УДК 532.59: 532.547

ВОЛНЫ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

В. А. Баринов, Н. Н. Бутакова

Тюменский государственный университет, 625003 Тюмень

Поставлена краевая задача определения волнового движения, вызванного распространением гравитационной волны на свободной поверхности слоя двухфазной среды. Задача решена аналитически в линейном приближении. Определены форма свободной поверхности, фазовая скорость, частота и декремент затухания волны. Приведен пример решения задачи.

Исследования распространения поверхностных волн на слое двухфазной (дисперсной) жидкости представляют как практический, так и теоретический интерес. Результаты этих исследований могут быть использованы при изучении влияния примесей на волновые параметры. Такое влияние на распространение прибрежных волн описано в работе [1]. В то же время изучение волновых движений дисперсной жидкой смеси позволяет расширить область применимости теории поверхностных волн, а также динамической теории двухфазных сред. В работе [2] в линейном приближении исследованы стоячие монохроматические волны на поверхности раздела слоев жидкости и смеси этой жидкости с твердыми частицами, численно определены условия устойчивости этой поверхности.

Целью данной работы является исследование влияния примесей на распространение волны на свободной поверхности двухфазной среды.

1. Физическая модель. Рассмотрим слой дисперсной жидкой смеси постоянной толщины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Вверху слой граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности, атмосферным). Предполагается, что несущая фаза — идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой может проявляться только на межфазной поверхности, дисперсная фаза — недеформируемые частицы одного размера. Тепло- и массообмен через свободную поверхность и между фазами отсутствует. Движение такой двухфазной среды описывается двухскоростными уравнениями сохранения массы и импульсов [3]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}_i) = 0, \qquad \rho_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\alpha_i \nabla P_i + (-1)^i R\alpha_1\alpha_2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) + \rho_i \boldsymbol{g},$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \qquad \rho_i = \alpha_i \rho_i^0, \qquad \rho_i^0 = \text{const}, \quad i = 1, 2. \tag{1.1}$$

Здесь индексы $i = 1, 2$ соответствуют величинам, характеризующим несущую и дисперсную фазы; α_i, $\boldsymbol{v}_i$, P_i, ρ_i, ρ_i^0 — объемная концентрация, скорость, давление, приведенная и истинная плотность i-й фазы соответственно; $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения. Коэффициент $R(a, \eta)$ характеризует межфазное взаимодействие. Например, если учитывать только силу вязкого трения Стокса, то $R = æ\eta/a^2$, где η — динамическая вязкость жидкости; a — характерный размер частицы; $æ$ — эмпирический коэффициент межфазного трения (в случае сферических частиц $æ = 9/2$). Если учитывается несколько сил межфазного взаимодействия, то коэффициент R равен сумме соответствующих коэффициентов.

Введем декартову систему координат, так чтобы невозмущенная поверхность совпадала с плоскостью $z = 0$. Поверхность дна $z = -l$ (l — толщина слоя смеси), ось z и вектор $\boldsymbol{g}$ противоположно направлены. Для того чтобы система уравнений (1.1) описывала волновое движение смеси, необходимо записать ее для приведенных давлений фаз — возмущений давления, вызванных распространением волны [4]. Полагая, что в отсутствие волны среда находится в покое, из уравнений (1.1) при $\boldsymbol{v}_i = 0$ и условия равенства давлений на невозмущенной поверхности $z = 0$ получаем гидростатические составляющие давлений фаз $P_{i0} = P_a - \rho_i^0 gz$. Будем считать, что возмущения давлений фаз, вызванные распространением на свободной поверхности волны, одинаковы в обеих фазах. Тогда давления в фазах определяются следующими выражениями:

$$P_i = P_{i0} + p' = P_a - \rho_i^0 gz + p', \qquad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

где p' — волновое возмущение давления. Подставляя (1.2) в уравнения (1.1), а также учитывая постоянство ρ_i^0, получаем систему уравнений для описания волнового движения смеси

$$\begin{gathered} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \boldsymbol{v}_i) = 0, \\ \alpha_i \rho_i^0 \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\alpha_i \nabla p' + (-1)^i R\alpha_1\alpha_2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2), \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{gathered} \tag{1.3}$$

На свободной поверхности $z = \xi(t, x, y)$ в теории поверхностных волн для однофазных жидкостей ставятся кинематическое и динамическое условия [4], которые следуют из условий отсутствия потока массы через поверхность и непрерывности потока импульса соответственно. Запишем эти условия для рассматриваемого случая. Условие отсутствия потока массы через часть свободной поверхности $z = \alpha_i(t, x, y, \xi)\xi(t, x, y)$, занимаемую i-й фазой, имеет вид [3]

$$\alpha_i \rho_i^0 (v_{in} - V_n) = 0 \quad \text{или} \quad \alpha_i (v_{in} - V_n) = 0,$$

где v_{in} — нормальная проекция скорости i-й фазы; V_n — нормальная скорость свободной поверхности. Тогда условие отсутствия потока массы смеси через единую для обеих фаз поверхность $z = \alpha_1\xi + \alpha_2\xi = \xi(t, x, y)$ запишется в виде

$$\alpha_1(v_{1n} - V_n) + \alpha_2(v_{2n} - V_n) = 0$$

или

$$\alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n} = V_n \qquad \text{при} \quad z = \xi(t, x, y). \tag{1.4}$$

Здесь $\alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n}$ — нормальная проекция объемной скорости смеси. Условие (1.4) является кинематическим условием для рассматриваемого случая. Равенство потоков импульсов на части свободной поверхности $z = \alpha_i\xi$, занимаемой i-й фазой, имеет вид [3] $\alpha_i(\rho_i^0 v_{in}(v_{in} - V_n) + P_i - P_a) = 0$. С учетом отсутствия потока i-й фазы это равенство равносильно следующему: $\alpha_i(P_i - P_a) = 0$. Пренебрегая нормальными составляющими вязких напряжений на межфазных поверхностях, для единой поверхности смеси $z = \alpha_1\xi + \alpha_2\xi = \xi(t, x, y)$ получаем условие $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a$. Подставляя в это уравнение выражения (1.2), получим динамическое условие для двухфазной смеси

$$p' - (\alpha_1\rho_1^0 + \alpha_2\rho_2^0)gz = 0 \qquad \text{при } z = \xi(t, x, y). \tag{1.5}$$

Величина $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a + p' - (\alpha_1\rho_1^0 + \alpha_2\rho_2^0)gz$ является давлением смеси. Поэтому динамическое условие можно сформулировать как равенство давления смеси и атмосферного давления на свободной поверхности: $P = P_a$. Аналогичные условия на поверхности раздела жидкость — жидкость со взвесями приведены в работе [2]. Следует отметить, что если в кинематических условиях оставить постоянный множитель ρ_i^0 , то условие для смеси (1.4) будет сформулировано для среднемассовой скорости смеси $(\rho_1\boldsymbol{v}_1 + \rho_2\boldsymbol{v}_2)/(\rho_1 + \rho_2)$.

В этом случае из решения волновой задачи [5] следует, что смесь совершает незатухающие волновые движения с частотой гравитационной волны, как идеальная жидкость.

Полагая, что поток массы смеси через горизонтальную поверхность твердого основания отсутствует, на дне примем условие непротекания для каждой фазы [3]

$$v_{in} = 0, \qquad i = 1, 2 \qquad \text{при} \quad z = -l. \tag{1.6}$$

Уравнения в слое смеси (1.3) и граничные условия (1.4)–(1.6) образуют замкнутую систему для определения неизвестных $\boldsymbol{v}_i$, α_i, p', ξ.

2. Краевая задача о плоских волнах. Рассмотрим плоскопараллельное волновое движение жидкости в плоскости xz. Все величины зависят только от переменных t, x, z и $\boldsymbol{v}_i = (v_{ix}, 0, v_{iz})$. Пусть на свободной поверхности в положительном направлении оси x распространяется волна длиной λ ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число), причем длина волны много больше характерного размера частиц дисперсной фазы: $\lambda \gg a$. Для того чтобы система уравнений (1.3) описывала волновое движение смеси, введем волновое возмущение концентрации дисперсной фазы

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_0 - \alpha'(t, x, z), \qquad \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha'(t, x, z). \tag{2.1}$$

Здесь α_0, α' — концентрация дисперсной фазы в покоящемся слое смеси и ее волновое возмущение соответственно. Будем считать, что в невозмущенном слое смеси дисперсная фаза распределена равномерно, т. е. $\alpha_0 = \text{const}$. Тогда для определения неизвестных α_1, α_2 необходимо найти $\alpha'(t, x, z)$.

Введем следующие безразмерные переменные и величины:

$$\begin{gathered} t^* = kct, \quad x^* = kx, \quad z^* = kz, \quad \zeta = k\xi, \quad h = kl, \\ \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i/c, \quad p = p'/(\rho^0 c^2), \quad r = R/(\rho^0 ck), \quad \mu_i = \rho_i^0/\rho^0, \quad \gamma = \alpha'/\alpha_0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $\rho^0 = (1-\alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0$ — плотность покоящейся смеси; c — фазовая скорость волны, которая подлежит определению ($ck = \omega$ — частота волны); звездочкой отмечены безразмерные переменные (далее звездочка опущена). Подставляя выражения (2.1) и безразмерные величины (2.2) в уравнения (1.3) и граничные условия (1.4)–(1.6), получим следующую краевую задачу.

В области, занятой смесью, выполняются уравнения

$$\begin{gathered} -\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \Big(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\Big)\Big(\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\Big) - u_{1x}\,\frac{\partial\gamma}{\partial x} - u_{1z}\,\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1+\gamma)\Big(\frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\Big) + u_{2x}\,\frac{\partial\gamma}{\partial x} + u_{2z}\,\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0, \\ \mu_1\Big(\frac{\partial u_{1x}}{\partial t} + u_{1x}\,\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + u_{1z}\,\frac{\partial u_{1x}}{\partial z}\Big) + \frac{\partial p}{\partial x} - r\alpha_0(1+\gamma)(u_{2x} - u_{1x}) = 0, \\ \mu_1\Big(\frac{\partial u_{1z}}{\partial t} + u_{1x}\,\frac{\partial u_{1z}}{\partial x} + u_{1z}\,\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\Big) + \frac{\partial p}{\partial z} - r\alpha_0(1+\gamma)(u_{2z} - u_{1z}) = 0, \\ \mu_2\Big(\frac{\partial u_{2x}}{\partial t} + u_{2x}\,\frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + u_{2z}\,\frac{\partial u_{2x}}{\partial z}\Big) + \frac{\partial p}{\partial x} + r\alpha_0\Big(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\Big)(u_{2x} - u_{1x}) = 0, \\ \mu_2\Big(\frac{\partial u_{2z}}{\partial t} + u_{2x}\,\frac{\partial u_{2z}}{\partial x} + u_{2z}\,\frac{\partial u_{2z}}{\partial z}\Big) + \frac{\partial p}{\partial z} + r\alpha_0\Big(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\Big)(u_{2z} - u_{1z}) = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

При $z = \zeta(t, x)$ на свободной поверхности заданы граничные условия

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \alpha_0\Big(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\Big)u_{1z} + \alpha_0(1+\gamma)u_{2z} - \alpha_0\Big[\Big(\frac{1}{\alpha_0} - 1 - \gamma\Big)u_{1x} + (1+\gamma)u_{2x}\Big]\frac{\partial\zeta}{\partial x}; \tag{2.4}$$

$$p - \nu^2\zeta[1 - \alpha_0\gamma(\mu_1 - \mu_2)] = 0, \qquad \nu^2 = g/(kc^2). \tag{2.5}$$

На дне при $z = -h$

$$u_{iz} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{2.6}$$

Уравнения (2.3) и граничные условия (2.4)–(2.6) представляют собой нелинейную краевую задачу для определения скоростей волнового движения фаз, возмущений давления и концентрации, а также формы свободной поверхности.

Рассмотрим линейный вариант задачи (2.3)–(2.6). Положим, что амплитуда поверхностной волны мала по сравнению с ее длиной. Тогда граничные условия на свободной поверхности $z = \zeta(t, x)$ можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$. Для этого все функции, входящие в уравнения (2.4), (2.5), разложим в ряд Маклорена в окрестности $z = 0$, например:

$$u_{1z}(t, x, \zeta) = u_{1z}(t, x, 0) + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\Big|_{z=0}\zeta + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial z^2}\Big|_{z=0}\zeta^2 + \ldots .$$

Кроме того, из обезразмеривания (2.2) следует, что скорости волнового движения фаз и волновые возмущения одного порядка с величиной ζ, т. е. малы.

Учитывая малость входящих в систему (2.3)–(2.5) неизвестных величин, в уравнениях (2.3) и разложенных в ряд в окрестности $z = 0$ граничных условиях (2.4), (2.5) оставим только линейные по отношению к ним слагаемые. Таким образом, получаем линейную задачу

$$\begin{gathered} -\alpha_0\frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0)\Big(\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z}\Big) = 0, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial u_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{2z}}{\partial z} = 0, \\ \mu_1\frac{\partial u_{1x}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - r\alpha_0(u_{2x} - u_{1x}) = 0, \qquad \mu_1\frac{\partial u_{1z}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - r\alpha_0(u_{2z} - u_{1z}) = 0, \\ \mu_2\frac{\partial u_{2x}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + r(1 - \alpha_0)(u_{2x} - u_{1x}) = 0, \qquad \mu_2\frac{\partial u_{2z}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + r(1 - \alpha_0)(u_{2z} - u_{1z}) = 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

При $z = 0$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = (1 - \alpha_0)u_{1z} + \alpha_0 u_{2z}; \tag{2.8}$$

$$p - \nu^2\zeta = 0. \tag{2.9}$$

При $z = -h$ условия останутся прежними, т. е. в виде (2.6).

Решение задачи (2.7)–(2.9) должно удовлетворять ряду требований. Наличие относительного движения фаз и сил межфазного взаимодействия обусловливает диссипативный процесс — затухание волнового движения. В отсутствие дисперсной фазы ($\alpha_0 = 0$) или при одинаковых истинных плотностях фаз ($\rho_1^0 = \rho_2^0$) решение задачи должно сводиться к известным волновым решениям для жидкостей [4]. Компоненты скоростей фаз u_{1z} и u_{2z} должны удовлетворять граничным условиям на дне (2.6). В случае распространения на свободной поверхности слоя прогрессивных волн решение системы уравнений (2.7), удовлетворяющее указанным выше требованиям, следует искать в виде

$$\begin{gathered} u_{ix} = (\operatorname{ch}(z + h)/\operatorname{sh} h)(A_i\sin(x - t) + B_i\cos(x - t))\exp(-bt), \\ u_{iz} = (\operatorname{sh}(z + h)/\operatorname{sh} h)(C_i\sin(x - t) + D_i\cos(x - t))\exp(-bt), \\ p = (\operatorname{ch}(z + h)/\operatorname{sh} h)(K\sin(x - t) + L\cos(x - t))\exp(-bt), \\ \gamma = (\operatorname{ch}(z + h)/\operatorname{sh} h)(M\sin(x - t) + N\cos(x - t))\exp(-bt). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь $b = \beta/\omega$ — безразмерный декремент затухания волны; β — размерный декремент; коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i, K, L, M, N — постоянные, подлежащие определению. Подставляя выражения (2.10) в уравнения (2.7), получим систему двенадцати линейных однородных уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$-(1-\alpha_0)B_1+(1-\alpha_0)C_1+b\alpha_0 M-\alpha_0 N=0, \quad (1-\alpha_0)A_1+(1-\alpha_0)D_1+\alpha_0 M+b\alpha_0 N=0,$$
$$-B_2+C_2-bM+N=0, \qquad A_2+D_2-M-bN=0,$$
$$(\alpha_0 r-b\mu_1)A_1-\alpha_0 rA_2+\mu_1 B_1-L=0, \quad -\mu_1 A_1+(\alpha_0 r-b\mu_1)B_1-\alpha_0 rB_2+K=0,$$
$$(\alpha_0 r-b\mu_1)C_1-\alpha_0 rC_2+\mu_1 D_1+K=0, \quad -\mu_1 C_1+(\alpha_0 r-b\mu_1)D_1-\alpha_0 rD_2+L=0,$$
$$-(1-\alpha_0)rA_1+((1-\alpha_0)r-b\mu_2)A_2+\mu_2 B_2-L=0,$$
$$-\mu_2 A_2-(1-\alpha_0)rB_1+((1-\alpha_0)r-b\mu_2)B_2+K=0,$$
$$-(1-\alpha_0)rC_1+((1-\alpha_0)r-b\mu_2)C_2+\mu_2 D_2+K=0,$$
$$-\mu_2 C_2-(1-\alpha_0)rD_1+((1-\alpha_0)r-b\mu_2)D_2+L=0.$$

Эта система является системой ранга 10, следовательно, две неизвестные постоянные будут свободными. Коэффициенты при K и L не входят в матрицу, образующую ранг системы, поэтому будем считать их свободными. Остальные неизвестные постоянные определяем как решение системы

$$D_i=-A_i, \quad B_i=C_i, \quad M=0, \quad N=0, \quad A_i=m_iK+n_iL, \quad B_i=-n_iK+m_iL,$$
$$m_1=\frac{1}{1+b^2}\Big(1+\frac{\mu_1\mu_2^2(1-\mu_1)(1+b^2)}{d}\Big), \quad m_2=\frac{1}{1+b^2}\Big(1+\frac{\mu_1^2\mu_2(1-\mu_2)(1+b^2)}{d}\Big),$$
$$n_1=\frac{1}{1+b^2}\Big(-b+\frac{\mu_2(1-\mu_1)(r-b\mu_1\mu_2)(1+b^2)}{d}\Big), \tag{2.11}$$
$$n_2=\frac{1}{1+b^2}\Big(-b+\frac{\mu_1(1-\mu_2)(r-b\mu_1\mu_2)(1+b^2)}{d}\Big), \qquad d=\mu_1^2\mu_2^2+(r-b\mu_1\mu_2)^2.$$

Из выражений (2.10), (2.11) следует, что возмущение концентрации дисперсной фазы в линейном приближении равно нулю и является величиной более высокого порядка малости по сравнению с возмущениями скорости и давления. Так, в работе [2] концентрация полагалась постоянной при постановке задачи.

Для того чтобы определить форму свободной поверхности, необходимо подставить найденные выражения для u_{iz} в уравнение (2.8) и проинтегрировать его. В результате получим

$$\zeta=[(s_1K+s_2L)\sin(x-t)+(-s_2K+s_1L)\cos(x-t)]\exp(-bt)/(1+b^2),$$
$$s_1=\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{(br+(1+b^2)\mu_1\mu_2)(\sigma-\mu_1\mu_2)}{d}, \quad s_2=-\frac{2b}{1+b^2}+\frac{(r-2b\mu_1\mu_2)(\sigma-\mu_1\mu_2)}{d}. \tag{2.12}$$

Здесь и ниже $\sigma=(1-\alpha_0)\mu_2+\alpha_0\mu_1$. Свободные коэффициенты K и L, как и для обычных поверхностных волн [4], можно определить из дополнительных начальных данных.

Из полученного решения (2.10)–(2.12) нетрудно найти выражения волновых возмущений и формы свободной поверхности для бездиссипационного движения смеси, т. е. при $r = 0$. В этом случае $b = 0$, а выражения (2.10), (2.12) совпадают с классическими [4]. Отметим также, что решение системы (2.7) в виде монохроматических волн (только с членами $\sin(x-t)$ или $\cos(x-t)$), как это предложено в работе [2], находить нельзя, так как в этом случае система алгебраических уравнений для коэффициентов имеет только тривиальное решение.

3. Фазовая скорость, частота и декремент затухания волны. Найдем дисперсионное соотношение и уравнение для декремента волны. Подставляя выражения для возмущения давления и свободной поверхности в динамическое условие (2.9) и приравнивая коэффициенты при $\sin(x-t)$ и $\cos(x-t)$, получим

$$K(1+b^2)\operatorname{cth} h = \nu^2(s_1K + s_2L), \qquad L(1+b^2)\operatorname{cth} h = \nu^2(-s_2K + s_1L).$$

Условие существования нетривиального решения этой системы для K и L имеет вид $(1+b^2-s_1\nu^2\operatorname{th} h)^2 + (s_2\nu^2\operatorname{th} h)^2 = 0$, что эквивалентно системе уравнений

$$s_1 = (1+b^2)/(\nu^2\operatorname{th} h), \qquad s_2 = 0, \tag{3.1}$$

которая позволяет определить неизвестную фазовую скорость и декремент затухания волны. Кроме того, используя найденные коэффициенты (3.1), можно записать уточненное выражение для формы свободной поверхности

$$\zeta = \operatorname{cth} h[K\sin(x-t) + L\cos(x-t)]\exp(-bt)/\nu^2.$$

Для того чтобы найти фазовую скорость и декремент затухания, необходимо величины, входящие в уравнения (3.1), записать в размерном виде. При этом уравнения системы принимают громоздкий вид. Чтобы этого избежать, введем вспомогательные величины, имеющие размерность скорости: $r_1 = cr = R/(\rho^0 k)$, $b_1 = cb = \beta/k$, $\nu_1^2 = c\nu^2 = g/k$. С использованием этих величин после несложных преобразований система (3.1) примет вид

$$(c+b_1)^2(r_1 - 2\mu_1\mu_2 b_1) = \nu_1^2\operatorname{th} h,$$
$$2b_1(\mu_1^2\mu_2^2(c^2+b_1^2) + r_1(r_1 - 2\mu_1\mu_2 b_1)) = r_1(\sigma - \mu_1\mu_2)\operatorname{th} h.$$

Разрешая полученную систему относительно c и b_1, получаем уравнения для определения фазовой скорости и декремента затухания волны

$$c^2 = \sigma\nu_1^2\operatorname{th} h/(\mu_1\mu_2) + b_1(3b_1 - 2r_1/(\mu_1\mu_2)); \tag{3.2}$$

$$8\mu_1^2\mu_2^2 b_1^3 - 8\mu_1\mu_2 r_1 b_1^2 + 2(r_1^2 + \sigma\mu_1\mu_2\nu_1^2\operatorname{th} h)b_1 - (\sigma-\mu_1\mu_2)r_1\nu_1^2\operatorname{th} h = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.2) можно записать в виде

$$c^2 = c_g^2 + c_d^2 + c_r^2, \tag{3.2a}$$

где

$$c_g^2 = \nu_1^2\operatorname{th} h = \frac{g}{k}\operatorname{th}(kl), \quad c_d^2 = \frac{\sigma-\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2}\,\nu_1^2\operatorname{th} h = \frac{\alpha_0(1-\alpha_0)(\rho_1^0-\rho_2^0)^2 g\operatorname{th}(kl)}{\rho_1^0\rho_2^0 k},$$

$$c_r^2 = b_1\Big(3b_1 - \frac{2r_1}{\mu_1\mu_2}\Big) = \frac{\beta}{k^2}\Big(3\beta - \frac{2R\rho^0}{\rho_1^0\rho_2^0}\Big).$$

Из (3.2a) легко найти выражение для частоты волны $\omega^2 = c^2k^2$. Величина c_g^2 равна квадрату фазовой скорости гравитационной волны [4], $c_d^2 \geqslant 0$ — добавка к фазовой скорости за счет наличия дисперсной фазы, c_r^2 — добавка, обусловленная силами межфазного взаимодействия. Функция $c_r^2(b_1)$ принимает отрицательные значения при $0 < b_1 < 2r_1/(3\mu_1\mu_2)$ и положительные при $b_1 > 2r_1/(3\mu_1\mu_2)$. Значение декремента затухания $b_1 = 2r_1/(3\mu_1\mu_2)$ является критическим, так как при этом значении силы межфазного взаимодействия не влияют на распространение волны. Значение c_r^2 минимально при $b_1 = r_1/(3\mu_1\mu_2)$: $\min c_r^2 = -r_1^2/(3\mu_1^2\mu_2^2)$. В дальнейшем введем обозначение $|\min c_r^2| = r_1^2/(3\mu_1^2\mu_2^2) = c_{\min}^2$.

Условием существования волн установившегося типа является неотрицательность квадрата фазовой скорости: $c^2 \geqslant 0$. Это условие эквивалентно неотрицательности квадратного многочлена для b_1 в правой части равенства (3.2), а следовательно, неположительности дискриминанта этого многочлена, что выполняется при $\sigma\nu_1^2 \operatorname{th} h \geqslant r_1^2/(3\mu_1\mu_2)$. Это условие можно записать как ограничение на длину волны:

$$3gk \operatorname{th}(kl)(\rho_1^0\rho_2^0 + \alpha_0(1-\alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)^2)/R^2 \geqslant 1. \qquad (3.4)$$

Условие (3.4) можно записать с использованием новых безразмерных величин:

$$W = (c_g^2 + c_d^2)/c_{\min}^2 \geqslant 1. \qquad (3.4а)$$

При $W = 1$ фазовая скорость волны принимает минимальное значение

$$\min c^2 = c_g^2 + c_d^2 - c_{\min}^2 = \sigma\nu_1^2 \operatorname{th} h/(\mu_1\mu_2) - r_1^2/(3\mu_1^2\mu_2^2).$$

Прежде чем найти решение кубического уравнения (3.3), отметим, что все коэффициенты этого уравнения удовлетворяют критерию устойчивости Гурвица [6]. Уравнение (3.3) будем решать с помощью формулы Кардано [7]

$$b_1 = [-\chi/2 + (\chi^2/4 + \psi^3/27)^{1/2}]^{1/3} + [-\chi/2 - (\chi^2/4 + \psi^3/27)^{1/2}]^{1/3} + r_1/(3\mu_1\mu_2), \qquad (3.5)$$

где

$$\psi = (3\sigma\mu_1\mu_2\nu_1^2 \operatorname{th} h - r_1^2)/(12\mu_1^2\mu_2^2) = c_{\min}^2(W-1)/4 = (1/4)\min c^2,$$

$$\chi = r_1[2r_1^2 - 9\mu_1\mu_2(\sigma - 3\mu_1\mu_2)\nu_1^2 \operatorname{th} h]/(216\mu_1^3\mu_2^3) = (3c_{\min}^2)^{3/2}[1 + 3(3c_g^2/c_{\min}^2 - W)/2]/108.$$

Как известно, количество корней зависит от знака величины $Q = \chi^2/4 + \psi^3/27$ [7]. В рассматриваемом случае в силу (3.4а) $Q > 0$ при $W > 1$, а следовательно, формула (3.5) дает один вещественный и два комплексно-сопряженных корня. Поэтому решением уравнения в случае $W > 1$ будет только один корень — вещественный корень (3.5). Величина Q может быть равна нулю, только когда одновременно $\psi = 0$ и $\chi = 0$, что выполняется при $W = 1$ и $c_g^2 = c_{\min}^2/9$ (или $c_d^2 = 8c_{\min}^2/9$). Равенство $Q = 0$ соответствует минимальной фазовой скорости и значению декремента $b_1 = r_1/(3\mu_1\mu_2)$, причем $c^2 = \min c^2 = 0$.

Приведем окончательные размерные выражения для давления смеси и формы свободной поверхности:

$$P = P_a - \rho^0 gz + \rho^0 c^2 \operatorname{ch}(k(z+l))[K\sin(k(x-ct)) + L\cos(k(x-ct))]\exp(-\beta t)/\operatorname{sh}(kl),$$

$$\xi = c^2 \operatorname{cth}(kl)[K\sin(k(x-ct)) + L\cos(k(x-ct))]\exp(-\beta t)/g,$$

где c^2 определяется по формуле (3.2).

4. Пример расчетов. Для иллюстрации полученных решений (3.2а) и (3.5) проведены расчеты параметров волнового движения в слое смеси толщиной $l = 100$ м, вызванного распространением на свободной поверхности волны длиной 1 м. Предполагалось, что силы межфазного взаимодействия представлены только силой вязкого трения Стокса, т. е. $R = 9\eta/(2a^2)$. Для недеформируемых шариков радиуса $a = 10^{-2}$ м при $\eta = 1{,}004 \cdot 10^{-3}$ кг/(м $\cdot$ с) эмпирический коэффициент $R = 45$ кг/(м$^3 \cdot$ с).

На рис. 1 представлена зависимость фазовой скорости от декремента затухания волны. Как указано выше, с увеличением значения β фазовая скорость сначала уменьшается до значения $c_{\min}$ (в данном случае $c_{\min} \approx 1{,}270\,99$ м/с), что соответствует $\beta = R\rho^0/(3\rho_1^0\rho_2^0)$ (в данном случае $\beta \approx 0{,}01$ с$^{-1}$), а затем увеличивается, причем при $\beta = 2R\rho^0/(3\rho_1^0\rho_2^0)$ (в данном случае $\beta \approx 0{,}02$ с$^{-1}$) действие межфазного трения не проявляется.

На рис. 2 показана зависимость декремента затухания от плотности примесей. Из рис. 2 следует, что затухание волны происходит намного быстрее, если дисперсная фаза менее плотная, чем несущая среда.

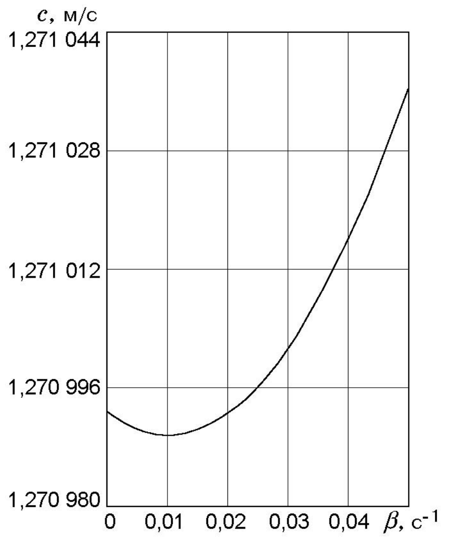

Рис. 1

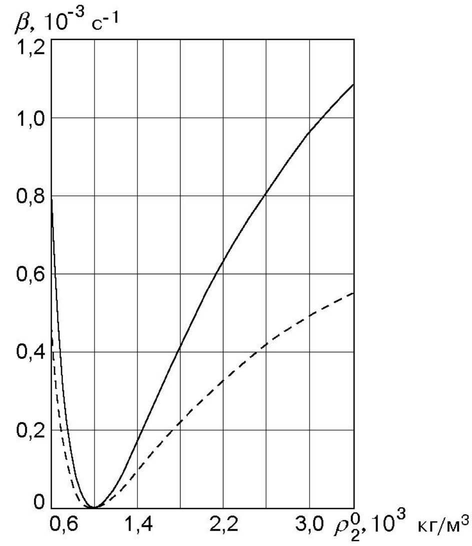

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость фазовой скорости волны c от декремента затухания β при $\rho_2^0 = 1500$ кг/м^3, $\alpha_0 = 0{,}1$

Рис. 2. Зависимость декремента затухания β от истинной плотности второй фазы ρ_2^0:
сплошная кривая — $\alpha_0 = 0{,}1$, штриховая — $\alpha_0 = 0{,}05$

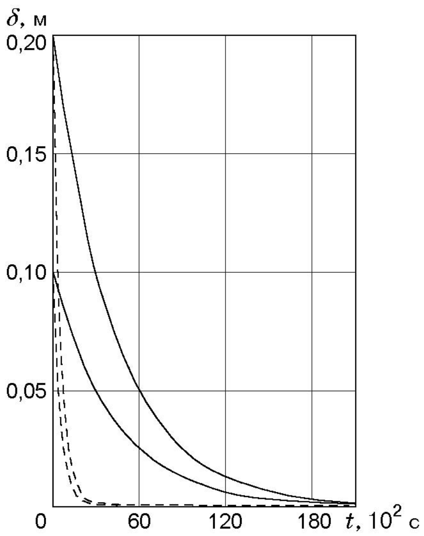

Рис. 3. Зависимость амплитуды волны δ от времени t при $\alpha_0 = 0{,}1$:
сплошные кривые — $\rho_2^0 = 1500$ кг/м^3, штриховые — $\rho_2^0 = 500$ кг/м^3

Из полученного выражения для формы свободной поверхности можно вывести формулу для амплитуды волны. При $K = L$ амплитуда определяется следующим образом:

$$\delta = \max \xi(t,x) - \min \xi(t,x) = \xi(t,x_0) - \xi(t,x_1) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cth}\,(kl) K \exp(-\beta t)/\nu^2,$$

$$x_0 = \lambda/8 + ct, \qquad x_1 = 5\lambda/8 + ct.$$

Используя это выражение и (3.5), нетрудно проверить, что для примесей с плотностью $\rho_2^0 < \rho_1^0$ время затухания волны в несколько раз меньше, чем в случае $\rho_2^0 > \rho_1^0$.

На рис. 3 показано уменьшение амплитуды волны при $K = 1$, $\alpha_0 = 0{,}1$. Начальные значения амплитуды равны 0,1 и 0,2 м. Из рис. 3 следует, что волны на свободной поверхности смеси с более легкими по сравнению с несущей жидкостью частицами затухают намного быстрее, чем волны с более тяжелыми частицами. Так, для случая, представленного на рис. 3, время затухания различается примерно в 7 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Louared M., Saidi A.** Pointwise control a particle analysis for parabolic equation // Proc. of the 7th Intern. symp. fluid dynamic, Beijing, Sept. 15–19, 1997. S. l., 1997. P. 228–234.
2. **Лобов Н. И., Любимов Д. В., Любимова Т. П.** Поведение двухслойной системы жидкость — взвесь в вибрационном поле // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 6. С. 55–62.
3. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.
4. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
5. **Баринов В. А., Бутакова Н. Н.** Поверхностные волны на слое дисперсной жидкости // Математическое и информационное моделирование. Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та, 2000. С. 57–63.
6. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теорий функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
7. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 3/VII 2001 г.,
в окончательном варианте — 13/II 2002 г.