УДК 517.958:531.32

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

© 2001 г. **В. А. Баринов**

(625003 Тюмень, ул. Семакова, 10, ТюмГУ)

Поступила в редакцию 26.02.99 г.

Получено аналитическое решение полной нелинейной системы уравнений плоского установившегося движения идеальной жидкости, в которое входят и потенциальные, и вихревые решения. Найдено решение для вихревого движения, которое является точным решением исходной системы кинематических уравнений. Показано, что из полученных выражений следуют известные результаты.

ВВЕДЕНИЕ

В гидродинамике плоскопараллельного движения жидкости хорошо развита теория потенциальных течений (когда скорость жидкости представима как градиент скалярного потенциала), так как в этом случае можно ввести комплексный потенциал и использовать методы теории функций комплексного переменного [1]. Вихревые движения исследуют, как правило, отдельно от потенциальных. Общее же течение определяют как сумму потенциального и вихревого, что, в общем, необоснованно в силу нелинейности исходных уравнений. Целью данной работы является определение точного аналитического решения полной нелинейной системы кинематических уравнений плоского установившегося движения идеальной жидкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Установившееся движение идеальной, несжимаемой жидкости, происходящее под действием потенциальных сил, описывается уравнениями неразрывности и Гельмгольца (см. [1])

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V}) = (\operatorname{rot}\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} - (\mathbf{V}\nabla)\operatorname{rot}\mathbf{V} = 0, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{V}$ – вектор скорости, ∇ – оператор. Если потенциал внешних сил задан, то давление жидкости определяется по найденному полю скоростей из интеграла Бернулли [1].

Рассмотрим плоскопараллельное движение жидкости в декартовой системе координат XY. Тогда $\mathbf{V} = (u(x, y);\ v(x, y);\ 0)$, а векторные уравнения (1.1) можно записать в координатной форме:

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0, \tag{1.2}$$

$$u\partial\Omega/\partial x + v\partial\Omega/\partial y = 0, \quad \Omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y. \tag{1.3}$$

Здесь Ω – вихрь поля скоростей. Из системы (1.2), (1.3) подстановкой первого уравнения во второе можно получить разрешающее уравнение:

$$u\Delta v - v\Delta u = 0, \tag{1.4}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа. Левая часть этого уравнения является подынтегральным выражением второй формулы Грина [2]. Уравнение (1.4) можно представить в виде системы двух уравнений для функций u и v:

$$\Delta u - f(x, y)u = 0, \quad \Delta v - f(x, y)v = 0. \tag{1.5}$$

Здесь $f(x, y)$ – новая неизвестная функция, при $f(x, y) = \mathrm{const}$ уравнения (1.5) переходят в уравнения Гельмгольца, при $f(x, y) = 0$ – в уравнения Лапласа.

Таким образом, для плоскопараллельного движения жидкости получены две замкнутые системы кинематических уравнений: первая – уравнения (1.2), (1.4); вторая – уравнения (1.2), (1.5). Целью данной работы является определение решений системы уравнений (1.2), (1.4) без предположений только потенциального ($\mathbf{V} = \nabla\varphi$) или только вихревого ($\mathbf{V} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$) движения.

Прежде чем перейти к определению решения системы (1.2), (1.4), укажем условие потенциальности поля скоростей, которое понадобится для получения частных решений. В работе [3] показано, что не только необходимым, но и достаточным условием существования потенциала движения является гармоничность одной из компонент скорости жидкости.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Будем искать нетривиальное решение системы уравнений (1.2), (1.4) в виде:

$$u(x, y) = X_1(x)Y_1(y), \quad v(x, y) = X_2(x)Y_2(y). \tag{2.1}$$

Тогда из уравнений (1.2), (1.4), соответственно, получаем:

$$X_1'/X_2 + Y_2'Y_1 = 0, \quad X_2''/X_2 + Y_2''/Y_2 - X_1''/X_1 - Y_1''/Y_1 = 0.$$

Здесь и далее штрихами обозначены полные производные по соответствующим переменным. Вводя постоянные разделения a и b, получаем системы обыкновенных уравнений, соответственно, для x-х и y-х составляющих:

$$X_1' = -aX_2, \quad X_2''/X_2 - X_1''/X_1 = b, \tag{2.2}$$

$$Y_2' = -aY_1, \quad Y_1''/Y_1 - Y_2''/Y_2 = b. \tag{2.3}$$

Методом исключения эти системы сводятся к двум нелинейным уравнениям третьего порядка:

$$X_1'''/X_1' - X_1''/X_1 = b, \quad Y_2'''/Y_2' - Y_2''/Y_2 = b. \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что x-я составляющая функции u и y-я – функции v удовлетворяют одному и тому же уравнению. Поэтому достаточно найти решение первого уравнения. Если выделить в левой части первого уравнения (2.4) производную частного X_1''/X_1, то получим уравнение, допускающее понижение порядка $(X''/X_1 - b\ln X_1)' = 0$, откуда

$$X_1''/X_1 = C_1 + b\ln X_1, \tag{2.5}$$

где C_1 – постоянная интегрирования. Уравнение (2.5) не содержит явно переменную, поэтому, принимая X_1' за новую искомую функцию, его можно свести к уравнению первого порядка

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dX_1}(X_1')^2 = X_1(C_1 + b\ln X_1),$$

которое легко интегрируется:

$$(X_1')^2 = X_1^2[C_1 + b(\ln X_1 - 1/2)] + C_2. \tag{2.6}$$

Здесь C_2 – постоянная интегрирования. Интеграл уравнения (2.6) можно записать в виде

$$x + C_3 = \mp\int\frac{dX_1}{\{C_2 + [C_1 - b(1/2 - \ln X_1)]X_1^2\}^{1/2}}. \tag{2.7}$$

Из первого уравнения системы (2.2) и выражения (2.6) находим X_2:

$$X_2 = \pm\frac{1}{a}\{C_2 + [C_1 - b(1/2 - \ln X_1)]X_1^2\}^{1/2}. \tag{2.8}$$

Как было показано выше, Y_2 удовлетворяет такому же уравнению, что и X_1. Поэтому, с учетом первого уравнения системы (2.3), для Y_1 и Y_2 получаем выражения

$$y + D_3 = \mp\int\frac{dY_2}{\{D_2 + [D_1 - b(1/2 - \ln Y_2)]Y_2^2\}^{1/2}}, \tag{2.9}$$

$$Y_1 = \mp\frac{1}{a}\{D_2 + [D_1 - b(1/2 - \ln Y_2)]Y_2^2\}^{1/2}. \tag{2.10}$$

Здесь D_1, D_2, D_3 – новые постоянные интегрирования, (C_3, D_3) – начальные координаты жидкой частицы. Используя формулы (2.8), (2.10), можно выписать выражение для квадрата величины скорости: так как $V^2 = u^2 + v^2 = X_1^2Y_1^2 + X_2^2Y_2^2$, то

$$V^2 = \frac{1}{a^2}\{(D_2X_1^2 + C_2Y_2^2) + (C_1 + D_1)X_1^2Y_2^2 - b[1 - \ln(X_1^2Y_2^2)]X_1^2Y_2^2\}. \tag{2.11}$$

Из вида полученных выражений (2.7)–(2.11) следуют размерности входящих в них постоянных:

$$[b] = [C_1] = [D_1] = 1/L^2, \quad [C_2] = [D_2] = 1/LT, \quad [1/a] = [C_3] = [D_3] = L, \tag{2.12}$$

где L – длина, T – время. Кроме того, C_2 и D_2 должны удовлетворять неравенствам $C_2 \ge 0$, $D_2 \ge 0$.

Конкретный вид констант, входящих в полученные выражения, определяется из граничных и дополнительных условий конкретных краевых задач. Однако анализ найденного решения в частных случаях позволяет получить некоторые общие свойства этих неизвестных постоянных и уменьшить их число. Полученное решение справедливо для общих движений жидкости, которые содержат в себе и потенциальные и вихревые движения, поэтому целесообразно проанализировать эти случаи отдельно.

3. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ И ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Если движение потенциальное, то уравнение (1.4) вырождается в два уравнения Лапласа для функций u и v. При решении этих уравнений методом разделения переменных получаются уравнения типа (2.5), если в них положить $b = 0$, причем $D_1 = -C_1$. Решениями этих уравнений будут либо тригонометрические функции (если за собственное значение взять $-\sqrt{|C_1|}$), либо гиперболические функции (если собственным значением будет $+\sqrt{|C_1|}$). Такие собственные функции можно получить непосредственно из формул (2.7)–(2.10). Полагая в них $b = 0$, $C_3 = D_3 = 0$ (для простоты выражений), $D_1 = -C > 0$ (движение периодическое по переменной x), получаем

$$x = \mp\frac{1}{\sqrt{|C_1|}}\int\frac{dX_1}{\sqrt{C^2 - X_1^2}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{|C_1|}}\int\frac{dY_2}{\sqrt{D^2 + Y_2^2}},$$

$$X_2 = \pm\frac{\sqrt{|C_1|}}{a}\sqrt{C^2 - X_1^2}, \quad Y_1 = \mp\frac{\sqrt{|C_1|}}{a}\sqrt{D^2 + Y_2^2},$$

где $C^2 = C_2/|C_1|$, $D^2 = D_2/|C_1|$. Отсюда для верхнего знака перед интегралами находим

$$u = \frac{C_2D_2}{a\sqrt{|C_1|}}\cos(\sqrt{|C_1|}x)\operatorname{ch}(\sqrt{|C_1|}y), \quad v = \frac{C_2D_2}{a\sqrt{|C_1|}}\sin(\sqrt{|C_1|}x)\operatorname{sh}(\sqrt{|C_1|}y),$$
$$\varphi = \frac{C_2D_2}{a|C_1|}\sin(\sqrt{|C_1|}x)\operatorname{ch}(\sqrt{|C_1|}y). \tag{3.1}$$

Последнее выражение, если $\sqrt{|C_1|} = kn$ (k – волновое число, $n \in \mathbb{Z}$), совпадает с потенциалом волнового движения жидкости при распространении по свободной поверхности прогрессивных волн [1]. Для нижнего знака перед интегралами получается решение $\varphi = -[C_2D_2/(a|C_1|)]\cos(\sqrt{|C_1|}\,x)\operatorname{ch}(\sqrt{|C_1|}\,y)$. Из этого частного случая следует, что члены с множителем b в выражениях (2.7)–(2.11) обусловлены вихревым движением жидкости, а постоянные C_1, D_1, C_2, D_2 характеризуют потенциальное движение, причем $D_1 = -C_1$.

Для того чтобы получить выражения для вихревого движения жидкости, в (2.7)–(2.10) положим $C_1 = D_1 = 0$, $C_2 = D_2 = 0$, а также $D_3 = C_3 = 0$. Тогда для $b < 0$ эти формулы примут вид

$$x = \mp\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int\frac{dX_1}{X_1\sqrt{1/2 - \ln X_1}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int\frac{dY_2}{Y_2\sqrt{1/2 - \ln Y_2}},$$

$$X_2 = \pm\frac{\sqrt{|b|}}{a}X_1\sqrt{1/2 - \ln X_1}, \quad Y_1 = \mp\frac{\sqrt{|b|}}{a}Y_2\sqrt{1/2 - \ln Y_2},$$

откуда

$$u = \mp\frac{|b|}{2a}y\exp\left(1 - \frac{|b|}{4}(x^2 + y^2)\right), \quad v = \pm\frac{|b|}{2a}x\exp\left(1 - \frac{|b|}{4}(x^2 + y^2)\right). \tag{3.2}$$

Функции (3.2) полностью удовлетворяют нелинейной системе (1.2), (1.4). Запишем эти выражения в полярной системе координат (r, φ):

$$u = \mp\frac{2r\sin\varphi}{ar_0^2}\exp\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad v = \pm\frac{2r\cos\varphi}{ar_0^2}\exp\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right),$$
$$|V| = \frac{2r}{ar_0^2}\exp\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \tag{3.2'}$$

где $r_0^{-2} = |b|/4$. Функции (3.2)' описывают возрастающее (при $r < r_0$) и затухающее (при $r > r_0$) в радиальном направлении вихревое движение. При $r = r_0$ вихрь становится постоянным, и, как было показано в [3], общее движение в этом случае можно считать потенциальным. Потенциальные движения с постоянным вихрем составляют суть трохоидальных волн Герстнера [1]. Решение (3.2), (3.2)', в силу затухания (при $r > r_0$), будет устойчивым. Если же в общих интегралах (2.7)–(2.10) положить $b > 0$, то вихревое решение примет вид

$$|V| = \frac{2r}{ar_0^2}\exp\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Оно непрерывно возрастает в радиальном направлении, а следовательно будет неустойчивым. Поэтому для того, чтобы общее решение было устойчивым, в формулах (2.7)–(2.10) следует положить $b < 0$. Безразмерность выражений (3.2), (3.2)' в конкретных задачах можно преодолеть обезразмериванием скорости в исходной системе (1.2), (1.4), тогда в (3.2), (3.2)' характерная скорость появится множителем. Отметим также, что сумма потенциального (3.1) и вихревого решения (3.2) не будет решением системы (1.2), (1.4), так как уравнение (1.4) нелинейное.

Исходя из рассмотренных случаев, можно записать уточненные решения (2.7)–(2.10):

$$x - x_0 = \mp\int\frac{dX_1}{[C_2 \mp |C_1|X_1^2 + |b|(1/2 - \ln X_1)X_1^2]^{1/2}}, \tag{3.3}$$

$$X_2 = \pm\frac{1}{a}[C_2 \mp |C_1|X_1^2 + |b|(1/2 - \ln X_1)X_1^2]^{1/2}, \tag{3.4}$$

$$y - y_0 = \mp\int\frac{dY_2}{[D_2 \pm |C_1|Y_2^2 + |b|(1/2 - \ln Y_2)Y_2^2]^{1/2}}, \tag{3.5}$$

$$Y_1 = \mp\frac{1}{a}[D_2 \pm |C_1|Y_2^2 + |b|(1/2 - \ln Y_2)Y_2^2]^{1/2}, \tag{3.6}$$

где $x_0 = -C_3$, $y_0 = -D_3$. Не ограничивая сильно общности решений, в (3.3)–(3.6) можно положить $C_2 = D_2$. Для конкретных краевых задач, когда имеются оценки величин X_1, Y_1, X_2, Y_2, можно использовать асимптотические разложения интегралов (3.3), (3.5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, найдено точное решение (3.3)–(3.6) общей нелинейной системы уравнений плоского установившегося движения идеальной жидкости, из которого следуют как частные случаи известные решения. Полученное в работе вихревое решение (3.2), (3.2)' может быть использовано при исследовании турбулентных движений жидкости.

Использованный в работе метод не является классическим методом разделения переменных [2], так как исходное уравнение (1.4) и уравнения (2.4) являются нелинейными. Поэтому решения (2.1), (3.3)–(3.6) не будут собственными функциями задачи, а общее решение непредставимо в виде бесконечного ряда по собственным функциям. Только в случае потенциального движения (когда (1.4) вырождается в два уравнения Лапласа) функции (2.1), (3.3)–(3.6) становятся собственными с собственными значениями $\sqrt{|C_1|}$, а общее решение строится как ряд по собственным функциям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кочин Н.Е., Кибель Е.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
2. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
3. *Баринов В.А., Тактаров Н.Г.* Математическое моделирование магнито-гидродинамических поверхностных волн. Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 1991.