МЕХАНИКА

УДК 532.59:532.517

Ю. З. Алешков, В. А. Баринов , Н. Н. Бутакова

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА СЛОЕ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрена нелинейная краевая задача о плоских поверхностных волнах на слое двухфазной среды. Задача решена с точностью до второго приближения по малому параметру. Найдены фазовая скорость, частота и декремент затухания волны, определено волновое возмущение дисперсной фазы. Исследовано влияние присоединенной массы дисперсной фазы на распространение волны.

В рамках многоскоростной модели линейная задача о волновом движении двухфазной (дисперсной) среды, вызванном распространением по свободной поверхности волны, решена в статье [1]. В этой работе установлено, что волновое возмущение концентрации дисперсной фазы является величиной более высокого порядка малости по сравнению с другими возмущениями. В работах [2,3] эта задача решена в нелинейной постановке с точностью до второго приближения, что позволило определить возмущение концентрации. В вышеуказанных работах межфазное взаимодействие моделировалось только как межфазное трение. В настоящей работе приводится решение нелинейной задачи, в которой учитывается присоединенная масса дисперсной фазы.

1. Математическая модель. Рассмотрим слой двухфазной смеси постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Сверху слой ограничен свободной поверхностью. Предполагается, что несущая фаза ($i = 1$) — идеальная несжимаемая жидкость, вязкость проявляется только на межфазной границе, дисперсная ($i = 2$) — недеформируемые частицы. Движение такой среды в отсутствие тепло- и массообмена описывается системой уравнений [4]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t^*} + \bigtriangledown (\rho_i \mathbf{v}_i^*) = 0,$$

$$\rho_i \frac{d\mathbf{v}_i^*}{dt^*} = -\alpha_i \bigtriangledown P_i + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 \rho_1^0 \frac{s}{2} \left(\frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} - \frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} \right) + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 R (\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*) + \rho_i \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho_i^0 = \mathrm{const}, \quad i = 1, 2. \quad (1.1)$$

© Ю. З. Алешков, В. А. Баринов , Н. Н. Бутакова, 2003

Здесь α_i, $\mathbf{v}_i^*$, P_i, ρ_i, ρ_i^0 — объемная концентрация, вектор скорости, давление, приведенная и истинная плотность i-й фазы; $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести; звездочкой (где это необходимо) обозначены размерные величины. Эмпирический коэффициент R характеризует силу вязкого трения Стокса, вызванную несовпадением скоростей фаз. Например, для сферических частиц радиуса a его значение принимается равным $R = 9\eta/2a^2$, где η — коэффициент динамической вязкости жидкости. Безразмерный коэффициент s принимает значение 1 или 0 в зависимости от того, учитывается или нет присоединенная масса дисперсной фазы.

Введем декартову систему координат так, чтобы невозмущенная свободная поверхность совпадала с плоскостью $z^* = 0$, а дно — с плоскостью $z^* = -l^*$ (l^* — глубина слоя); ось z^* направлена вертикально вверх. Для того, чтобы система (1.1) описывала волновое движение смеси, необходимо ввести волновые возмущения концентрации и давления. Полагая, что в отсутствие волны среда находится в покое, из уравнений движения (1.1) при $\mathbf{v}_i^* = 0$ и условия равенства давлений на невозмущенной свободной поверхности $z^* = 0$ находим гидростатические составляющие давлений $P_{i0} = P_a - \rho_i^0 g z^*$ (P_a — атмосферное давление). Считая, что возмущения давления, вызванные распространением волны одинаковы в обеих фазах и равны p' [1], получаем

$$P_i = P_a - \rho_i^0 g z^* + p', \quad i = 1, 2. \tag{1.2}$$

Предполагая, что в невозмущенном слое смеси дисперсная фаза распределена равномерно, объемные концентрации фаз можно представить в виде

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_0 - \alpha', \qquad \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha', \tag{1.3}$$

где $\alpha_0 = \mathrm{const}$ и $\alpha' = \alpha'(t^*, x^*, y^*, z^*)$ — концентрация дисперсной фазы в покоящемся слое смеси и ее волновое возмущение соответственно. Подставляя (1.2) и (1.3) в уравнения (1.1), получаем систему уравнений для описания волнового движения смеси

$$-\frac{\partial \alpha'}{\partial t^*} + (1 - \alpha_0 - \alpha') \bigtriangledown \mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_1^* \bigtriangledown \alpha' = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t^*} + (\alpha_0 + \alpha') \bigtriangledown \mathbf{v}_2^* + \mathbf{v}_2^* \bigtriangledown \alpha' = 0,$$

$$\left(\rho_1^0 + \frac{1}{2}\rho_1^0 (\alpha_0 + \alpha')\right) \frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} - \frac{1}{2}\rho_1^0 (\alpha_0 + \alpha') \frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} - R(\alpha_0 + \alpha')(\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*) + \bigtriangledown p' = 0,$$

$$\left(\rho_2^0 + \frac{1}{2}\rho_1^0 (1 - \alpha_0 - \alpha')\right) \frac{d\mathbf{v}_2^*}{dt^*} - \frac{1}{2}\rho_1^0 (1 - \alpha_0 - \alpha') \frac{d\mathbf{v}_1^*}{dt^*} + {}$$
$$+ R(1 - \alpha_0 - \alpha')(\mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*) + \bigtriangledown p' = 0. \tag{1.4}$$

На свободной поверхности среды $z^* = \xi(t^*, x^*)$ должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия [1]:

$$\alpha_1 \mathbf{v}_{1n}^* + \alpha_2 \mathbf{v}_{2n}^* = V_n, \qquad P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a,$$

где $\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^*$ и V_n — нормальные проекции скорости смеси и свободной поверхности. С учетом равенств (1.2) и (1.3) кинематическое и динамическое условия, в случае плоскопараллельного (в плоскости $x^* z^*$) движения, принимают вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial t^*} - (1-\alpha_0-\alpha')v_{1z}^* - (\alpha_0+\alpha')v_{2z}^* + \frac{\partial\xi}{\partial x^*}\left[(1-\alpha_0-\alpha')v_{1x}^* + (\alpha_0+\alpha')v_{2x}^*\right] = 0,$$

$$p' - \left[\rho_1^0(1-\alpha_0-\alpha') + \rho_2^0(\alpha_0+\alpha')\right]gz^* = 0, \quad z^* = \xi(t^*, x^*), \tag{1.5}$$

где $\rho^0 = (1-\alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0$ — плотность покоящейся смеси. Считая, что поток массы через твердую поверхность горизонтального основания отсутствует, на дне получаем условие непротекания для каждой фазы [4]:

$$v_{in}^* = 0, \quad i = 1, 2, \quad z^* = -l^*. \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.4)–(1.6) образует замкнутую математическую модель для определения неизвестных скоростей волнового движения фаз, возмущения давления и концентрации, а также формы свободной поверхности.

2. Краевая задача о плоских волнах. Пусть по свободной поверхности слоя в положительном направлении оси x^* распространяется волна длины λ. Для прогрессивных волн принимается [5], что переменная x^* может входить в решение только в комбинации $x^* - c^*t^*$, где c^* — фазовая скорость волны, подлежащая определению. Длина волны много больше характерного размера дисперсных частиц ($\lambda \gg a$) и высоты волны ($\lambda \gg \xi_{\max}$). Последнее условие позволяет искать решение в виде разложения по малому амплитудному параметру $\varepsilon = k\xi_{\max}$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Предполагаем, что волна периодическая по x^* и плоскость $z^* = 0$ проходит вдоль среднего уровня волновой поверхности. Это равносильно выполнению следующих условий [5]:

$$\xi\left(t^*, x^* + \lambda\right) = \xi\left(t^*, x^*\right), \qquad \int_0^\lambda \xi\left(t^*, x^*\right)\, dx^* = 0. \tag{2.1}$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{gathered} t^* = t/kc^*, \quad x^* = x/k, \quad z^* = z/k, \quad l^* = l/k, \quad \rho_i^0 = \rho^0\mu_i, \\ R = \rho^0 k c_0 r, \quad \alpha' = \varepsilon\alpha_0\gamma, \quad \xi = \varepsilon\zeta/k, \\ \mathbf{v}_i^* = \varepsilon c_0 \mathbf{v}_i, \quad p' = \varepsilon\rho^0 c_0^2 p, \quad c^* = c_0 c, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где c_0 — фазовая скорость, соответствующая линейной задаче. Подставляя (2.2) в (1.4)–(1.6), (2.1), получаем следующую нелинейную краевую задачу.

В области, занятой смесью, выполняются уравнения

$$-\alpha_0 c\frac{\partial\gamma}{\partial t} + (1-\alpha_0)\left[\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\right] - \varepsilon\alpha_0\left\{v_{1x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + v_{1z}\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \gamma\left[\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\right]\right\} = 0,$$

$$c\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} + \varepsilon\left\{v_{2x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + v_{2z}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \gamma\left[\frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z}}{\partial z}\right]\right\} = 0,$$

$$\begin{gathered} \left(\mu_1 + \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\right)c\frac{\partial v_{1m}}{\partial t} - \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0 c\frac{\partial v_{2m}}{\partial t} - r\alpha_0(v_{2m} - v_{1m}) + \frac{\partial p}{\partial m} + \\ + \varepsilon\left\{\left(\mu_1 + \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\right)\left[v_{1x}\frac{\partial v_{1m}}{\partial x} + v_{1z}\frac{\partial v_{1m}}{\partial z}\right] - r\alpha_0\gamma(v_{2m} - v_{1m}) - \right. \\ \left. - \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\left[v_{2x}\frac{\partial v_{2m}}{\partial x} + v_{2z}\frac{\partial v_{2m}}{\partial z}\right] - \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\gamma c\left(\frac{\partial v_{2m}}{\partial t} - \frac{\partial v_{1m}}{\partial t}\right)\right\} + \end{gathered}$$

$$+\varepsilon^2\frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\gamma\left[v_{1x}\frac{\partial v_{1m}}{\partial x}+v_{1z}\frac{\partial v_{1m}}{\partial z}-v_{2x}\frac{\partial v_{2m}}{\partial x}-v_{2z}\frac{\partial v_{2m}}{\partial z}\right]=0,$$

$$\begin{gathered}\left(\mu_2+\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right)c\frac{\partial v_{2m}}{\partial t}-\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)c\frac{\partial v_{1m}}{\partial t}+r(1-\alpha_0)(v_{2m}-v_{1m})+\\ +\frac{\partial p}{\partial m}+\varepsilon\left\{\left(\mu_2+\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right)\left[v_{2x}\frac{\partial v_{2m}}{\partial x}+v_{2z}\frac{\partial v_{2m}}{\partial z}\right]-\right.\\ -r\alpha_0\gamma(v_{2m}-v_{1m})-\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\left[v_{1x}\frac{\partial v_{1m}}{\partial x}+v_{1z}\frac{\partial v_{1m}}{\partial z}\right]-\\ \left.-\frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\gamma c\left(\frac{\partial v_{2m}}{\partial t}-\frac{\partial v_{1m}}{\partial t}\right)\right\}+\varepsilon^2\frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\gamma\left[v_{1x}\frac{\partial v_{1m}}{\partial x}+v_{1z}\frac{\partial v_{1m}}{\partial z}-\right.\\ \left.-v_{2x}\frac{\partial v_{2m}}{\partial x}-v_{2z}\frac{\partial v_{2m}}{\partial z}\right]=0,\quad m=x,z. \qquad (2.3)\end{gathered}$$

На свободной поверхности $z=\varepsilon\zeta(t,x)$ заданы граничные условия

$$\begin{gathered}c\frac{\partial\zeta}{\partial t}-(1-\alpha_0)v_{1z}-\alpha_0v_{2z}+\\ +\varepsilon\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[(1-\alpha_0)v_{1x}+\alpha_0v_{2x}\right]-\alpha_0\gamma(v_{2z}-v_{1z})\right\}+\varepsilon^2\alpha_0\gamma\frac{\partial\zeta}{\partial x}(v_{2x}-v_{1x})=0,\\ p-\nu_0^2\zeta+\varepsilon\alpha_0(\mu_1-\mu_2)\nu_0^2\gamma\zeta=0,\quad \nu_0^2=g/kc_0^2. \qquad (2.4)\end{gathered}$$

На дне $z=-l$

$$v_{iz}=0,\quad i=1,2. \qquad (2.5)$$

Условия (2.1) в безразмерных величинах примут вид

$$\zeta(t,x+2\pi)=\zeta(t,x),\qquad \int_0^{2\pi}\zeta(t,x)dx=0. \qquad (2.6)$$

Граничные условия (2.4) заданы на неизвестной поверхности $z=\varepsilon\zeta(t,x)$. Разложим неизвестные функции, входящие в (2.4), в ряд Тейлора в окрестности невозмущенной свободной поверхности $z=0$, например,

$$v_{1z}=v_{1z}(t,x,0)+\left.\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\right|_{z=0}\varepsilon\zeta+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2v_{1z}}{\partial z^2}\right|_{z=0}\varepsilon^2\zeta^2+\ldots,$$

и подставим эти разложения в граничные условия (2.4). Выпишем граничные условия при $z=0$ с точностью до ε^1.

$$\begin{gathered}c\frac{\partial\zeta}{\partial t}-(1-\alpha_0)v_{1z}-\alpha_0v_{2z}+\varepsilon\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[(1-\alpha_0)v_{1x}+\alpha_0v_{2x}\right]-\right.\\ \left.\alpha_0\gamma(v_{2z}-v_{1z})-\zeta\left[(1-\alpha_0)\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}+\alpha_0\frac{\partial v_{2z}}{\partial z}\right]\right\}=0,\quad z=0.\end{gathered}$$

$$p-\nu_0^2\zeta+\varepsilon\zeta\left\{(\mu_1-\mu_2)\nu_0^2\gamma+\frac{\partial p}{\partial z}\right\}=0,\quad z=0. \qquad (2.7)$$

Решение краевой задачи будем искать в виде рядов по степеням малого параметра ε:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{v}_{ik}, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k, \quad \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \gamma_k,$$
$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \zeta_k, \quad c = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k. \tag{2.8}$$

Подставляя ряды (2.8) в (2.3), (2.5)–(2.7) и выписывая коэффициенты при ε^0 и ε^1, получаем системы уравнений и граничных условий для определения решения в первом и во втором приближениях соответственно. Для определения первого приближения имеем:

$$-\alpha_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + (1-\alpha_0)\left[\frac{\partial v_{1x0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z0}}{\partial z}\right] = 0,$$
$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z0}}{\partial z} = 0,$$
$$\left(\mu_1 + \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\right)\frac{\partial v_{1m0}}{\partial t} - \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\frac{\partial v_{2m0}}{\partial t} - r\alpha_0(v_{2m0} - v_{1m0}) + \frac{\partial p_0}{\partial m} = 0,$$

$$\left(\mu_2 + \frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\right)\frac{\partial v_{2m0}}{\partial t} - \frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\frac{\partial v_{1m0}}{\partial t} +$$
$$+ r(1-\alpha_0)(v_{2m0} - v_{1m0}) + \frac{\partial p_0}{\partial m} = 0,$$
$$m = x, z, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} = (1-\alpha_0)v_{1z0} + \alpha_0 v_{2z0}, \quad z = 0,$$
$$p_0 - \nu_0^2\zeta_0 = 0, \quad z = 0, \tag{2.10}$$
$$v_{iz0} = 0, \quad i = 1,2, \quad z = -l, \tag{2.11}$$
$$\zeta_0(t, x + 2\pi) = \zeta_0(t,x), \qquad \int_0^{2\pi} \zeta_0(t,x)\, dx = 0. \tag{2.12}$$

Во втором приближении задача имеет вид

$$-\alpha_0 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + (1-\alpha_0)\left[\frac{\partial v_{1x1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z}\right] -$$
$$-\alpha_0\left[c_1\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \gamma_0\left[\frac{\partial v_{1x1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1z1}}{\partial z}\right] + v_{1x0}\frac{\partial \gamma_0}{\partial x} + v_{1z0}\frac{\partial \gamma_0}{\partial z}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial v_{2x1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z1}}{\partial z} + c_1\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} + \gamma_0\left[\frac{\partial v_{2x1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2z1}}{\partial z}\right] + v_{2x0}\frac{\partial \gamma_0}{\partial x} + v_{2z0}\frac{\partial \gamma_0}{\partial z} = 0,$$

$$\left(\mu_1 + \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\right)\frac{\partial v_{1m1}}{\partial t} - \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\frac{\partial v_{2m1}}{\partial t} - r\alpha_0(v_{2m1} - v_{1m1}) + \frac{\partial p_1}{\partial m} +$$
$$+ c_1\left[\left(\mu_1 + \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\right)\frac{\partial v_{1m0}}{\partial t} - \frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\frac{\partial v_{2m0}}{\partial t}\right] +$$

$$+\Big(\mu_1+\frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\Big)\left[v_{1x0}\frac{\partial v_{1m0}}{\partial x}+v_{1z0}\frac{\partial v_{1m0}}{\partial z}\right]-r\alpha_0\gamma_0(v_{2m0}-v_{1m0})-$$
$$-\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\left[v_{2x0}\frac{\partial v_{2m0}}{\partial x}+v_{2z0}\frac{\partial v_{2m0}}{\partial z}\right]-\frac{1}{2}\mu_1\alpha_0\gamma_0\left(\frac{\partial v_{2m0}}{\partial t}-\frac{\partial v_{1m0}}{\partial t}\right)=0,$$

$$\Big(\mu_2+\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\Big)\frac{\partial v_{2m1}}{\partial t}-\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\frac{\partial v_{1m1}}{\partial t}+$$
$$+r(1-\alpha_0)(v_{2m1}-v_{1m1})+\frac{\partial p_1}{\partial m}+$$
$$+c_1\left[\Big(\mu_2+\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\Big)\frac{\partial v_{2m0}}{\partial t}-\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\frac{\partial v_{2m0}}{\partial t}\right]+$$
$$+\Big(\mu_2+\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\Big)\left[v_{2x0}\frac{\partial v_{2m0}}{\partial x}+v_{2z0}\frac{\partial v_{2m0}}{\partial z}\right]-$$
$$-r\alpha_0\gamma_0(v_{2m0}-v_{1m0})-\frac{s}{2}\mu_1(1-\alpha_0)\left[v_{1x0}\frac{\partial v_{1m0}}{\partial x}+v_{1z0}\frac{\partial v_{1m0}}{\partial z}\right]-$$
$$-\frac{s}{2}\mu_1\alpha_0\gamma_0\left(\frac{\partial v_{2m0}}{\partial t}-\frac{\partial v_{1m0}}{\partial t}\right)=0,\quad m=x,z. \tag{2.13}$$

На свободной поверхности выполняются кинематическое и динамическое граничные условия

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}-(1-\alpha_0)v_{1z1}-\alpha_0 v_{2z1}+c_1\frac{\partial \zeta_0}{\partial t}-$$
$$-\alpha_0\gamma_0(v_{2z0}-v_{1z0})+\frac{\partial \zeta_0}{\partial x}\big[(1-\alpha_0)v_{1x0}+\alpha_0 v_{2x0}\big]=0,\quad z=0,$$

$$p_1-\nu_0^2\zeta_1+(\mu_1-\mu_2)\nu_0^2\gamma_0\zeta_0+\frac{\partial p_0}{\partial z}\zeta_0=0,\quad z=0. \tag{2.14}$$

На дне заданы условия непротекания

$$v_{iz1}=0,\quad i=1,2,\quad z=-l. \tag{2.15}$$

Функция $\zeta_1(t,x)$ также должна удовлетворять условиям

$$\zeta_1(t,x+2\pi)=\zeta_1(t,x),\qquad \int_0^{2\pi}\zeta_1(t,x)\;dx=0. \tag{2.16}$$

3. Решение задачи в первом (линейном) приближении. Задача в первом приближении (2.9)–(2.12) отличается от рассмотренной в работе [1] только слагаемыми с множителем s в уравнениях движения (2.9). Следовательно, аналогично [1] решение ищем в виде затухающих волн.

$$v_{ix}=\frac{e^{-bt}}{\operatorname{sh} l}\big[A_i\sin(x-t)+B_i\cos(x-t)\big]\operatorname{ch}(z+l),$$

$$v_{iz}=\frac{e^{-bt}}{\operatorname{sh} l}\big[C_i\sin(x-t)+D_i\cos(x-t)\big]\operatorname{sh}(z+l),\quad i=1,2,$$

$$p = \frac{e^{-bt}}{\operatorname{sh} l}\bigl[K\sin(x-t) + L\cos(x-t)\bigr]\operatorname{ch}(z+l),$$
$$\gamma = \frac{e^{-bt}}{\operatorname{sh} l}\bigl[G_1\sin(x-t) + G_2\cos(x-t)\bigr]\operatorname{ch}(z+l). \qquad (3.1)$$

Здесь $b = \beta/\omega$ — безразмерный декремент затухания волны ($\omega = kc_0$ — частота волны, β — размерный декремент); коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i, G_i ($i = 1, 2$), K, L постоянные подлежащие определению. Подставляя (3.1) в уравнения (2.9), получаем систему двенадцати линейных однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Ввиду громоздкости этой системы, выписывать ее не будем, а сразу приведем решение:

$$C_i = B_i, \quad D_i = -A_i, \quad G_i = 0,$$
$$A_i = m_iK + n_iL, \quad B_i = -n_iK + m_iL, \quad i = 1, 2,$$
$$m_1 = \frac{1}{b^2+1}\bigl[1 + 2(b^2+1)\mu_1\mu_2(1-\mu_1)(s+2\mu_2)/d\bigr],$$
$$m_2 = \frac{1}{b^2+1}\bigl[1 + 2(b^2+1)\mu_1^2(1-\mu_2)(s+2\mu_2)/d\bigr],$$
$$n_1 = \frac{1}{b^2+1}\bigl[-b + 2(b^2+1)\mu_2(1-\mu_1)(2r - b\mu_1(s+2\mu_2))/d\bigr],$$
$$n_2 = \frac{1}{b^2+1}\bigl[-b + 2(b^2+1)\mu_1(1-\mu_2)(2r - b\mu_1(s+2\mu_2))/d\bigr],$$
$$d = (2r - b\mu_1(s+2\mu_2))^2 + \mu_1^2(s+2\mu_2)^2. \qquad (3.2)$$

Из решения (3.1), (3.2) следует, что возмущение концентрации дисперсной фазы в линейном приближении равно нулю. Эта величина имеет более высокий порядок малости по сравнению с возмущением давления и скоростями волнового движения фаз.

Форму свободной поверхности ζ определим из кинематического условия (2.10). Для этого подставим в него найденные выражения для v_{iz} и проинтегрируем по t. При интегрировании предполагаем, что ось x направлена вдоль среднего уровня волновой поверхности, т. е. выполняется условие [6]

$$\int_0^{2\pi} \zeta(t,x)\, dx = 0.$$

В результате получим

$$\zeta = e^{-bt}\frac{1}{(b^2+1)^2}\bigl[(\delta_1K + \delta_2L)\sin(x-t) + (-\delta_2K + \delta_1L)\cos(x-t)\bigr],$$
$$\delta_1 = 1 - b^2 + 2(b^2+1)(\mu - \mu_1\mu_2)\bigl[2br + (1-b^2)\mu_1(s+2\mu_2)\bigr]/d,$$
$$\delta_2 = -2b + 4(b^2+1)(\mu - \mu_1\mu_2)\bigl[r - b\mu_1(s+2\mu_2)\bigr]/d. \qquad (3.3)$$

Здесь и далее $\mu = \alpha_0\mu_1 + (1-\alpha_0)\mu_2$. Свободные коэффициенты K и L, как и для обычных поверхностных волн [5, 6], могут быть определены из дополнительных начальных данных.

Для того, чтобы найти фазовую скорость, частоту и декремент затухания, необходимо подставить найденные решения (3.2), (3.3) в динамическое условие (2.10) и приравнять к нулю коэффициенты при синусах и косинусах. В результате решения полученной системы двух нелинейных алгебраических уравнений найдем уравнения для фазовой скорости и декремента затухания волны [1]:

$$c_0^2 = \frac{s\mu_1 + 2\mu}{\mu_1(s+2\mu_2)}\nu_1^2 \operatorname{th} l + \widetilde{\beta}\left(3\widetilde{\beta} - \frac{4r-1}{\mu_1(s+2\mu_2)}\right), \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}4\mu_1^2(s+2\mu_2)^2\widetilde{\beta}^3 - 8r_1\mu_1(s+2\mu_2)\widetilde{\beta}^2 + \\ + \left[\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1+2\mu)\nu_1^2 \operatorname{th} l + 4r_1^2\right]\widetilde{\beta} - 2r_1(\mu - \mu_1\mu_2)\nu_1^2 \operatorname{th} l = 0,\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $r_1 = c_0 r = R/\rho^0 k$, $\widetilde{\beta} = c_0 b = \beta/k$, $\nu_1^2 = c_0^2\nu_0^2 = g/k$. Равенство (3.4) можно переписать в виде

$$c_0^2 = c_g^2 + c_d^2 + c_r^2, \tag{3.6}$$

где

$$c_g^2 = \nu_1^2 \operatorname{th} l = \frac{g \operatorname{th} kl^*}{k},$$

$$c_d^2 = \nu_1^t hl \frac{2(\mu - \mu_1\mu_2)}{\mu_1(s+2\mu_2)} = \frac{2\alpha_0(1-\alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)^2}{\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)} \frac{g \ \operatorname{th} kl^*}{k},$$

$$c_r^2 = \widetilde{\beta}\left(3\widetilde{\beta} - \frac{4r_1}{\mu_1(s+2\mu_2)}\right) = \frac{\beta}{k^2}\left(3\beta - \frac{4R\rho^0}{\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)}\right).$$

Из (3.6) легко найти дисперсионное соотношение $\omega^2 = k^2 c_0^2$. Величина c_g^2 является квадратом фазовой скорости гравитационной волны [5,6]; $c_d^2 \geq 0$ — добавка к фазовой скорости за счет наличия дисперсной фазы; c_r^2 — добавка, обусловленная силами межфазного взаимодействия. Функция $c_r^2(\widetilde{\beta}$ принимает отрицательные значения при $0 < \widetilde{\beta} < 4r_1/3\mu_1(s+2\mu_2)$ и положительные при $\widetilde{\beta} > 4r_1/3\mu_1(s+2\mu_2)$. Свое минимальное значение c_r^2 принимает при $\widetilde{\beta} = 2r_1/3\mu_1(s+2\mu_2)$: $\min\ c_r^2 = -4r_1^2/3\mu_1^2(s+2\mu_2)^2$.

Сравним (3.6) со значением фазовой скорости, полученным при решении задачи без учета присоединенной массы [1], что соответствует значению $s = 0$.

$$\widetilde{c}_0^2 = \widetilde{c}_g^2 + \widetilde{c}_d^2 + \widetilde{c}_r^2,$$

$$\widetilde{c}_g^2 = \nu_1^2 \operatorname{th} l = \frac{g \ \operatorname{th} kl^*}{k},$$

$$\widetilde{c}_d^2 = \nu_1^2 \operatorname{th} l \frac{(\mu - \mu_1\mu_2)}{\mu_1\mu_2} = \frac{\alpha_0(1-\alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)^2}{\rho_1^0\rho_2^0} \frac{g \ \operatorname{th} kl^*}{k},$$

$$\widetilde{c}_r^2 = \widetilde{\beta}\left(3\widetilde{\beta} - \frac{2r_1}{\mu_1\mu_2}\right) = \frac{\beta}{k^2}\left(3\beta - \frac{2R\rho^0}{\rho_1 6)\rho_2^0}\right).$$

Очевидно, что $\widetilde{c}_d^2 > c_d^2$ — учет силы присоединенных масс приводит к уменьшению влияния примесей на фазовую скорость волны за счет снижения c_d^2. Оценить влияние присоединенной массы на добавку c_r^2 сложно. С одной стороны она вызывает увеличениеc_r^2, но с другой стороны оно может быть компенсировано за счет уменьшения $\widetilde{\beta}$. Расчеты, выполненные для конкретных сред, показывают общее снижение c_0^2 по сравнению с $\widetilde{c}_0^2$.

Подобный результат был получен при исследовании акустических волн. В работе [7] отмечается общее снижение рассчитываемой скорости звука под воздействием эффекта присоединенных масс.

Условием существования волн установившегося типа является неотрицательность квадрата фазовой скорости, т. е. $c_0^2 \geq 0$. Это условие эквивалентно неотрицательности квадратного многочлена для $\widetilde{\beta}$ в правой части равенства (3.4), а, следовательно, неположительности дискриминанта этого многочлена, что означает выполнение неравенства

$$4r_1^2 - 3\mu_1(s + 2\mu_2)(s\mu_1 + 2\mu)\nu_1^2 \operatorname{th} l \leq 0.$$

Это условие можно записать как ограничение на длины волн

$$\frac{3gk \ \operatorname{th} kl^*}{4R^2\rho^0}\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)(s\rho_1^0 + 2\rho_2^0 - 2\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0)) \geq 1.$$

Кубическое уравнение (3.5) удовлетворяет критерию устойчивости Гурвица, его решение имеет вид

$$\widetilde{\beta} = \left[-\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\psi^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}} + \frac{2r_1}{3\mu_1(s + 2\mu_2)}, \tag{3.7}$$

$$\psi = \frac{3\mu_1(s + 2\mu_2)(s\mu_1 + 2\mu)\nu_1^2 \operatorname{th} l - 4r_1^2}{12\mu_1^2(s + 2\mu_2)^2},$$

$$\chi = \frac{r_1}{54\mu_1^3(s + 2\mu_2)^3}\left[4r_1^2 + 9\mu_1(s + 2\mu_2)(s\mu_1 - \mu + 3\mu_1\mu_2)\nu_1^2 \operatorname{th}\ l\right].$$

Из выражений для величин ψ, χ, следует, что $\widetilde{\beta}_{\max} = 2r_1/3\mu_1(s + 2\mu_2)$. В рамках рассматриваемой модели плотности несущей и дисперсной фазы не должны сильно отличаться, так как в исходных уравнениях пренебрегаем осаждением (всплыванием) частиц. Из (3.7) можно показать, что при близких значениях ρ_1^0 и ρ_2^0 декремент затухания лежит в пределах $0 < \widetilde{\beta} < 2r_1/3\mu_1(s + 2\mu_2)$, а добавка c_r^2 может принимать только отрицательные значения.

Из динамического условия также следует, что $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = (b^2 + 1) \operatorname{cth} l/\nu_0^2$. Поэтому можно записать уточненное выражение для формы свободной поверхности

$$\zeta = \frac{\operatorname{cth} l}{\nu_0^2}e^{-bt}\left[K\sin(x - t) + L\cos(x - t)\right]. \tag{3.3a}$$

4. Решение задачи во втором приближении. Чтобы получить решение во втором приближении необходимо в (2.13)–(2.16) подставить решение линейной задачи. В результате получается система линейных неоднородных уравнений в частных производных и граничных условий. Не выписывая систему ввиду ее громоздкости, приведем решение, которое было получено аналогично первому приближению:

$$c_1 = 0,$$

$$\gamma_1 = \frac{e^{-2bt}}{\operatorname{sh}^2 l}\left[S_4 \sin 2(x - t) + K_4 \cos 2(x - t) + L_4 \operatorname{ch} 2(z + l)\right],$$

$$p_1 = \frac{e^{-2bt}}{\operatorname{sh}^2 l}\Big[\big(U_1 \sin 2(x - t) + U_2 \cos 2(x - t)\big) \operatorname{ch} 2(z + l) +$$

$$+S_3\sin 2(x-t)+K_3\cos 2(x-t)+L_3\operatorname{ch}2(z+l)+C\big],$$

$$v_{ixl}=\frac{e^{-2bt}}{\operatorname{sh}^2 l}\big[\big(A_i^1\sin 2(x-t)+$$
$$+B_i^1\cos 2(x-t)\big)\operatorname{ch}2(z+l)+S_i\sin 2(x-t)+K_i\cos 2(x-t)\big],$$

$$v_{izl}=\frac{e^{-2bt}}{\operatorname{sh}^2 l}\big[\big(B_i^1\sin 2(x-t)-$$
$$-A_i^1\cos 2(x-t)\big)\operatorname{sh}2(z+l)+L_i\operatorname{sh}2(z+l)\big],\quad i=1,2.$$

$$\zeta_1=e^{-2bt}\big[\Phi\sin 2(x-t)+\Psi\cos 2(x-t)\big].$$

Коэффициенты, входящие в решение определяются следующими выражениями:

$$A_i^1=q_iU_1+h_iU_2,\quad B_i^1=-h_iU_1+q_iU_2,\quad i=1,2,$$

$$S_1=-\frac{\alpha_0}{(1-\alpha_0)}S_2,\quad K_1=-\frac{\alpha_0}{(1-\alpha_0)}K_2,\quad L_1=-\frac{\alpha_0}{(1-\alpha_0)}L_2,$$

$$L_2=\frac{(1-\alpha_0)H_3}{4(r-b(s\mu_1+2\mu))},\quad L_4=\frac{(1-\alpha_0)H_3}{4b(r-b(s\mu_1+2\mu))},$$

$$L_3=\frac{-(1-\alpha_0)(\mu_1r-b\mu_1(s+2\mu_2))(A_1^2+B_1^2)-\dots}{4(r-b(s\mu_1+2\mu))}$$
$$\frac{\dots-\alpha_0(\mu_2r-b\mu_1(s+2\mu_2))(A_2^2+B_2^2)}{\dots},$$

$$K_2=(1-\alpha_0)\big[(s\mu_1-2\mu)H_1+r-b(s\mu_1+2\mu))H_2\big]/4d_2,$$

$$K_3=\frac{1}{4d_2}\Big\{\alpha_0(1-\alpha_0)(\mu_2-\mu_1)rH_2+$$
$$+(1-\alpha_0)\big[(\mu_1r-b\mu_1(s+2\mu_2))(r-b(s\mu_1+2\mu))+$$
$$+\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1+2\mu)\big](A_1^2-B_1^2)+$$
$$+\alpha_0\big[(\mu_2r-b\mu_1(s+2\mu_2))(r-b(s\mu_1+2\mu))+$$
$$+\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1+2\mu)\big](A_2^2-B_2^2)\Big\},$$

$$K_4=\frac{(1-\alpha_0)}{4(b^2+1)d_2}\big[(br+(1-b^2)(s\mu_1+2\mu))H_1+(r-2b(s\mu_1+2\mu))H_2\big],$$

$$S_2=(1-\alpha_0)\big[(r-b(s\mu_1+2\mu))H_1-(s\mu_1+2\mu)H_2\big]/2d_2,$$

$$S_3=\frac{1}{4d_2}\Big\{\alpha_0(1-\alpha_0)(\mu_2-\mu_1)rH_1-2(1-\alpha_0)\big[(\mu_1r-$$
$$b\mu_1(s+2\mu_2))(r-b(s\mu_1+2\mu))+\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1+2\mu)\big]A_1B_1-$$

$$-2\alpha_0\big[(\mu_2 r-b\mu_1(s+2\mu_2))(r-b(s\mu_1+2\mu))+\mu_1(s+2\mu_2)(s\mu_1+2\mu)\big]A_2B_2\Big\},$$

$$S_4=\frac{(1-\alpha_0)}{4(b^2+1)d_2}\big[(r-2b(s\mu_1+2\mu))H_1-(br+(1-b^2)(s\mu_1+2\mu))H_2\big],$$

$$\Phi=\frac{\operatorname{cth}^3 l}{\nu_0^4}KL+\frac{\operatorname{cth} l}{(b^2+1)^2}\big[\delta_1^* U_1+\delta_2^* U_2\big],$$

$$\Psi=\frac{\operatorname{cth}^3 l}{\nu_0^4}(L^2-K^2)+\frac{\operatorname{cth} l}{(b^2+1)^2}\big[-\delta_2^* U_1+\delta_1^* U_2\big],$$

$$U_1=\frac{(b^2+1)^2}{\triangle}\big\{2\big(2(b^2+1)^2-\delta_1^*\nu_0^2\operatorname{th}2l\big)\big[KL\ \operatorname{cth} l-\nu_0^2 S_3\big]+$$
$$+\delta_2^*\nu_0^2\operatorname{th}2l\big[(L^2-K^2)\operatorname{cth} l-2\nu_0^2K_3\big]\big\},$$

$$U_2=\frac{(b^2+1)^2}{\triangle}\big\{\big(2(b^2+1)^2-\delta_1^*\nu_0^2\operatorname{th}2l\big)\big[(L^2-K^2)\operatorname{cth} l-2\nu_0^2K_3\big]-$$
$$-2\delta_2^*\nu_0^2\operatorname{th}2l\big[KL\operatorname{cth} l-\nu_0^2 S_3\big]\big\},$$

$$C=-L_3\operatorname{ch}2l-\frac{K^2+L^2}{4\nu_0^2}\operatorname{ch}2l,$$

$$\triangle=\nu_0^2\operatorname{ch}2l\big[4(b^2+1)^4\operatorname{ch}^2 2l+\nu_0^4\left(\delta_1^{*2}+\delta_1^{*2}\right)\operatorname{th}^2 2l-4\delta_1^*\nu_0^2(b^2+1)^2\operatorname{th}\ 2l\big),$$

$$\delta_1^*=1-b^2+2(b^2+1)(\mu-\mu_1\mu_2)\big[br+(1-b^2)\mu_1(s+2\mu_2)\big]/d_1,$$

$$\delta_2^*=-2b+2(b^2+1)(\mu-\mu_1\mu_2)\big[r-b\mu_1(s+2\mu_2)\big]/d_1,$$

$$q_1=\frac{1}{b^2+1}\big[1+2(b^2+1)\mu_1\mu_2(1-\mu_1)(s+2\mu_2)/d_1\big],$$

$$q_2=\frac{1}{b^2+1}\big[1+2(b^2+1)\mu_1^2(1-\mu_2)(s+2\mu-2)/d_1\big],$$

$$h_1=\frac{1}{b^2+1}\big[-b+2(b^2+1)\mu_2(1-\mu_1)(r-b\mu_1(s+2\mu_2))/d_1\big],$$

$$h_2=\frac{1}{b^2+1}\big[-b+2(b^2+1)\mu_1(1-\mu_2)(r-b\mu_1(s+2\mu_2))/d_1\big],$$

$$d_1=(r-b\mu_1(s+2\mu_2))^2+\mu_1^2(s+2\mu_2)^2,\ \ d_2=(r-b(s\mu_1+2\mu))^2+(s\mu_1+2\mu)^2,$$

$$H_1=\mu_1(s+2)\left(A_1^2-B_1^2\right)-(s\mu_1+2\mu_2)\left(A_2^2-B_2^2\right),$$

$$H_2=2\mu_1(s+2)A_1B_1-2(s\mu_1+2\mu_2)A_2B_2,$$

$$H_3=\mu_1(s+2)\left(A_1^2+B_1^2\right)-(s\mu_1+2\mu_2)\left(A_2^2+B_2^2\right).$$

Таким образом, получено решение задачи во втором приближении. Все коэффициенты этих функций определены через постоянные K и L, которые могут быть найдены из дополнительных начальных данных. Поправка к фазовой скорости во втором приближении равна нулю, что соответствует классическим решениям [5, 6].

Возмущение концентрации $\alpha' = \alpha_0 \varepsilon^2 \gamma_1$ имеет порядок малости ε^2, т. е. является величиной более низкого порядка по сравнению с остальными волновыми возмущениями. Наибольшего абсолютного значения α' достигает вблизи свободной поверхности, возмущение концентрации уменьшается с глубиной и принимает наименьшее значение на горизонтальной поверхности основания.

Summary

Aleshkov Yu. Z., Barinov V. A., Boutakova N. N. The nonlinear surfase waves on two-phases a layer of the medium.

The nonlinear problem of waves motion of the bounded constant depth layer of the two-phases medium are sated. The corresponding nonlinear boundary problem to within second approximation is solved.

Литература

1. *Баринов В. А., Бутакова Н. Н.* Волны на свободной поверхности двухфазной среды // Прикл. мех. и техн. физ. 2002. Т. 43. № 4. С. 27–35.

2. *Баринов В. А., Бутакова Н. Н.* Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсионной смеси // Тр. Средневолж. мат. о-ва. 2002. Т. 3–4. № 1. С. 47–53.

3. *Баринов В. А., Бутакова Н. Н.* Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсионной смеси // Материалы Всероссийской конференции «Теория и приложения задач со свободными границами». Барнаул, 2002. С. 10–12.

4. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М., 1987.

5. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М., 1977.

6. *Алешков Ю. З.* Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л., 1981.

7. *Канцырев Б. Л., Ашбаев А. А.* Двухжидкостная гидродинамическая модель пузырькового потока // Прикл. мех. и техн. физ. 2001. Т. 42. № 6. С. 64–72.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2002 г.