УДК 532.59: 532.547; 517.958

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ С НЕОДНОРОДНОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

В. А. Баринов, Н. Н. Бутакова

Тюменский государственный университет, 625003 Тюмень

Поставлена краевая задача о волнах на поверхности слоя двухфазной среды при неоднородном (экспоненциальном) распределении дисперсной фазы. Получено асимптотическое решение линейной задачи в виде затухающих прогрессивных волн. Найдены фазовая скорость, частота и декремент затухания волны. Определено возмущение концентрации примеси, которое в отличие от случая равномерного распределения проявляется уже в линейном приближении. Проведены численные расчеты для конкретных сред.

Ключевые слова: двухфазная среда, волны, свободная поверхность, линейная задача.

Введение. В [1] приведено решение линейной, а в [2, 3] нелинейной задачи о распространении волн на свободной поверхности слоя двухфазной смеси при равномерном распределении дисперсной фазы. В этих работах найдена зависимость параметров волны от начальной (невозмущенной) концентрации примеси, а в [2, 3] — и ее волновое возмущение. Показано, что в случае постоянной невозмущенной концентрации ее возмущение — величина более высокого порядка малости по сравнению с другими. Настоящая работа посвящена постановке и решению задачи о плоских волнах на поверхности слоя двухфазной среды с экспоненциальным распределением по глубине концентрации дисперсной фазы. Используемая здесь многоскоростная модель движения является более общей, чем в указанных выше работах, так как в уравнениях движения учитывается не только межфазное трение, но и сила присоединенных масс.

1. Математическая модель. Рассматривается слой двухфазной смеси постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Сверху слой ограничен свободной поверхностью. Несущая фаза ($i = 1$) представляет собой идеальную несжимаемую жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе, дисперсная ($i = 2$) — недеформируемые частицы. Движение такой среды в отсутствие тепло- и массообмена описывается системой уравнений [4]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t^*} + \nabla(\rho_i \boldsymbol{v}_i^*) = 0,$$

$$\rho_i \frac{d\boldsymbol{v}_i^*}{dt^*} = -\alpha_i \nabla P_i + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 \Big[\frac{\rho_1^0}{2}\Big(\frac{d\boldsymbol{v}_1^*}{dt^*} - \frac{d\boldsymbol{v}_2^*}{dt^*}\Big) + R(\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*)\Big] + \rho_i \boldsymbol{g}, \qquad (1.1)$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \qquad \rho_i^0 = \text{const}, \qquad i = 1, 2.$$

Здесь α_i, $\boldsymbol{v}_i^*$, P_i, ρ_i, ρ_i^0 — объемная концентрация, вектор скорости, давление, приведенная и истинная плотности i-й фазы соответственно; звездочкой (где это необходимо) отмечены размерные величины; $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения; коэффициент R характеризует силу вязкого трения Стокса (например, для сферических частиц радиуса a $R = 9\eta/(2a^2)$ [4], где η — динамическая вязкость жидкости).

Введем декартову систему координат так, чтобы невозмущенная свободная поверхность совпадала с плоскостью $z^* = 0$, а дно — с плоскостью $z^* = -l^*$ (l^* — глубина слоя); ось z^* направлена вертикально вверх. Положим, что в отсутствие волны среда находится в покое и дисперсная фаза экспоненциально распределена по глубине слоя смеси, т. е. $\alpha_2^0(z^*) = \alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*)$. Здесь α_0 — концентрация частиц на невозмущенной поверхности $z^* = 0$; δ^* — положительный эмпирический коэффициент, зависящий от физических параметров среды; коэффициент $\theta = 1$ при $\rho_2^0 < \rho_1^0$ и $\theta = -1$ при $\rho_2^0 > \rho_1^0$. Экспериментальные наблюдения распределения примеси по глубине покоящегося слоя смеси [5] показывают достаточную точность такой модели. Для того чтобы система (1.1) описывала волновое движение смеси, необходимо ввести волновые возмущения концентрации и давления [1]

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = 1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) - \alpha', \qquad \alpha_2 = \alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) + \alpha', \\
P_i = P_a - \rho_i^0 g z^* + p', \qquad i = 1, 2.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь α' — волновое возмущение концентрации дисперсной фазы; p' — возмущение давления. Подставляя (1.2) в (1.1), получаем систему уравнений для описания волнового движения смеси

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial\alpha'}{\partial t^*} + (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) - \alpha')\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1^* - \alpha_0\theta\delta^* \exp(\theta\delta^* z^*) v_{1z}^* - \boldsymbol{v}_1^*\cdot\nabla\alpha' = 0, \\
\frac{\partial\alpha'}{\partial t^*} + (\alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) + \alpha')\nabla\cdot\boldsymbol{v}_2^* + \alpha_0\theta\delta^* \exp(\theta\delta^* z^*) v_{2z}^* + \boldsymbol{v}_2^*\cdot\nabla\alpha' = 0, \\
\Big(\rho_1^0 + \frac{\rho_1^0}{2}(\alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) + \alpha')\Big)\frac{d\boldsymbol{v}_1^*}{dt^*} - \\
-\frac{\rho_1^0}{2}(\alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) + \alpha')\frac{d\boldsymbol{v}_2^*}{dt^*} - R(\alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) + \alpha')(\boldsymbol{v}_2^* - \boldsymbol{v}_1^*) + \nabla p' = 0, \\
\Big(\rho_2^0 + \frac{\rho_1^0}{2}(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) - \alpha')\Big)\frac{d\boldsymbol{v}_2^*}{dt^*} - \\
-\frac{\rho_1^0}{2}(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) - \alpha')\frac{d\boldsymbol{v}_1^*}{dt^*} + R(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^* z^*) - \alpha')(\boldsymbol{v}_2^* - \boldsymbol{v}_1^*) + \nabla p' = 0.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

На свободной поверхности $z^* = \xi(t^*, x^*, y^*)$ выполняются кинематическое и динамическое граничные условия [1]

$$\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^* = V_n, \qquad P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a,$$

где $\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^*$ и V_n — нормальные проекции объемной скорости смеси и свободной поверхности. С учетом (1.2) граничные условия в случае плоскопараллельного волнового движения примут вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\xi}{\partial t^*} - (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) - \alpha')v_{1z}^* - (\alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) + \alpha')v_{2z}^* + \\
+ \frac{\partial\xi}{\partial x^*}\big[(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) - \alpha')v_{1x}^* + (\alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) + \alpha')v_{2x}^*\big] = 0, \\
p - \big[\rho_1^0(1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) - \alpha') + \rho_2^0(\alpha_0 \exp(\theta\delta^*\xi) + \alpha')\big] g\xi = 0, \qquad z^* = \xi(t^*, x^*).
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Считая, что поток массы через твердую поверхность горизонтального основания отсутствует и смесь "проскальзывает" вдоль нее, на дне ($z^* = -l^*$) получаем условия непротекания [4]

$$v_{iz}^* = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{1.5}$$

Уравнения (1.3) и граничные условия (1.4), (1.5) составляют математическую модель волнового движения дисперсной смеси с неоднородным распределением второй фазы в покоящемся слое.

2. Постановка краевой задачи. Пусть по свободной поверхности слоя в положительном направлении оси x^* распространяется волна длиной λ. Длина волны много больше характерного размера дисперсных частиц ($\lambda \gg a$). Для прогрессивных волн принимается [6], что переменная x^* может входить в решение только в комбинации $x^* - c^* t^*$, где c^* — фазовая скорость волны, подлежащая определению. Введем следующие безразмерные переменные и величины:

$$\begin{gathered} t = kc^* t^*, \quad x = kx^*, \quad z = kz^*, \quad l = kl^*, \quad \mu_i = \rho_i^0/\rho^0, \quad r = R/(\rho^0 k c_0), \\ \delta = \delta^*/k, \quad \gamma = \alpha'/\alpha_0, \quad \zeta = k\xi, \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i^*/c_0, \quad p = p'/(\rho^0 c_0^2), \quad c = c^*/c_0, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\rho^0 = (1-\alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0 \rho_2^0$ — плотность покоящейся смеси на невозмущенной свободной поверхности; c_0 — фазовая скорость волны, соответствующая равномерному распределению примеси в покоящемся слое в линейном приближении; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Подставляя (2.1) в систему (1.3)–(1.5), получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered}
-\alpha_0 c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0 \exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma)\Big(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\Big) - \alpha_0 \theta\delta \exp(\theta\delta z) v_{1z} - \alpha_0 \Big(v_{1x}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + v_{1z}\frac{\partial \gamma}{\partial z}\Big) = 0, \\
\alpha_0 c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \alpha_0(\exp(\theta\delta z) + \gamma)\Big(\frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z}\Big) + \alpha_0\theta\delta\exp(\theta\delta z) v_{2z} + \alpha_0\Big(v_{2x}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + v_{2z}\frac{\partial \gamma}{\partial z}\Big) = 0, \\
\Big(\mu_1 + \frac{\mu_1}{2}(\alpha_0 \exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma)\Big) c \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2}(\alpha_0\exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma) c \frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \\
- r(\alpha_0 \exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma)(v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\mu_1}{2}(\alpha_0\exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma)\Big(v_{2x}\frac{\partial v_{2s}}{\partial x} + v_{2z}\frac{\partial v_{2s}}{\partial z}\Big) + \\
+ \Big(\mu_1 + \frac{\mu_1}{2}(\alpha_0\exp(\theta\delta z) + \alpha_0\gamma)\Big)\Big(v_{1x}\frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1z}\frac{\partial v_{1s}}{\partial z}\Big) = 0, \\
\Big(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma)\Big) c\frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2}(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma) c \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} + \\
+ r(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma)(v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\mu_1}{2}(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma)\Big(v_{1x}\frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + v_{1z}\frac{\partial v_{1s}}{\partial z}\Big) + \\
+ \Big(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z) - \alpha_0\gamma)\Big)\Big(v_{2x}\frac{\partial v_{2s}}{\partial x} + v_{2z}\frac{\partial v_{2s}}{\partial z}\Big) = 0, \\
s = x, z.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Безразмерные кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности $z = \zeta(t, x)$ записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
c\frac{\partial \zeta}{\partial t} - (1 - \alpha_0\exp(\theta\delta\zeta)) v_{1z} - \alpha_0\exp(\theta\delta\zeta) v_{2z} + \\
+ \frac{\partial \zeta}{\partial x}[(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta\zeta)) v_{1x} + \alpha_0\exp(\theta\delta\zeta) v_{2x}] - \\
- \alpha_0\gamma(v_{2z} - v_{1z}) + \alpha_0\gamma\frac{\partial \zeta}{\partial x}(v_{2x} - v_{1x}) = 0, \\
p - (\mu_1(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta\zeta)) + \mu_2\alpha_0\exp(\theta\delta\zeta))\nu_0^2\zeta + \alpha_0(\mu_1 - \mu_2)\nu_0^2\gamma\zeta = 0, \quad \nu_0^2 = g/(kc_0^2).
\end{gathered} \tag{2.3}$$

На дне ($z = -l$) имеем

$$v_{iz} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Уравнения и граничные условия (2.2)–(2.4) составляют нелинейную краевую задачу для определения скоростей волнового движения фаз, формы свободной поверхности, возмущений давления и концентрации.

3. Решение линейной задачи. Рассмотрим линейный вариант задачи (2.2)–(2.4). Полагаем, что амплитуда волны мала по сравнению с длиной. Тогда кинематическое и динамическое граничные условия (2.3), заданные на неизвестной поверхности $z = \zeta(t, x)$, можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$. Для этого все неизвестные функции, входящие в них, следует разложить в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$ (в частности, $\exp(\theta\delta\zeta) = 1 + \theta\delta\zeta + \delta^2\zeta^2/2 + \ldots$). Кроме того, для поверхностных волн малой амплитуды скорости волнового движения фаз и волновые возмущения одного порядка с величиной ζ, т. е. малы́ [6]. Учитывая малость входящих в (2.2)–(2.4) неизвестных величин, в уравнениях (2.2) и разложенных в ряд в окрестности $z = 0$ граничных условиях (2.3) оставим только линейные по отношению к ним слагаемые. В результате получаем линейную задачу

$$\begin{gathered}
-\alpha_0 c\,\frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z))\Big(\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\Big) - \alpha_0\theta\delta\exp(\theta\delta z)v_{1z} = 0,\\
c\,\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \exp(\theta\delta z)\Big(\frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z}\Big) + \theta\delta\exp(\theta\delta z)v_{2z} = 0,\\
\Big(\mu_1 + \frac{\mu_1}{2}\,\alpha_0\exp(\theta\delta z)\Big)c\,\frac{\partial v_{1s}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2}\,\alpha_0\exp(\theta\delta z)c\,\frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - r\alpha_0\exp(\theta\delta z)(v_{2x} - v_{1x}) + \frac{\partial p}{\partial s} = 0,\\
\Big(\mu_2 + \frac{\mu_1}{2}\,(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z))\Big)c\,\frac{\partial v_{2s}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2}\,(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z))c\,\frac{\partial v_{1s}}{\partial t} + \\
+ r(1 - \alpha_0\exp(\theta\delta z))(v_{2s} - v_{1s}) + \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \qquad s = x, z,\\
c\,\frac{\partial\zeta}{\partial t} = (1 - \alpha_0)v_{1z} + \alpha_0 v_{2z}, \qquad p - \nu_0^2\zeta = 0, \qquad \nu_0^2 = \frac{g}{kc_0^2}, \qquad z = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Условия на дне (2.4) останутся в том же виде.

Исключая неизвестные функции, систему уравнений (3.1) можно свести к задаче для определения возмущения давления $p(t, x, z)$

$$\begin{gathered}
c^2\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Delta p + 4cr(\mu_1\rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1\mu_2)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Delta p + 4r^2\rho(z)\Delta p = \\
= \rho'(z)\Big[3c^2\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)\,\frac{\partial^3 p}{\partial t^2\,\partial z} + 4cr(2\mu_1 + \mu_2)\,\frac{\partial^2 p}{\partial t\,\partial z} + 4r^2\,\frac{\partial p}{\partial z}\Big],\\
\frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{2r}{c\mu_1(1 + 2\mu_2)}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{(\mu_1 + 2\mu^0)\nu_0^2}{c^2\mu_1(1 + 2\mu_2)}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t\,\partial z} + \frac{2r\nu_0^2}{c^3\mu_1(1 + 2\mu_2)}\,\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \qquad z = 0,\\
\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \qquad z = -l,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\rho(z) = \mu_1 + \alpha_0\exp(\theta\delta z)(\mu_2 - \mu_1), \qquad \mu(z) = \mu_2 - \alpha_0\exp(\theta\delta z)(\mu_2 - \mu_1),$$
$$\mu^0 = \mu(0), \qquad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2.$$

Неизвестную фазовую скорость волны c следует искать из условия на свободной поверхности (3.2) при определении p. После этого скорости волнового движения, возмущение концентрации, а также форма свободной поверхности могут быть найдены из уравнений (3.1).

Решение линейной задачи должно удовлетворять ряду требований. Наличие относительного движения фаз вызывает затухание волнового движения. В отсутствие дисперсной фазы ($\alpha_0 = 0$) или при одинаковых истинных плотностях фаз ($\rho_1^0 = \rho_2^0$) решение задачи должно переходить в известные волновые решения для жидкостей [6]. Поэтому в случае распространения по свободной поверхности смеси прогрессивной волны решение задачи (3.2) следует искать в виде

$$p = \exp(-bt)[M(z)\sin(x-t) + N(z)\cos(x-t)]/\operatorname{sh} l, \tag{3.3}$$

где $b = \beta/(kc^*)$ — безразмерный декремент затухания (β — размерный декремент).

Подставляя (3.3) в (3.2) и приравнивая к нулю коэффициенты при $\sin(x-t)$ и $\cos(x-t)$, получаем систему дифференциальных уравнений и граничных условий. Уравнения для определения неизвестных функций $M(z)$ и $N(z)$ имеют вид

$$\begin{gathered}
[4r^2\rho(z) - 4bcr(\mu_1\rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1\mu_2) + {} \\
+ c^2(b^2-1)\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))](M''(z) - M(z)) + {} \\
+ 2c[2r(\mu_1\rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1\mu_2) - cb\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))](N''(z) - N(z)) = {} \\
= [4r^2 - 4bcr(2\mu_1 + \mu_2) + 3c^2(b^2-1)\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)]\rho'(z)M'(z) + {} \\
+ 2c[2r(2\mu_1 + \mu_2) - 3cb\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)]\rho'(z)N'(z), \\
2c[2r(\mu_1\rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1\mu_2) - cb\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))](M''(z) - M(z)) - {} \\
- [4r^2\rho(z) - 4bcr(\mu_1\rho(z) + \mu(z)\rho(z) + \mu_1\mu_2) + {} \\
+ c^2(b^2-1)\mu_1(\rho(z) + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu(z))](N''(z) - N(z)) = {} \\
= 2c[2r(2\mu_1 + \mu_2) - 3cb\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)]\rho'(z)M'(z) - {} \\
- [4r^2 - 4bcr(2\mu_1 + \mu_2) + 3c^2(b^2-1)\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)]\rho'(z)N'(z).
\end{gathered} \tag{3.4}$$

При $z = 0$ должны выполняться условия

$$\begin{gathered}
M(z)[c^3b(3-b^2)\mu_1(1+2\mu_2) + 2c^2r(b^2-1)] + M'(z)\nu_0^2(2r - cb(\mu_1 + 2\mu^0)) + {} \\
+ N(z)[c^3(3b^2-1)\mu_1(1+2\mu_2) - 4c^2br] + N'(z)\nu_0^2c(\mu_1 + 2\mu^0) = 0, \\
M(z)[c^3(3b^2-1)\mu_1(1+2\mu_2) - 4c^2br] + M'(z)\nu_0^2c(\mu_1 + 2\mu^0) - {} \\
- N(z)[c^3b(3-b^2)\mu_1(1+2\mu_2) + 2c^2r(b^2-1)] - N'(z)\nu_0^2(2r - cb(\mu_1 + 2\mu^0)) = 0.
\end{gathered} \tag{3.5}$$

При $z = -l$ имеем

$$M'(z) = 0, \qquad N'(z) = 0. \tag{3.6}$$

Решение системы (3.4) будем искать в виде рядов по малому параметру. В качестве малого параметра возьмем δ, тем самым предполагая, что распределение примеси в покоящемся слое близкó к равномерному. Неизвестные, входящие в (3.4)–(3.6), ищем в виде

$$M(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\delta^k M_k(z), \quad N(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\delta^k N_k(z), \quad b = \sum_{k=0}^{\infty}\delta^k b_k, \quad c = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\delta^k c_k. \tag{3.7}$$

Если в (3.4)–(3.6) положить $\delta = 0$, то получаем задачу с однородной концентрацией примеси в покоящемся слое [1]. Следовательно, решение задачи в нулевом приближении имеет вид

$$M_0(z) = K_0 \operatorname{ch}(z+l), \qquad N_0(z) = L_0 \operatorname{ch}(z+l),$$

$$
\begin{gathered}
c_0^2 = \frac{\mu_1 + 2\mu^0}{\mu_1(1+2\mu_2)}\,\nu_1^2\,\mathrm{th}\,l + \tilde\beta\Big(3\tilde\beta - \frac{4r_1}{\mu_1(1+2\mu_2)}\Big),\\
\tilde\beta = \Big[-\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\,\Big]^{1/3} + \Big[-\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4}+\frac{\psi^3}{27}}\,\Big]^{1/3} + \frac{2r_1}{3\mu_1(1+2\mu_2)},\\
\psi = (3\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)\nu_1^2\,\mathrm{th}\,l - 4r_1^2)/(12\mu_1^2(1+2\mu_2)^2),\\
\chi = r_1[4r_1^2 + 9\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1 - \mu + 3\mu_1\mu_2)\nu_1^2\,\mathrm{th}\,l]/(54\mu_1^3(1+2\mu_2)^3),\\
r_1 = c_0 r = R/(\rho^0 k), \qquad \tilde\beta = c_0 b_0 = \beta_0/k, \qquad \nu_1^2 = c_0^2\nu_0^2 = g/k,
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

где K_0, L_0 — произвольные постоянные; β_0 — размерный декремент затухания, соответствующий линейной задаче. Формулы (3.8) отличаются от приведенных в [1] слагаемыми, обусловленными силой присоединенных масс. Если в исходных уравнениях (1.1) пренебречь этой силой, то (3.8) полностью совпадают с результатами работы [1].

Чтобы получить уравнения и граничные условия для нахождения решения в первом приближении, необходимо (3.7) подставить в (3.4)–(3.6). Малый параметр δ явно входит в уравнения (3.4), поэтому величины, входящие в них, следует предварительно разложить в ряд по степеням δ. Подставляя (3.7) в (3.4)–(3.6) и учитывая (3.8), для неизвестных величин $M_1(z)$ и $N_1(z)$ получаем следующую краевую задачу:

$$
\begin{aligned}
&[4r^2 - 4b_0 r(\mu_1+\mu^0+\mu_1\mu_2) + (b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)](M_1''(z) - M_1(z)) +\\
&\qquad + 2[2r(\mu_1+\mu^0+\mu_1\mu_2) - b_0\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)](N_1''(z) - N_1(z)) =\\
&= \theta\alpha_0(\mu_2-\mu_1)\{[4r^2 - 4b_0 r(2\mu_1+\mu_2) + (b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)]K_0 +\\
&\qquad + 2[2r(2\mu_1+\mu_2) - b_0\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)]L_0\}\,\mathrm{sh}\,(z+l) = 0,\\
&2[2r(\mu_1+\mu^0+\mu_1\mu_2) - b_0\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)](M_1''(z) - M_1(z)) -\\
&\quad - [4r^2 - 4b_0 r(\mu_1+\mu^0+\mu_1\mu_2) + (b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)](N_1''(z) - N_1(z)) =\\
&= \theta\alpha_0(\mu_2-\mu_1)\{2[2r(2\mu_1+\mu_2) - b_0\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)]K_0 -\\
&\qquad - [4r^2 - 4b_0 r(2\mu_1+\mu_2) + (b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)]L_0\}\,\mathrm{sh}\,(z+l) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

При $z = 0$ должны выполняться условия

$$
\begin{aligned}
&M_1(z)[b_0(3-b_0^2)\mu_1(1+2\mu_2) + 2r(b_0^2-1)] + M_1'(z)\nu_0^2(2r - b_0(\mu_1+2\mu^0)) +\\
&\qquad + N_1(z)[(3b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2) - 4b_0 r] + N_1'(z)\nu_0^2(\mu_1+2\mu^0) +\\
&\qquad + b_1\{[(4b_0 r - 3(b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2))\,\mathrm{ch}\,l - \nu_0^2(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{sh}\,l]K_0 +\\
&\qquad\qquad + 2[3b_0\mu_1(1+2\mu_2) - 2r]\,\mathrm{sh}\,l L_0\} +\\
&\qquad + c_1\{[(4r(b_0^2-1) + 3b_0(3-b_0^2)\mu_1(1+2\mu_2))\,\mathrm{ch}\,l - \nu_0^2 b_0(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{ch}\,l]K_0 +\\
&\qquad + [(3(3b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2) - 8rb_0)\,\mathrm{ch}\,l + \nu_0^2(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{sh}\,l]L_0\} = 0, \qquad z = 0,\\
&M_1(z)[(3b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2) - 4b_0 r] + M_1'(z)\nu_0^2(\mu_1+2\mu^0) -\\
&\qquad - N_1(z)[b_0(3-b_0^2)\mu_1(1+2\mu_2) + 2r(b_0^2-1)] - N_1'(z)\nu_0^2(2r - b_0(\mu_1+2\mu^0)) +\\
&\qquad + b_1\{2[3b_0\mu_1(1+2\mu_2) - 2r]\,\mathrm{sh}\,l K_0 -\\
&\qquad - [(4b_0 r - 3(b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2))\,\mathrm{ch}\,l - \nu_0^2(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{sh}\,l]L_0\} +
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$+ c_1\{[(3(3b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2) - 8rb_0)\,\mathrm{ch}\,l + \nu_0^2(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{sh}\,l]K_0 -$$
$$- [(4r(b_0^2-1) + 3b_0(3-b_0^2)\mu_1(1+2\mu_2))\,\mathrm{ch}\,l - \nu_0^2 b_0(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{ch}\,l]L_0\} = 0, \qquad z = 0.$$

На дне имеем следующие условия:

$$M_1'(z) = 0, \qquad N_1'(z) = 0, \qquad z = -l. \tag{3.11}$$

Решение системы линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (3.9), удовлетворяющее условию на дне (3.11), имеет вид

$$\begin{aligned} M_1(z) &= K_1\,\mathrm{ch}\,(z+l) + (Y_1K_0 + Y_2L_0)(z\,\mathrm{ch}\,(z+l) - \mathrm{sh}\,(z+l)),\\ N_1(z) &= L_1\,\mathrm{ch}\,(z+l) + (-Y_2K_0 + Y_1L_0)(z\,\mathrm{ch}\,(z+l) - \mathrm{sh}\,(z+l)), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где коэффициенты K_1 и L_1 произвольны, а Y_1 и Y_2 определяются выражениями

$$\begin{aligned} Y_1 = \theta\alpha_0(\mu_2-\mu_1)\{&[4r^2 - 4b_0r(2\mu_1+\mu_2) + 3(b_0^2-1)\mu_1(\mu_1+2\mu_2)] \times\\ &\times [4r^2 - 4b_0r(\mu_1+\mu^0+\mu_1\mu_2) + (b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)] +\\ &+ 4[2r(2\mu_1+\mu_2) - 3b_0\mu_1(\mu_1+2\mu_2)][2r(\mu_1+\mu^0+\mu_1\mu_2) - b_0\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)]\}/(2D_1),\\ Y_2 = \theta\alpha_0(\mu_2-\mu_1)\{&[4r^2 - 4b_0r(\mu_1+\mu^0+\mu_1\mu_2) + (b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)] \times\\ &\times [2r(2\mu_1+\mu_2) - 3b_0\mu_1(\mu_1+2\mu_2)] -\\ &- [4r^2 - 4b_0r(2\mu_1+\mu_2) + 3(b_0^2-1)\mu_1(\mu_1+2\mu_2)] \times\\ &\times [2r(\mu_1+\mu^0+\mu_1\mu_2) - b_0\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)]\}/D_1, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$D_1 = (4r^2 - 4b_0r\mu_1(1+2\mu_2) + (b_0^2+1)\mu_1^2(1+2\mu_2)^2)(4r^2 - 4b_0r(\mu_1+2\mu^0) + (b_0^2+1)(\mu_1+2\mu^0)^2).$$

Как известно [7], для того чтобы разложение было равномерно пригодным, отношения $M_n(z)/M_{n-1}(z)$, $N_n(z)/N_{n-1}(z)$ должны быть ограничены для всей области изменения z. В данном случае это условие выполнено, если справедливо условие $l < \delta^{-1}$. Коэффициент δ можно выразить через концентрацию примеси на поверхности (α_0) и на дне ($\alpha_l = \alpha(-l) = \alpha_0 \exp{(-\theta\delta l)}$). Из последнего равенства находим $\delta = l^{-1}\ln{(\alpha_0/\alpha_l)^\theta}$. Тогда неравенство $l < \delta^{-1}$ можно переписать как $\ln{(\alpha_0/\alpha_l)^\theta} < 1$, откуда получаем ограничения на область применимости модели

$$\alpha_0/\alpha_l < \mathrm{e} \quad \text{при} \quad \rho_2^0 < \rho_1^0, \qquad \alpha_l/\alpha_0 < \mathrm{e} \quad \text{при} \quad \rho_2^0 > \rho_1^0.$$

Таким образом, данная модель будет хорошо описывать волновой процесс, если концентрация дисперсной фазы изменяется по глубине слоя менее чем в e раз.

Подставляя (3.12) в условия (3.10) и учитывая решение линейной задачи (3.7), получаем, что нетривиальное относительно K_0 и L_0 решение существует, только если имеют место равенства

$$\begin{aligned} &b_1[(4b_0r - 3(b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2))\,\mathrm{ch}\,l - \nu_0^2(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{sh}\,l] +\\ &+ c_1[(4r(b_0^2-1) + 3b_0(3-b_0^2)\mu_1(1+2\mu_2))\,\mathrm{ch}\,l - \nu_0^2b_0(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{ch}\,l] +\\ &\qquad + \nu_0^2\,\mathrm{th}\,l[(2r - b_0(\mu_1+2\mu^0))Y_1 - (\mu_1+2\mu^0)Y_2] = 0,\\ &2b_1[3b_0\mu_1(1+2\mu_2) - 2r] + c_1[(3(3b_0^2-1)\mu_1(1+2\mu_2) - 8rb_0)\,\mathrm{cth}\,l + \nu_0^2(\mu_1+2\mu^0)] +\\ &\qquad + \nu_0^2\,\mathrm{th}\,l[(\mu_1+2\mu^0)Y_1 + (2r - b_0(\mu_1+2\mu^0))Y_2] = 0. \end{aligned}$$

Из этой системы линейных неоднородных уравнений находим b_1 и c_1:

$$\begin{aligned} b_1 = \nu_0^2\{&Y_1[-\mathrm{th}^2\,l(16b_0r^2 + 2r[\mu_1 + 6\mu_1\mu_2 - 4\mu^0 - b_0^2(11\mu_1 + 18\mu_1\mu_2 + 4\mu^0)] +\\ &+ 6b_0(b_0^2+1)\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)) + 2\nu_0^2r(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{th}^3\,l] +\\ &+ Y_2[-\mathrm{th}^2\,l(8(b_0^2-1)r^2 + 2b_0r[7\mu_1 + 18\mu_1\mu_2 - 4\mu^0 - b_0^2(5\mu_1 + 6\mu_1\mu_2 + 4\mu^0)] +\\ &+ 3(b_0^4-1)\mu_1(1+2\mu_2)(\mu_1+2\mu^0)) + \nu_0^2(2b_0r - (b_0^2+1)(\mu_1+2\mu^0))(\mu_1+2\mu^0)\,\mathrm{th}^3\,l]\}/D_2, \end{aligned}$$

$$c_1 = \nu_0^2\{Y_1[\operatorname{th}^2 l(8r^2 - 12b_0r(\mu_1 + 2\mu_2) + 3(b_0^2 + 1)(\mu_1^2 + 2\mu_1\mu^0 + 2\mu_1^2\mu_2 + 4\mu^0\mu_1\mu_2)) - \\ - \nu_0^2(\mu_1 + 2\mu^0)^2 \operatorname{th}^3 l] + Y_2[\operatorname{th}^2 l(8b_0r^2 + 2r[\mu_1 + 6\mu_1\mu_2 - 4\mu^0 - b_0^2(5\mu_1 + 6\mu_1\mu_2 + 4\mu^0)] + \\ + 3b_0(b_0^2 + 1)\mu_1(1 + 2\mu_2)(\mu_1 + 2\mu^0)) - \nu_0^2(2r - b_0(\mu_1 + 2\mu^0))(\mu_1 + 2\mu^0)\operatorname{th}^3 l]\}/D_2, \tag{3.14}$$

$$D_2 = \nu_0^4(\mu_1 + 2\mu^0)^2 \operatorname{th}^2 l - 2(\mu_1 + 2\mu^0)[4b_0r + 3(1 - b_0^2)\mu_1(1 + 2\mu_2)]\operatorname{th} l + \\ + (b_0^2 + 1)[16r^2 - 24b_0r\mu_1(1 + 2\mu_2) + 9(b_0^2 + 1)\mu_1^2(1 + 2\mu_2)^2].$$

Таким образом, размерные декремент затухания β и фазовая скорость волны c^* с точностью до δ^1 равны

$$\beta = kc^*b = kc_0b_0 + \delta kc_0(b_1 + b_0c_1), \qquad c^* = c_0(1 + \delta c_1).$$

Подставляя (3.8), (3.12) в (3.7), а затем в (3.3), находим возмущение давления

$$p = \exp(-bt)\{(K_0\sin(x - t) + L_0\cos(x - t))\operatorname{ch}(z + l) + \\ + \delta[(K_1\sin(x - t) + L_1\cos(x - t))\operatorname{ch}(z + l) + \\ + ([Y_1K_0 + Y_2L_0]\sin(x - t) + (-Y_2K_0 + Y_1L_0)\cos(x - t))(z\operatorname{ch}(z + l) - \operatorname{sh}(z + l))]\}/\operatorname{sh} l, \tag{3.15}$$

где постоянные Y_1, Y_2 определены формулами (3.13), а K_i и L_i могут быть найдены из дополнительных начальных данных. Форму свободной поверхности с точностью до δ^1 определяем из условия (3.2):

$$\zeta = \operatorname{cth} l\exp(-bt)[K_0\sin(x - t) + L_0\cos(x - t) + \\ + \delta\{(K_1 - \operatorname{th} l(Y_1K_0 + Y_2L_0))\sin(x - t) + (L_1 - \operatorname{th} l(-Y_2K_0 + Y_1L_0))\cos(x - t)]\}/\nu_0^2.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ гребень волны проходит через ось z и высота волны равна L, то

$$K_0 = 0, \qquad L_0 = \nu_0^2 L\operatorname{th} l, \qquad K_1 = \nu_0^2 L^2 Y_2\operatorname{th}^2 l, \qquad L_1 = \nu_0^2 LY_1\operatorname{th}^2 l. \tag{3.16}$$

Следовательно, ζ можно переписать так:

$$\zeta = L\exp(-bt)\cos(x - t).$$

Выражение для возмущения давления (3.15) с учетом (3.16) примет вид

$$p = L\nu_0^2\exp(-bt)\{\cos(x - t)\operatorname{ch}(z + l) + \\ + \delta(Y_2\sin(x - t) + Y_1\cos(x - t))[(\operatorname{th} l + z)\operatorname{ch}(z + l) - \operatorname{sh}(z + l)]\}/\operatorname{ch} l. \tag{3.17}$$

Подставляя (3.17) и соотношение $c = 1 + \delta c_1$ в уравнения (3.1), интегрируя их и отбрасывая слагаемые порядка выше δ, можно найти скорости фаз и возмущение концентрации γ. Выражения, определяющие скорости, громоздки, а получение их не представляет сложности. Поэтому приводить их не будем. Возмущение концентрации имеет вид

$$\gamma = L\,\frac{\nu_0^2}{\operatorname{ch} l}\,\frac{2\delta\exp(-bt)}{\alpha_0(\mu_2 - \mu_1)(b_0^2 + 1)^2}\operatorname{sh}(z + l)\times \\ \times[(2b_0Y_1 + (b_0^2 - 1)Y_2)\sin(x - t) + ((b_0^2 - 1)Y_1 - 2b_0Y_2)\cos(x - t)]. \tag{3.18}$$

Из (3.18) следует, что возмущение концентрации по параметру δ на порядок ниже возмущения давления и формы свободной поверхности. Но в отличие от задачи с однородной концентрацией [1] функция γ отлична от нуля уже в первом приближении по амплитудному параметру.

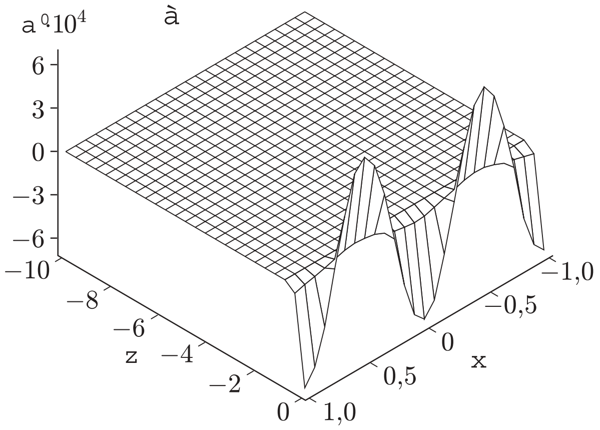

Рис. 1. Возмущение концентрации дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 500$ кг/м^3:
а — $t = 0$; *б* — $t = 300$ с

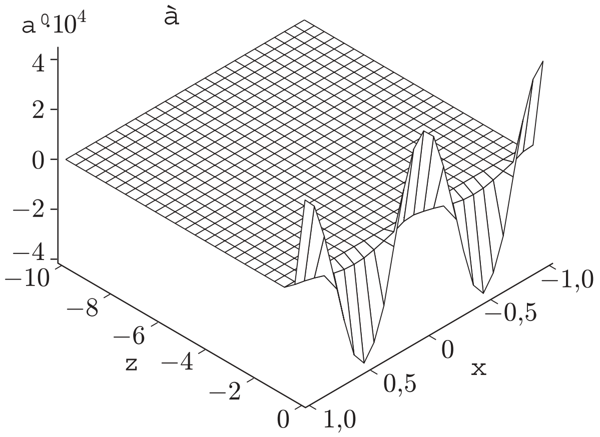

Рис. 2. Возмущение концентрации дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 1500$ кг/м^3:
а — $t = 0$; *б* — $t = 300$ с

Для иллюстрации полученных результатов были проведены расчеты для дисперсной смеси воды с более легкими и более тяжелыми частицами при следующих параметрах: $l^* = 10$ м, $\lambda = 1$ м, $\rho_1^0 = 1000$ кг/м^3, $\eta = 1{,}004$ кг/(м $\cdot$ с), $a = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ м, $\alpha_0 = 0{,}1$, $\delta^* = 0{,}05$ 1/м. Тогда при $\rho_2^0 = 500$ кг/м^3 концентрация дисперсной фазы в покоящемся слое $\alpha_2^0 = \alpha_0 \exp{(0{,}05 z^*)}$, если $\rho_2^0 = 1500$ кг/м^3, то $\alpha_2^0 = \alpha_0 \exp{(-0{,}05 z^*)}$. На рис. 1,*а* представлено возмущение концентрации дисперсной фазы в момент времени $t = 0$ для смеси жидкости с частицами плотности $\rho_2^0 = 500$ кг/м^3. Возмущение носит волновой характер и является периодическим по x с периодом, равным длине волны. С увеличением глубины возмущение затухает и становится практически незаметным на глубине 1 м ($z^* = -1$). Возмущение концентрации быстро затухает со временем (рис. 1,*б*). Аналогичные зависимости при $\rho_2^0 = 1500$ кг/м^3 представлены на рис. 2. Сравнивая рис. 1,*а* и рис. 2,*а*, видим, что прохождение волны оказывает большее влияние на распределение частиц в случае $\rho_2^0 < \rho_1^0$. Однако, как следует из сравнения рис. 1,*б* и рис. 2,*б*, в этом случае возмущения концентрации дисперсной фазы гаснут быстрее.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баринов В. А., Бутакова Н. Н.** Волны на свободной поверхности двухфазной среды // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 27–35.
2. **Баринов В. А., Бутакова Н. Н.** Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Тр. Средне-Волж. мат. о-ва. 2002. Т. 3/4, № 1. С. 47–53.
3. **Баринов В. А., Бутакова Н. Н.** Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Материалы Всероссийской конф. “Теория и приложения задач со свободными границами”, Бийск, 2–6 июля 2002 г. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002. С. 10–12.
4. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.
5. **Botsh B.** Hydraulishe Kennwerte für Nachklärbecken: Definitionen und Vergleich mit Augaben des Arbeitsblattes ATV-A B1 // Korrespond. Abvasser. 1998. Bd 45, N 7. S. 1289–1300.
6. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
7. **Найфэ А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 24/XII 2002 г.,
в окончательном варианте — 5/XI 2003 г.