}\varepsilon^2\varsigma^2+\ldots,$$

и подставим эти разложения в (2.4). Выпишем граничные условия при $z=0$ с точностью до ε^1:

$$c\frac{\partial\varsigma}{\partial t}-(1-\alpha_0)v_{1z}-\alpha_0v_{2z}+\varepsilon\left\{\frac{\partial\varsigma}{\partial x}[(1-\alpha_0)v_{1x}+\alpha_0v_{2x}]-\alpha_0\gamma(v_{2z}-v_{1z})+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varsigma}{\partial y}[(1-\alpha_0)v_{1y}+\alpha_0v_{2y}]-\varsigma\left[(1-\alpha_0)\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}+\alpha_0\frac{\partial v_{2z}}{\partial z}\right]\right\}=0, \tag{2.7}$$
$$p-\nu_0^2\varsigma+\varepsilon\varsigma\left[\alpha_0(\mu_1-\mu_2)\nu_0^2\gamma+\frac{\partial p}{\partial z}\right]=0.$$

Решение краевой задачи будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε:

$$\mathrm{v}_i=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\mathrm{v}_{ik},\quad p=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kp_k,\quad \gamma=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\gamma_k,\quad \varsigma=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\varsigma_k,\quad c=1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^kc_k. \tag{2.8}$$

Подставляя ряды (2.8) в (2.3), (2.5)–(2.7) и выписывая коэффициенты при ε^0 и ε^1, получаем системы уравнений и граничных условий для определения решения в первом и во втором приближениях соответственно. Для определения первого приближения имеем

$$\begin{gathered}-\alpha_0\frac{\partial\gamma_0}{\partial t}+(1-\alpha_0)\left(\frac{\partial v_{1x0}}{\partial x}+\frac{\partial v_{1y0}}{\partial y}+\frac{\partial v_{1z0}}{\partial z}\right)=0,\\ \frac{\partial\gamma_0}{\partial t}+\frac{\partial v_{2x0}}{\partial x}+\frac{\partial v_{2y0}}{\partial y}+\frac{\partial v_{2z0}}{\partial z}=0,\\ \left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\right)\frac{\partial v_{1s0}}{\partial t}-\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\frac{\partial v_{2s0}}{\partial t}-r\alpha_0(v_{2s0}-v_{1s0})+\frac{\partial p_0}{\partial s}=0,\\ \left(\mu_2+\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right)\frac{\partial v_{2s0}}{\partial t}-\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\frac{\partial v_{1s0}}{\partial t}+r(1-\alpha_0)(v_{2s0}-v_{1s0})+\frac{\partial p_0}{\partial s}=0,\quad s=x,y,z.\end{gathered}\tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\varsigma_0}{\partial t}=(1-\alpha_0)v_{1z0}+\alpha_0v_{2z0},\quad p_0-v_0^2\varsigma_0=0,\quad z=0,\tag{2.10}$$

$$v_{iz0}=0,\quad i=1,2,\quad z=-l,\tag{2.11}$$

$$\varsigma_0\left(t,x+\frac{2\pi}{\kappa_1},y+\frac{2\pi}{\kappa_2}\right)=\varsigma_0(t,x,y),\qquad\int\limits_0^{2\pi/\kappa_1}dx\int\limits_0^{2\pi/\kappa_2}\varsigma_0(t,x,y)dy=0.\tag{2.12}$$

Во втором приближении задача имеет вид

$$\begin{gathered}-\alpha_0\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}+(1-\alpha_0)\left(\frac{\partial v_{1x1}}{\partial x}+\frac{\partial v_{1y1}}{\partial y}+\frac{\partial v_{1z1}}{\partial z}\right)-\\ -\alpha_0\left[c_1\frac{\partial\gamma_0}{\partial t}+\gamma_0\left(\frac{\partial v_{1x1}}{\partial x}+\frac{\partial v_{1y1}}{\partial y}+\frac{\partial v_{1z1}}{\partial z}\right)+v_{1x0}\frac{\partial\gamma_0}{\partial x}+v_{1y0}\frac{\partial\gamma_0}{\partial y}+v_{1z0}\frac{\partial\gamma_0}{\partial z}\right]=0,\end{gathered}\tag{2.13а}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}+\frac{\partial v_{2x1}}{\partial x}+\frac{\partial v_{2y1}}{\partial z}+\frac{\partial v_{2z1}}{\partial z}+c_1\frac{\partial\gamma_0}{\partial t}+\\ +\gamma_0\left(\frac{\partial v_{2x1}}{\partial x}+\frac{\partial v_{2y1}}{\partial z}+\frac{\partial v_{2z1}}{\partial z}\right)+v_{2x0}\frac{\partial\gamma_0}{\partial x}+v_{2y0}\frac{\partial\gamma_0}{\partial y}+v_{2z0}\frac{\partial\gamma_0}{\partial z}=0,\end{gathered}\tag{2.13б}$$

$$\begin{gathered}\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\right)\frac{\partial v_{1s1}}{\partial t}-\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\frac{\partial v_{2s1}}{\partial t}-r\alpha_0(v_{2s1}-v_{1s1})+\frac{\partial p_1}{\partial s}+c_1\left[\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\right)\frac{\partial v_{1s0}}{\partial t}-\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\frac{\partial v_{2s0}}{\partial t}\right]+\\ +\left(\mu_1+\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\right)\left(v_{1x0}\frac{\partial v_{1s0}}{\partial x}+v_{1y0}\frac{\partial v_{1s0}}{\partial y}+v_{1z0}\frac{\partial v_{1s0}}{\partial z}\right)-r\alpha_0\gamma_0(v_{2s0}-v_{1s0})-\\ -\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\left(v_{2x0}\frac{\partial v_{2s0}}{\partial x}+v_{2y0}\frac{\partial v_{2s0}}{\partial y}+v_{2z0}\frac{\partial v_{2s0}}{\partial z}\right)-\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\gamma_0\left(\frac{\partial v_{2s0}}{\partial t}-\frac{\partial v_{1s0}}{\partial t}\right)=0,\end{gathered}\tag{2.13в}$$

$$\begin{gathered}\left[\mu_2+\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right]\frac{\partial v_{2s1}}{\partial t}-\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\frac{\partial v_{1s1}}{\partial t}+r(1-\alpha_0)(v_{2s1}-v_{1s1})+\frac{\partial p_1}{\partial s}+\\ +c_1\left[\left(\mu_2+\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right)\frac{\partial v_{2s0}}{\partial t}-\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\frac{\partial v_{1s0}}{\partial t}\right]+\\ +\left(\mu_2+\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right)\left(v_{2x0}\frac{\partial v_{2s0}}{\partial x}+v_{2y0}\frac{\partial v_{2s0}}{\partial y}+v_{2z0}\frac{\partial v_{2s0}}{\partial z}\right)-r\alpha_0\gamma_0(v_{2s0}-v_{1s0})-\end{gathered}\tag{2.13г}$$

$$-\frac{1}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\left(v_{1x0}\frac{\partial v_{1s0}}{\partial x}+v_{1y0}\frac{\partial v_{1s0}}{\partial y}+v_{1z0}\frac{\partial v_{1s0}}{\partial z}\right)-\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\gamma_0\left(\frac{\partial v_{2s0}}{\partial t}-\frac{\partial v_{1s0}}{\partial t}\right)=0,\quad s=x,y,z.$$

На свободной поверхности выполняются кинематическое и динамическое граничные условия

$$\frac{\partial\varsigma_1}{\partial t}-(1-\alpha_0)v_{1z1}-\alpha_0v_{2z1}+c_1\frac{\partial\varsigma_0}{\partial t}-\alpha_0\gamma_0(v_{2z0}-v_{1z0})+$$
$$+\frac{\partial\varsigma_0}{\partial x}[(1-\alpha_0)v_{1x0}+\alpha_0v_{2x0}]+\frac{\partial\varsigma_0}{\partial y}[(1-\alpha_0)v_{1y0}+\alpha_0v_{2y0}]=0, \tag{2.14}$$
$$p_1-v_0^2\varsigma_1+(\mu_1-\mu_2)v_0^2\gamma_0\varsigma_0+\frac{\partial p_0}{\partial z}\varsigma_0=0,\quad z=0.$$

На дне заданы условия непротекания

$$v_{iz1}=0,\quad i=1,2,\quad z=-l. \tag{2.15}$$

Функция $\varsigma_1(t,x,y)$ также должна удовлетворять условиям

$$\varsigma_1\left(t,x+\frac{2\pi}{\kappa_1},y+\frac{2\pi}{\kappa_2}\right)=\varsigma_1(t,x,y),\qquad \int\limits_0^{2\pi/\kappa_1}dx\int\limits_0^{2\pi/\kappa_2}\varsigma_1(t,x,y)dy=0. \tag{2.16}$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПЕРВОМ (ЛИНЕЙНОМ) ПРИБЛИЖЕНИИ

Определим решение линейной задачи (2.9)–(2.12). Исключая компоненты скоростей фаз из системы (2.9), получаем два уравнения для определения возмущений давления p_0 и концентрации γ_0:

$$\Delta p_0+\frac{3\alpha_0\mu_1}{2(1-\alpha_0)}\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial t^2}+\frac{\alpha_0 r}{1-\alpha_0}\frac{\partial\gamma_0}{\partial t}=0,\quad \Delta p_0-\frac{(\mu_1+2\mu_2)}{2}\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial t^2}-r\frac{\partial\gamma_0}{\partial t}=0. \tag{3.1}$$

Отсюда получаем уравнение для определения возмущения концентрации дисперсной фазы γ_0:

$$\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial t^2}+\frac{2r}{(\mu_1+2\mu)}\frac{\partial\gamma_0}{\partial t}=0,$$

где $\mu=(1-\alpha_0)\mu_2+\alpha_0\mu_1$. Решение этого уравнения в линейном приближении должно описывать возмущение концентрации, вызванное распространением волны установившегося вида. Волновые возмущения для прогрессивных незатухающих и затухающих волн задаются, соответственно, функциями (см. [5, 6]) $\gamma_0=X(x-t)Y(y)Z(z)$ и $\gamma_0=e^{-qt}X(x-t)Y(y)Z(z)$, причем $X(x-t)$ периодическая. Нетрудно показать, что решение уравнения для возмущения концентрации в виде последней функции возможно только при $X(x-t)\equiv 0$. Нетривиальное решение этого уравнения имеет вид $\gamma_0=e^{-qt}X(x)Y(y)Z(z)$ и не носит волнового характера. Поэтому возможно только тривиальное решение, что соответствует работе [2]:

$$\gamma_0=0. \tag{3.2}$$

Тогда из (3.1) для возмущения давления следует уравнение Лапласа

$$\Delta p_0=0. \tag{3.3}$$

Кроме уравнения (3.3), функция p_0 должна удовлетворять граничным условиям на свободной поверхности и дне. Из условий непротекания (2.11) и уравнений движения (2.9) следует условие на дне

$$\partial p_0/\partial z=0,\quad z=-l. \tag{3.4}$$

Из уравнений движения (2.9) и граничных условий на свободной поверхности (2.10) получаем условие для p_0 при $z=0$:

$$\frac{\partial^3 p_0}{\partial t^3}+\frac{2r}{\mu_1(1+2\mu_2)}\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2}+\frac{(\mu_1+2\mu)v_0^2\partial^2 p_0}{\mu_1(1+2\mu_2)\partial t\partial z}+\frac{2rv_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)}\frac{\partial p_0}{\partial z}=0. \tag{3.5}$$

Из условий (2.10) и (2.12) следуют условие периодичности и интегральное условие для p_0:

$$p_0\left(t, x+\frac{2\pi}{\kappa_1}, y+\frac{2\pi}{\kappa_2}, 0\right) = p_0(t, x, y, 0), \quad \int\limits_0^{2\pi/\kappa_1} dx \int\limits_0^{2\pi/\kappa_2} p_0(t, x, y, 0)dy = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, для определения функции p_0 имеем задачу (3.3)–(3.6). Решение уравнения Лапласа (3.3) находим в виде (см. [5], [6]) $p_0 = X(t, x-t)Y(t, y)Z(t, z)$. Функции $X = X(t, x-t)$, $Y = Y(t, y)$, $Z = Z(t, z)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$X_{xx} + m_1^2 X = 0, \quad Y_{yy} + m_2^2 Y = 0, \quad Z_{zz} - m^2 Z = 0,$$

где m_1, m_2, m – постоянные разделения и $m_1^2 + m_2^2 = m^2$. Из условия на дне (3.4) следует, что $Z_z(t, -l) = 0$. Тогда решения дифференциальных уравнений имеют вид

$$X = C_1(t)\sin[m_1(x-t)] + C_2(t)\cos[m_1(x-t)],$$
$$Y = C_3(t)\sin(m_2 y) + C_4(t)\cos(m_2 y), \quad Z = C_5(t)\mathrm{ch}[m(z+l)].$$

Для выполнения условия периодичности необходимо потребовать, чтобы $m_1 = \kappa_1 n$, $m_2 = \kappa_2 n$, $m = n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Условие $m_1^2 + m_2^2 = m^2$ выполнено в силу того, что λ_1 и λ_2 – длины волны в направлении осей координат, т.е. $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1$. Без ограничения общности можно положить $n = 1$ (см. [2]), т.е. $m_1 = \kappa_1$, $m_2 = \kappa_2$, $m = 1$.

Расписывая $\sin[\kappa_1(x-t)]$ и $\cos[\kappa_1(x-t)]$ и перегруппировывая сомножители, получаем

$$\begin{aligned} p_0 = {} & [K_1(t)\sin(\kappa_1 x) + K_2(t)\cos(\kappa_1 x)]\sin(\kappa_2 y)\mathrm{ch}(z+l) + \\ & + [K_3(t)\sin(\kappa_1 x) + K_4(t)\cos(\kappa_1 x)]\cos(\kappa_2 y)\mathrm{ch}(z+l), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$K_1(t) = C_3(t)C_5(t)[C_1(t)\cos(\kappa_1 t) + C_2(t)\sin(\kappa_1 t)],$$
$$K_2(t) = C_3(t)C_5(t)[C_2(t)\cos(\kappa_1 t) - C_1(t)\sin(\kappa_1 t)],$$
$$K_3(t) = C_4(t)C_5(t)[C_1(t)\cos(\kappa_1 t) + C_2(t)\sin(\kappa_1 t)],$$
$$K_4(t) = C_4(t)C_5(t)[C_2(t)\cos(\kappa_1 t) - C_1(t)\sin(\kappa_1 t)].$$

Подставляя (3.7) в (3.5) и приравнивая к нулю коэффициенты при синусах и косинусах, получаем четыре однородных дифференциальных уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами для определения неизвестных коэффициентов $K_i(t)$:

$$K_i'''(t) + \frac{2r}{\mu_1(1+2\mu_2)}K_i''(t) + \frac{(\mu_1+2\mu)\nu_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)}\mathrm{th}l \quad K_i'(t) + \frac{2r\nu_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)}\mathrm{th}l \quad K_i(t) = 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\theta^3 + \frac{2r}{\mu_1(1+2\mu_2)}\theta^2 + \frac{(\mu_1+2\mu)\nu_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)}\mathrm{th}l \quad \theta + \frac{2r\nu_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)}\mathrm{th}l = 0. \tag{3.8}$$

Отметим, что коэффициенты данного уравнения удовлетворяют критерию устойчивости Гурвица [7]. Кубическое уравнение (3.8) будем решать по формуле Кардано [8]. Пусть

$$Q = \frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}, \quad \psi = \frac{3\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)\nu_1^2\mathrm{th}l - 4r_1^2}{12\mu_1^2(1+2\mu_2)^2},$$

$$\chi = \frac{r_1}{54\mu_1^3(1+2\mu_2)^3}[4r_1^2 + 9\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1 - \mu + 3\mu_1\mu_2)\nu_1^2\mathrm{th}l].$$

Здесь для компактной записи введены новые величины, имеющие размерность скорости:

$$r_1 = c_0 r = R/(\rho^0 k), \quad \nu_1^2 = c_0^2\nu_0^2 = g/k.$$

При $Q > 0$ существует колебательное движение жидкости, так как в этом случае уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней. При $Q \le 0$ колебательного движения нет. Следовательно, условием существования волнового движения является выполнение условия $Q > 0$ или

$$64r_1^4 + 9\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)^3\nu_1^2\mathrm{th}^2 l +$$
$$+ 4r_1^2\nu_0^2\mathrm{th}\, l[27\mu_1^2(1+2\mu_2)^2 - 18\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu) - (\mu_1+2\mu)^2] > 0.$$

Для справедливости этого условия достаточным является выполнение неравенства $\psi > 0$ или

$$4r_1^2 - 3\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)\nu_1^2\mathrm{th}\, l < 0.$$

Комплексно-сопряженные корни уравнения (3.8) определяются как

$$\theta = -\frac{1}{c_0}\left[\left(-\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3} - \left(\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3} + \frac{2r_1}{3\mu_1(1+2\mu_2)}\right] \pm$$
$$\pm i\frac{\sqrt{3}}{c_0}\left[\left(-\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3}\right].$$

В случае распространения по свободной поверхности слоя прогрессивной волны необходимо выполнение равенства $\mathrm{Im}\,\theta = \kappa_1$ или

$$\frac{\sqrt{3}}{c_0}\left[\left(-\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3}\right] = \kappa_1. \tag{3.9}$$

Комплексно-сопряженным корням, для которых это равенство не выполнено, соответствуют стоячие волны с периодом $\tau = 2\pi/\mathrm{Im}\,\theta$. Уравнение (3.9) – это дисперсионное соотношение, из которого следует найти частоту волны $\omega = kc_0$ (или фазовую скорость c_0). Из (3.9) получаем

$$c_0 = \frac{\sqrt{3}}{\kappa_1}\left[\left(-\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3}\right].$$

Очевидно, что, вне зависимости от знака χ, $c_0 > 0$. Корни характеристического уравнения (3.8) можно записать в виде $\theta = -b \pm i\kappa_1$, где $b = \beta/(kc_0)$ – безразмерный декремент затухания волны. Размерный декремент β определяется выражением

$$\beta = k\left[\left(-\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3} - \left(\frac{\chi}{2}+\sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\right)^{1/3} + \frac{2r_1}{3\mu_1(1+2\mu_2)}\right], \tag{3.10}$$

которое, без учета силы присоединенных масс, полностью совпадает с декрементом затухания плоской волны [2], [3]. Подставляя $\theta = -b \pm i\kappa_1$ в уравнение (3.9), получаем выражение, связывающее квадрат фазовой скорости и декремент затухания волны:

$$c_0^2 = \frac{1}{\kappa_1^2}\left[\frac{\mu_1+2\mu}{\mu_1(1+2\mu_2)}\nu_1^2\mathrm{th}\, l + \frac{\beta}{k}\left(3\frac{\beta}{k} - \frac{4r_1}{\mu_1(1+2\mu_2)}\right)\right]. \tag{3.11}$$

Корням характеристического уравнения $\theta = -b \pm i\kappa_1$ соответствуют решения дифференциальных уравнений

$$K_i(t) = e^{-bt}[K_{i1}\sin(\kappa_1 t) + K_{i2}\cos(\kappa_1 t)],$$

где K_{i1}, K_{i2} – произвольные постоянные. Сравнивая эти выражения с (3.7), находим

$$K_1(t) = C_1e^{-bt}[C_4\sin(\kappa_1 t) + C_3\cos(\kappa_1 t)], \quad K_2(t) = C_1e^{-bt}[-C_3\sin(\kappa_1 t) + C_4\cos(\kappa_1 t)],$$
$$K_3(t) = C_2e^{-bt}[C_4\sin(\kappa_1 t) + C_3\cos(\kappa_1 t)], \quad K_4(t) = C_2e^{-bt}[-C_3\sin(\kappa_1 t) + C_4\cos(\kappa_1 t)],$$

где $C_i = \text{const}$. Подставляя эти функции в (3.7) и нормируя произвольные постоянные C_i (см. [5]):

$$\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \cos\eta_2, \quad \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = -\sin\eta_2, \quad \frac{C_4}{\sqrt{C_3^2+C_4^2}} = \cos\eta_1,$$

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_3^2+C_4^2}} = -\sin\eta_1, \quad \sqrt{C_1^2+C_2^2}\sqrt{C_3^2+C_4^2} = \frac{L}{\operatorname{sh} l},$$

получаем выражение для возмущения давления

$$p_0 = L\frac{e^{-bt}}{\operatorname{sh} l}\cos[\kappa_1(x-t+\eta_1)]\cos[\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{ch}(z+l). \tag{3.12}$$

Постоянные L, η_1, η_2 могут быть определены из начальной формы волны [5].

Из пятого и восьмого уравнений системы (2.9) находим уравнения для определения компонент скорости несущей v_{1z0} и дисперсной v_{2z0} фазы:

$$\frac{\partial v_{1z0}}{\partial t} = -\frac{\mu_2\alpha_0}{\mu_1(1-\alpha_0)}\frac{\partial v_{2z0}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_1(1-\alpha_0)}\frac{\partial p_0}{\partial z},$$

$$\mu_1(1+2\mu_2)\frac{\partial^2 v_{2z0}}{\partial t^2} + 2r\frac{\partial v_{2z0}}{\partial t} + 3\mu_1\frac{\partial^2 p_0}{\partial t\partial z} + 2r\frac{\partial p_0}{\partial z} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения p_0 из (3.12), находим

$$v_{iz0} = L\frac{e^{-bt}}{\operatorname{sh} l}\{M_i\sin[\kappa_1(x-t+\eta_1)] - N_i\cos[\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\cos[\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{sh}(z+l), \quad i = 1, 2,$$

где

$$M_1 = \frac{\kappa_1}{b^2+\kappa_1^2}[1+2(b^2+\kappa_1^2)\mu_1\mu_2(1-\mu_1)(1+2\mu_2)/d],$$

$$M_2 = \frac{\kappa_1}{b^2+\kappa_1^2}[1+2(b^2+\kappa_1^2)\mu_1^2(1-\mu_2)(1+2\mu_2)/d],$$

$$N_1 = \frac{1}{b^2+\kappa_1^2}\{-b+2(b^2+\kappa_1^2)\mu_2(1-\mu_1)[2r-b\mu_1(1+2\mu_2)]/d\},$$

$$N_2 = \frac{1}{b^2+\kappa_1^2}\{-b+2(b^2+\kappa_1^2)\mu_1(1-\mu_2)[2r-b\mu_1(1+2\mu_2)]/d\},$$

$$d = (2r-b\mu_1(1+2\mu_2))^2 + \kappa_1^2\mu_1^2(1+2\mu_2)^2.$$

Аналогично определяются и функции v_{ix0} и v_{iy0}:

$$v_{ix0} = \kappa_1 L\frac{e^{-bt}}{\operatorname{sh} l}\{N_i\sin[\kappa_1(x-t+\eta_1)] + M_i\cos[\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\cos[\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{ch}(z+l),$$

$$v_{iy0} = \kappa_2 L\frac{e^{-bt}}{\operatorname{sh} l}\{-M_i\sin[\kappa_1(x-t+\eta_1)] + N_i\cos[\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\sin[\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{ch}(z+l), \quad i = 1, 2.$$

Из динамического условия (2.10) находим форму свободной поверхности:

$$\varsigma_0 = L\frac{\operatorname{cth} l}{v_0^2}e^{-bt}\cos[\kappa_1(x-t+\eta_1)]\cos[\kappa_2(y+\eta_2)].$$

Таким образом, найдено решение линейной задачи в виде затухающих прогрессивных волн. В случае плоских волн и отсутствия силы присоединенных масс все найденные выше выражения совпадают с полученными в работе [2].

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Чтобы получить решение во втором приближении, необходимо в (2.13)–(2.16) подставить решение линейной задачи. В результате получается система линейных неоднородных уравнений в частных производных с граничными условиями. Не выписывая систему ввиду ее громоздкости, приводим решение, которое было получено аналогично первому приближению через краевую задачу для функции p_1:

$$c_1 = 0,$$

$$\gamma_1 = \frac{L^2}{\operatorname{sh}^2 l}e^{-2bt}(\{\kappa_1^4+\kappa_2^4\operatorname{ch}[2(z+l)]+\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\}\{S_4\sin[2\kappa_1(x-y+\eta_1)]+$$

$$+K_4\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}+L_4\{\operatorname{ch}[2(z+l)]+(\kappa_1^4\operatorname{ch}[2(z+l)]+\kappa_2^4)\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\}),$$

$$v_{ix1} = \kappa_1 L^2\frac{e^{-2bt}}{\operatorname{sh}^2 l}(\{(q_iU+h_iW)\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+(q_iW-h_iU)\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\times$$

$$\times\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{ch}[2(z+l)]+\{K_i\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]-S_i\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\times$$

$$\times\{\kappa_1^2-\kappa_2^2\operatorname{ch}[2(z+l)]+\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\}+\{(q_iQ_1+h_iQ_2)\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+$$

$$+(q_iQ_2-h_iQ_1)\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\operatorname{ch}[2\kappa_1(z+l)]),$$

$$v_{iy1} = \kappa_2 L^2\frac{e^{-2bt}}{\operatorname{sh}^2 l}(\{(h_iU-q_iW)\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+(q_iU+h_iW)\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\operatorname{sh}[2(z+l)]+$$

$$+L_i\{\kappa_2^2-\kappa_1^2\operatorname{ch}[2(z+l)]\}+S_i\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+$$

$$+K_i\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]-G_i\operatorname{ch}[2\kappa_2(z+l)])\sin[2\kappa_2(y+\eta_2)],$$

$$v_{iz1} = L^2\frac{e^{-2bt}}{\operatorname{sh}^2 l}(\{(q_iW-h_iU)\sin([2\kappa_1(x-t+\eta_1)]-(q_iU+h_iW)\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)])\}\times$$

$$\times\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{sh}[2(z+l)]+(L_i\{\kappa_1^2\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]+1\}+$$

$$+\kappa_2^2\{S_i\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+K_i\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\})\operatorname{sh}[2(z+l)]+$$

$$+\kappa_1\{(q_iQ_2-h_iQ_1)\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]-(q_iQ_1+h_iQ_2)\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\operatorname{sh}[2\kappa_1(z+l)]+$$

$$+\kappa_2G_i\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{sh}[2\kappa_2(z+l)]),$$

$$p_1 = L^2\frac{e^{-2bt}}{\operatorname{sh}^2 l}(\{U\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+W\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{ch}[2(z+l)]+$$

$$+\{S_3\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+K_3\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\{\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]+\kappa_1^2-\kappa_2^2\operatorname{ch}[2(z+l)]\}+$$

$$+L_3\{\operatorname{ch}[2(z+l)]+\{\kappa_1^2\operatorname{ch}[2(z+l)]-\kappa_2^2\}\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\}+$$

$$+\{Q_1\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+Q_2\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]\}\operatorname{ch}[2\kappa_1(z+l)]+$$

$$+Q_3\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\operatorname{ch}[2\kappa_2(z+l)]+Q_4),$$

$$\varsigma_1 = L^2e^{-2bt}(\{\Phi_1+\Phi_2\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\}\sin[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+$$

$$+\{\Psi_1+\Psi_2\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]\}\cos[2\kappa_1(x-t+\eta_1)]+F\cos[2\kappa_2(y+\eta_2)]).$$

Коэффициенты, входящие в решение, определяются следующими выражениями:

$$S_1 = -\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}S_2, \quad K_1 = -\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}K_2, \quad L_1 = -\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}L_2, \quad L_2 = \frac{(1-\alpha_0)H_3}{8[r-b(\mu_1+2\mu)]},$$

$$S_2 = \frac{(1-\alpha_0)}{8d_2}\{-\kappa_1(\mu_1+2\mu)H_1-[r-b(\mu_1+2\mu)]H_2\},$$

$$K_2 = \frac{(1-\alpha_0)}{8d_2}\{[r-b(\mu_1+2\mu)]H_1-\kappa_1(\mu_1+2\mu)H_2\},$$

$$L_3 = \frac{-(1-\alpha_0)[\mu_1 r-b\mu_1(1+2\mu_2)](M_1^2+N_1^2)-\alpha_0[\mu_2 r-b\mu_1(1+2\mu_2)](M_2^2+N_2^2)}{8[r-b(\mu_1+2\mu)]},$$

$$L_4 = \frac{(1-\alpha_0)H_3}{8b[r-b(\mu_1+2\mu)]}, \quad Q_4 = -\frac{\operatorname{sh}2l}{8\nu_0^2}-L_3\operatorname{ch}2l,$$

$$S_3 = \frac{1}{8d_2}(\kappa_1\alpha_0(1-\alpha_0)(\mu_2-\mu_1)rH_1-2M_1N_1(1-\alpha_0)\{[\mu_1 r-b\mu_1(1+2\mu_2)]\times$$

$$\times[r-b(\mu_1+2\mu)]+\kappa_1^2\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)\}-$$

$$-2M_2N_2\alpha_0\{[\mu_2 r-b\mu_1(1+2\mu_2)][r-b(\mu_1+2\mu)]+\kappa_1^2\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)\}),$$

$$K_3 = \frac{1}{8d_2}(\kappa_1\alpha_0(1-\alpha_0)(\mu_2-\mu_1)rH_2+(N_1^2-M_1^2)(1-\alpha_0)\{[\mu_1 r-b\mu_1(1+2\mu_2)]\times$$

$$\times[r-b(\mu_1+2\mu)]+\kappa_1^2\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)\}+$$

$$+(N_2^2-M_2^2)\alpha_0\{[\mu_2 r-b\mu_1(1+2\mu_2)][r-b(\mu_1+2\mu)]+\kappa_1^2\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu)\}),$$

$$S_4 = \frac{(1-\alpha_0)\{\kappa_1[r-2b(\mu_1+2\mu)]H_1-[br+(\kappa_1^2-b^2)(\mu_1+2\mu)]H_2\}}{8(b^2+\kappa_1^2)d_2},$$

$$G_1 = \frac{r-b(\mu_1+2\mu_2)}{b(r-b(\mu_1+2\mu))}Q_3, \quad G_2 = \frac{r-3b\mu_1}{b(r-b(\mu_1+2\mu))}Q_3,$$

$$K_4 = \frac{(1-\alpha_0)\{[br+(\kappa_1^2-b^2)(\mu_1+2\mu)]H_1+\kappa_1[r-2b(\mu_1+2\mu)]H_2\}}{8(b^2+\kappa_1^2)d_2},$$

$$Q_1 = \frac{(b^2+\kappa_1^2)^2}{2\Delta_1}\{4S_3[\kappa_2^2\operatorname{ch}(2l)-\kappa_1^2][2\operatorname{ch}(2\kappa_1 l)(b^2+\kappa_1^2)^2-\delta_1\kappa_1\nu_0^2\operatorname{sh}(2\kappa_1 l)]+$$

$$+\delta_2\kappa_1\operatorname{sh}(2\kappa_1 l)[4v_0^2(\kappa_2^2\operatorname{ch}(2l)-\kappa_1^2)K_3-(\kappa_2^2\operatorname{sh}^2 l-\kappa_1^2)\operatorname{cth}l]\},$$

$$Q_2 = \frac{(b^2+\kappa_1^2)^2}{2v_0^2\Delta_1}\{-4v_0^4\delta_2\kappa_1\operatorname{sh}(2\kappa_1 l)S_3[\kappa_2^2\operatorname{ch}(2l)-\kappa_1^2]+$$

$$+[2\operatorname{ch}(2\kappa_1 l)(b^2+\kappa_1^2)^2-\delta_1\kappa_1\nu_0^2\operatorname{sh}(2\kappa_1 l)][4\nu_0^2(\kappa_2^2\operatorname{ch}(2l)-\kappa_1^2)K_3-(\kappa_2^2\operatorname{sh}^2 l-\kappa_1^2)\operatorname{cth}l]\},$$

$$Q_3 = \frac{b^2[r-b\mu_1(1+2\mu_2)]\{4\nu_0^2[\kappa_2^2-\kappa_1^2\operatorname{ch}(2l)]L_3+(\kappa_2^2-\kappa_1^2\operatorname{sh}^2 l)\operatorname{cth}l\}}{2\nu_0^2\{2b^2[r-b\mu_1(1+2\mu_2)]\operatorname{ch}(2\kappa_2 l)+\kappa_2\nu_0^2[r-b(\mu_1+2\mu)]\operatorname{sh}(2\kappa_2 l)\}},$$

$$U = \frac{(b^2+\kappa_1^2)^2}{2\Delta_2}\{\delta_2\operatorname{sh}(2l)(\operatorname{cth}l-4v_0^2K_3)-4S_3[2(b^2+\kappa_1^2)^2\operatorname{ch}(2l)-\delta_1 v_0^2\operatorname{sh}(2l)]\},$$

$$W = \frac{(b^2+\kappa_1^2)^2}{2v_0^2\Delta_2}\{[2(b^2+\kappa_1^2)^2\mathrm{ch}(2l)-\delta_1 v_0^2\mathrm{sh}(2l)](\mathrm{cth}\,l-4v_0^2K_3)+4\delta_2 v_0^4\mathrm{sh}(2l)S_3\},$$

$$\Phi_1 = \frac{\kappa_1\mathrm{sh}(2\kappa_1 l)}{\mathrm{sh}(2l)}\frac{(\delta_1 Q_1+\delta_2 Q_2)\mathrm{cth}\,l}{(b^2+\kappa_1^2)^2},\quad \Phi_2 = \frac{(\delta_1 U+\delta_2 W)\mathrm{cth}\,l}{(b^2+\kappa_1^2)^2},$$

$$\Psi_1 = \frac{\kappa_1\mathrm{sh}(2\kappa_1 l)}{\mathrm{sh}(2l)}\frac{(\delta_1 Q_2-\delta_2 Q_1)\mathrm{cth}\,l}{(b^2+\kappa_1^2)^2}+\frac{\kappa_1^2\mathrm{cth}^3 l}{4v_0^4},\quad \Psi_2 = \frac{(\delta_1 W-\delta_2 U)\mathrm{cth}\,l}{(b^2+\kappa_1^2)^2}+\frac{\mathrm{cth}^3 l}{4v_0^4},$$

$$F = \frac{\kappa_2^2\mathrm{cth}^3 l}{4v_0^4}-\frac{\kappa_2\mathrm{sh}(2\kappa_2 l)}{\mathrm{sh}(2l)}\frac{[r-b(\mu_1+2\mu)]\mathrm{cth}\,l}{b^2[r-b\mu_1(1+2\mu_2)]}Q_3,$$

$$q_1 = \frac{\kappa_1}{b^2+\kappa_1^2}[1+2(b^2+\kappa_1^2)\mu_1\mu_2(1-\mu_1)(1+2\mu_2)/d_1],$$

$$q_2 = \frac{\kappa_1}{b^2+\kappa_1^2}[1+2(b^2+\kappa_1^2)\mu_1^2(1-\mu_2)(1+2\mu_2)/d_1],$$

$$h_1 = \frac{1}{b^2+\kappa_1^2}\{-b+2(b^2+\kappa_1^2)\mu_2(1-\mu_1)[r-b\mu_1(1+2\mu_2)]/d_1\},$$

$$h_2 = \frac{1}{b^2+\kappa_1^2}\{-b+2(b^2+\kappa_1^2)\mu_1(1-\mu_2)[r-b\mu_1(1+2\mu_2)]/d_1\},$$

$$d_1 = [r-b\mu_1(1+2\mu_2)]^2+\kappa_1^2\mu_1^2(1+2\mu_2)^2,\quad d_2 = [r-b(\mu_1+2\mu)]^2+\kappa_1^2(\mu_1+2\mu)^2,$$

$$\Delta_1 = 4(b^2+\kappa_1^2)^4\mathrm{ch}^2(2\kappa_1 l)+\kappa_1^2\nu_0^4(\delta_1^2+\delta_2^2)\mathrm{sh}^2(2\kappa_1 l)-2\kappa_1\delta_1\nu_0^2(b^2+\kappa_1^2)^2\mathrm{sh}(4\kappa_1 l),$$

$$\Delta_2 = 4(b^2+\kappa_1^2)^4\mathrm{ch}^2(2l)+\nu_0^4(\delta_1^2+\delta_2^2)\mathrm{sh}^2(2l)-2\delta_1\nu_0^2(b^2+\kappa_1^2)^2\mathrm{sh}(4l),$$

$$\delta_1 = \kappa_1^2-b^2+2(b^2+\kappa_1^2)(\mu-\mu_1\mu_2)[br+(\kappa_1^2-b^2)\mu_1(1+2\mu_2)]/d_1,$$

$$\delta_2 = -2\kappa_1 b+2\kappa_1(b^2+\kappa_1^2)(\mu-\mu_1\mu_2)[r-2b\mu_1(1+2\mu_2)]/d_1.$$

Таким образом, получено решение задачи во втором приближении. Все коэффициенты этих функций определены через постоянные L, η_1, η_2, которые могут быть найдены из дополнительных начальных данных. Поправка к фазовой скорости во втором приближении равна нулю, что соответствует классическим решениям [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из найденного решения нетрудно получить выражения для волновых возмущений и формы свободной поверхности в случае плоских волн, распространяющихся в направлении оси x^*. Для этого в найденных выше формулах необходимо положить $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$ или $k_1 = k$, $k_2 = 0$. При этом выражения для декремента затухания и фазовой скорости волны в отсутствие силы присоединенных масс полностью совпадают с полученными в работе [2].

Проанализируем, как и в [2], влияние наличия примесей на фазовую скорость пространственной волны. Для этого формулу (3.11) запишем в виде

$$c_0^2 = c_g^2+c_d^2+c_r^2,$$

где

$$c_g^2 = \nu_1^2\frac{\mathrm{th}\,l}{\kappa_1^2} = \frac{gk\,\mathrm{th}(kl^*)}{k_1^2},$$

$$c_d^2 = \nu_1^2 \frac{\mathrm{th}\, l}{\kappa_1^2} \frac{2(\mu - \mu_1\mu_2)}{\mu_1(1+2\mu_2)} = \frac{2\alpha_0(1-\alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)^2}{\rho_1^0(\rho^0 + 2\rho_2^0)} \frac{gk\,\mathrm{th}(kl^*)}{k_1^2},$$

$$c_r^2 = \frac{1}{\kappa_1^2}\frac{\beta}{k}\left(3\frac{\beta}{k} - \frac{4r_1}{\mu_1(1+2\mu_2)}\right) = \frac{\beta}{k_1^2}\left(3\beta - \frac{4R\rho^0}{\rho_1^0(\rho^0 + 2\rho_2^0)}\right).$$

Здесь c_g^2 – квадрат фазовой скорости пространственной гравитационной волны (см. [5]); $c_d^2 \geq 0$ – добавка к фазовой скорости за счет наличия дисперсной фазы; c_r^2 – добавка, обусловленная силами межфазного взаимодействия. Добавка c_d^2 увеличивает значение фазовой скорости по сравнению с c_g^2, она зависит от разности плотностей фаз и концентрации примеси. Наибольшее значение c_d^2 достигает при $\alpha_0 = 1/2$, наименьшее – при $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = 1$ (моносреда). Если рассматривать c_d^2 как функцию от ρ_2^0/ρ_1^0, то наименьшее значение $c_d^2(\rho_2^0/\rho_1^0)$ достигает при $\rho_2^0 = \rho_1^0$. С увеличением разницы между истинными плотностями фаз c_d^2 возрастает. Функция $c_r^2(\beta)$ отрицательна при $0 < \beta < 4R/[3\rho_1^0(\rho^0 + 2\rho_2^0)]$. Так как в рассматриваемой модели β не может превысить этого значения (плотности фаз сильно не различаются), то $c_r^2 \leq 0$ и, следовательно, силы межфазного трения уменьшают значение фазовой скорости пространственной волны.

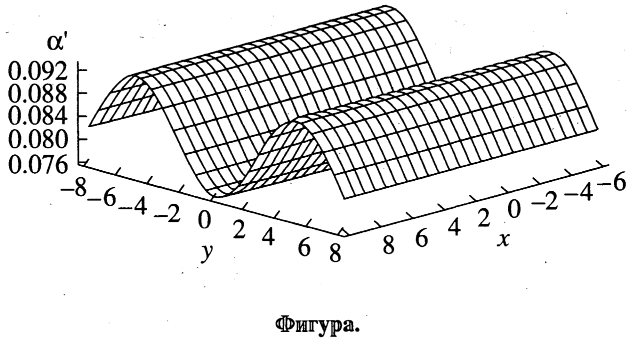
Возмущение концентрации $\alpha' = \alpha_0\varepsilon^2\gamma_1$ имеет порядок малости ε^2, т.е. является величиной более низкого порядка по сравнению с остальными волновыми возмущениями. Если отбросить малые слагаемые, то α' можно записать в виде

$$\alpha' = \varepsilon^2\alpha_0 \frac{L^2}{\mathrm{sh}^2(kl^*)}\exp(-2\beta t^*)\left(L_4\left\{\frac{k_1^4}{k^4}\cos[2k_2(y^* + \eta_2^*)] + 1\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_2^4}{k^4}\{S_4\sin[2k_1(x^* - c_0t^* + \eta_1^*)] + K_4\cos[2k_1(x^* - c_0t^* + \eta_1^*)]\}\right)\mathrm{ch}[2k(z^* + l^*)],$$

где $\eta_i^* = \eta_i/k$. Наибольшего абсолютного значения α' достигает вблизи свободной поверхности, возмущение концентрации уменьшается с глубиной и принимает наименьшее значение на горизонтальной поверхности основания. На фигуре представлен график, иллюстрирующий изменение концентрации $\alpha_2 = \alpha_0 + \alpha_0\varepsilon^2\gamma_1$ вблизи свободной поверхности. На заглубленном слое график имеет аналогичный вид, только амплитуда колебаний концентрации становится меньше. Расчеты выполнены для среды с параметрами $\rho_1^0 = 1000$ кг/м^3, $\rho_2^0 = 500$ кг/м^3, $\eta = 1.004 \times 10^{-3}$ кг/(м с), $a = 0.25 \times 10^{-2}$ м, $\alpha_0 = 0.1$, $l^* = 100$ м, $\lambda = 10$ м, $\lambda_1 = 11.54$ м, $\lambda_2 = 20$ м.

Полученные результаты позволяют оценить влияние примесей на распространение волны, формулы (3.10), (3.11) задают зависимости основных параметров волны от концентрации дисперсной фазы. С другой стороны, из найденных выражений можно определить объемное содер-



Фигура.

жание примесей по параметрам волны. Формулу для приближенного расчета концентрации примесей можно получить из (3.11):

$$\alpha_0 = \frac{\rho_1^0(\rho^0 + 2\rho_2^0)[\kappa_1^2\omega^2 - 3\beta^2 - gk\,\mathrm{th}(kl)] + 4R\beta}{2gk\,\mathrm{th}(kl)(\rho_1^0 - \rho_2^0)}.$$

Здесь декремент затухания волны можно взять максимально возможным, т.е. $\beta = 4R/[3\rho_1^0(\rho^0 + + 2\rho_2^0)]$. Это выражение задает зависимость α_0 от частоты и декремента затухания волны, поэтому может служить основой для волнового метода оценки степени загрязнения водных бассейнов однородными примесями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Louared M., Saidi A.* Pointwise control a particle analysis for parabolic equation// Proc. 7-th Int. Symp. Fluid Dyn., Beijing, Sept. 15–19, 1997. P. 228–234.
2. *Баринов В.А., Бутакова Н.Н.* Волны на свободной поверхности двухфазной среды // Прикл. механ. и техн. физика. 2002. Т. 43. № 4. С. 27–35.
3. *Баринов В.А., Бутакова Н.Н.* Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Тр. Средневолжского матем. об-ва. 2002. Т. 3–4. № 1. С. 47–53.
4. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
5. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
6. *Баринов В.А.* Решение уравнений плоского установившегося движения жидкости// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 1. С. 130–134.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теорий функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.