

УДК 532.59.032

В. А. Баринов

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**1. Введение.** Влияние вязкости на распространение волн по свободной поверхности жидкости изучается достаточно давно [1]. Однако более высокий порядок уравнений Навье–Стокса и сложность граничных условий не позволили в достаточной мере исследовать такое явление до настоящего времени. Динамические условия [2, 3] имеют нелинейный вид и содержат явное выражение формы свободной поверхности. Поэтому одной из целей данной работы является получение более простой для решения формы этих условий, а также вывод динамического условия в инвариантном виде. Для решения линейной задачи Ламбом [1] был предложен метод комплексного представления искомых функций, который использовался во множестве последующих работ вплоть до настоящего времени (например, [4]). Применение данного метода приводит к дисперсионному уравнению для комплексной частоты. Выражения для частоты и коэффициента (декремента) затухания (дисперсионные соотношения) в [1] получены приближенно только для маловязкой (слабовязкой) жидкости, когда движение потенциально. При этом точные ограничения, при которых жидкость считается слабо- или сильновязкой, не определены. В работе [5] установлено, что для глубокого слоя слабовязкой жидкости найденные Ламбом дисперсионные соотношения не выполняются. Также в [5] с помощью численных расчетов получено критическое значение относительной вязкости, при котором возможно волновое движение. В виде вещественных функций решение линейной задачи для слоя бесконечной глубины приведено в [6], но дисперсионное уравнение выписано для комплексной частоты, как в [1]. В случае слоя конечной глубины вещественные решения приведены в [7]. Для определения дисперсионных соотношений и неизвестных коэффициентов в [7] получена система нелинейных алгебраических уравнений. Кроме указанной выше, целью настоящей работы является аналитическое определение точных вещественных решений линейной задачи для бесконечноглубокого слоя как сильно-, так и слабовязкой жидкости; дисперсионных соотношений и условий существования волнового движения; ограничений, при которых применимы модели слабо- и сильновязких жидкостей. Эти решения должны при нулевой вязкости непрерывно переходить [8] в известные решения для идеальной жидкости. Теория волн на поверхности идеальной жидкости представлена в монографиях [9–11].

**2. Нелинейная модель плоского движения.** Рассмотрим бесконечно глубокий слой несжимаемой вязкой жидкости, ограниченный свободной поверхностью. Зададим декартову систему координат так, что плоскость  $z = 0$  совпадает с невозмущенной

---

*Баринов Василий Александрович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета. Количество опубликованных работ: 58. Научные направления: теория поверхностных волн, математическая физика. E-mail: vbarinov@utmn.ru.

© В. А. Баринов, 2010

поверхностью, а ось  $z$  противоположно направлена вектору силы тяжести  $\mathbf{g}$ . Движение жидкости происходит в плоскости  $xz$  со скоростью  $\mathbf{u} = (u(t, x, z), 0, v(t, x, z))$ , т. е. не зависит от  $y$ . Тогда в области, занятой жидкостью, выполнены уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = \Omega \mathbf{e}_y, \quad \Omega = \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $P$  – давление,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости ( $\mu$  – динамическая вязкость),  $\Delta$  – оператор Лапласа. Поочередно действуя операторами  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$  на уравнения движения (1) и учитывая условие несжимаемости, получаем модифицированные уравнения Фридмана и Гельмгольца

$$\Delta \left( \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz \right) = \Omega^2 + \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Omega} - \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u} \times \Delta \mathbf{u} = 0,$$

которые вместе с условием несжимаемости полностью описывают движение жидкости.

Для того чтобы движение сохранялось плоским, свободная поверхность в любой момент времени должна быть цилиндрической, образующими которой являются прямые параллельные оси  $y$ . Направляющая – кривая  $z = \xi(t, x)$  – определяет свободную поверхность. На ней выполнены кинематическое и динамическое условия, которые являются следствием условия отсутствия потока массы через свободную поверхность и непрерывности потока импульса соответственно [3]. Кинематическое условие заключается в равенстве  $v_n = V_n$ , где  $v_n$  – нормальная проекция скорости жидкости,  $V_n$  – нормальная скорость поверхности. В расписанном по координатам виде

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \xi(t, x). \quad (3)$$

Динамическое условие, когда сверху к свободной поверхности приложено только постоянное давление  $P_a$ , имеет вид [3]

$$\left( \mathbf{P}^{(2)} - \mathbf{P}^{(1)} \right) \mathbf{n} = -\sigma K \mathbf{n}, \quad z = \xi(t, x), \quad (4)$$

$$\mathbf{P}^{(1)} = -P \mathbf{E} + \mathbf{T}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = -P_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_z - (\partial \xi / \partial x) \mathbf{e}_x}{\sqrt{1 + (\partial \xi / \partial x)^2}}.$$

Здесь  $\mathbf{P}^{(i)}$  – тензор напряжений в  $i$ -й среде,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к поверхности,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор,  $\mathbf{T}$  – тензор вязких напряжений,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $K = -\nabla \mathbf{n} \approx \partial^2 \xi / \partial x^2$  – кривизна поверхности. В формуле (4) и ниже соблюдается правило: если тензор умножается на вектор справа, то вектор – столбец; если слева, то вектор – строка. Условие (4) можно записать иначе.

Введем тензор скачка напряжений на свободной поверхности

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \Pi + T_n & -T_s \\ -T_s & \Pi - T_n \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\Pi = P - P_a + \sigma K, \quad T_n = 2\mu \frac{\partial v}{\partial z} = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$T_s = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Тогда динамическое условие (4) примет вид

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \Sigma_n = 0, \quad z = \xi(t, x).$$

По-компонентно это векторное равенство запишется как система уравнений  $\Sigma_{nx} = 0$ ,  $\Sigma_{nz} = 0$  или

$$(\Pi + T_n) \frac{\partial \xi}{\partial x} + T_s = 0, \quad (\Pi - T_n) + T_s \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad z = \xi(t, x). \quad (6)$$

Равенства (6) являются динамическими условиями для краевой задачи о плоском движении. При  $\mu = 0$  из (6) следует известное динамическое условие  $\Pi = 0$  для идеальной жидкости. Обычно используют динамические условия в инвариантной форме [3], которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\Sigma_{nn} = \mathbf{n} \boldsymbol{\Sigma}_n = 0, \quad \Sigma_{ns} = \mathbf{s} \boldsymbol{\Sigma}_n = 0, \quad z = \xi(t, x), \quad (7)$$

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{e}_x + (\partial \xi / \partial x) \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial \xi / \partial x)^2}}.$$

При решении задачи условия (6) более удобные, в силу меньшего числа нелинейных слагаемых. Покажем, что (6) и (7) являются эквивалентными. Распишем систему (7)

$$\Sigma_{nx} n_x + \Sigma_{nz} n_z = 0, \quad \Sigma_{nx} n_z - \Sigma_{nz} n_x = 0,$$

где  $n_x$ ,  $n_z$  – компоненты вектора  $\mathbf{n}$ . Определитель этой системы равен  $-n^2 = -1$ . Следовательно, условия (7) выполняются лишь в случае выполнения  $\Sigma_{nx} = 0$ ,  $\Sigma_{nz} = 0$ . Значит, системы (6) и (7) эквивалентны.

Из (6) можно получить соотношения между вязкими напряжениями и приведенным давлением  $\Pi$  на свободной поверхности

$$T_n = \frac{1 - (\partial \xi / \partial x)^2}{1 + (\partial \xi / \partial x)^2} \Pi, \quad T_s = -\frac{2 \partial \xi / \partial x}{1 + (\partial \xi / \partial x)^2} \Pi, \quad z = \xi(t, x). \quad (8)$$

Из равенств (8) следует, что при малом отклонении свободной поверхности от горизонтали ( $|\partial \xi / \partial x| \ll 1$ ),  $|T_n|$  одного порядка с  $|\Pi|$ , а  $|T_s|$  на порядок меньше. Это свойство напряжений можно использовать для построения упрощенных моделей.

Систему (6) можно свести, исключив из нее  $\partial \xi / \partial x$ , к одному динамическому условию для напряжений

$$\Pi^2 = T_n^2 + T_s^2, \quad z = \xi(t, x). \quad (9)$$

Такое нелинейное условие является инвариантным, поскольку в него не входят явно  $\xi(t, x)$  и ее производные. Чтобы выяснить физический смысл этого уравнения, распишем его правую часть:

$$T_n^2 + T_s^2 = \mu^2 \left[ 2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = \mu E'.$$

Величина  $E'$  показывает, сколько механической энергии диссипирует в единицу времени [2]. Следовательно, уравнение (9) выражает энергетический баланс при движении на свободной поверхности.

Из (8) и (9) вытекает важное свойство вязких напряжений: нормальные и касательные вязкие напряжения по абсолютной величине не превосходят модуля перепада давлений на свободной поверхности, т. е.

$$|T_n| \leq |\Pi|, \quad |T_s| \leq |\Pi|.$$

Данное свойство может служить одним из критериев при моделировании поверхностных волн. Поскольку для поверхностных волн  $\Pi \sim \rho c^2$  ( $c$  – фазовая скорость волн), то вязкие напряжения не могут много быть больше этой величины. Следовательно, волновое движение обуславливает наличие предельного значения коэффициента вязкости, при котором такое движение возможно. Значит, модели волн на поверхности сильновязкой жидкости ( $\nu \gg c\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны) не состоятельны. Ниже в линейном приближении это будет показано аналитически.

Для дальнейшего анализа нелинейных граничных условий введем угол наклона касательной свободной поверхности к оси  $x$  – величину  $\varphi(t, x)$ . Тогда  $\partial\xi/\partial x = \operatorname{tg}\varphi$ , а формулы (8) примут вид

$$T_n = \Pi \cos 2\varphi, \quad T_s = -\Pi \sin 2\varphi. \quad (10)$$

При этом уравнение (9) обращается в тождество. С помощью представления (10) можно исследовать изменение напряжений вдоль свободной поверхности. Поверхностный тензор (5), в силу (10), примет вид

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Pi(\mathbf{E} + \Phi), \quad \Gamma = -\Pi\Phi, \\ \Phi &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad |\Phi| = -1, \quad \Phi = \Phi^{-1}, \\ \Phi \cdot \mathbf{n} &= \Phi_n = -\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (-\sin \varphi, \cos \varphi). \end{aligned}$$

Тогда динамическое условие (7) запишется как

$$\Sigma_n = \Pi(\mathbf{E} + \Phi)\mathbf{n} = 0.$$

Из него следует, что  $\Sigma$  в нормальном к поверхности направлении является вырожденным. Таким образом, собственное значение для нормального направления нулевое. Выпишем главные инварианты тензора

$$I_1 = \lambda_n + \lambda_s = 2\Pi, \quad I_2 = \lambda_n \lambda_s = \Pi^2 - (T_n^2 + T_s^2) = 0.$$

Отсюда получаем, что  $\Sigma$  имеет два главных направления  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{s} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_n = 0$ ,  $\lambda_s = 2\Pi$ . Следовательно, в касательном к свободной поверхности направлении действие тензора выражается равенством

$$\Sigma \cdot \mathbf{s} = \Sigma_s = \Pi(\mathbf{E} + \Phi)\mathbf{s} = 2\Pi\mathbf{s}, \quad \Phi \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s}.$$

Подставляя в него соответствующие значения  $\Pi$  и  $\varphi$ , можно определить, как меняются касательные напряжения  $\Sigma_s$  вдоль поверхности. Пусть поверхность задана в форме волны, задний и передний склоны которой расположены выше и ниже оси  $x$ . Тогда на заднем склоне волны  $\Sigma_s$  сонаправлен с  $s$ , начиная от самой нижней точки впадины

до гребня, а на переднем, наоборот,  $\Sigma_s$  противоположно направлен  $s$ . При движении волны в направлении оси  $x$  это действие касательных напряжений приводит к асимметрии волны: передний склон значительно круче заднего. В нижней точке впадины  $\Sigma_s$  меняет свое направление.

Для вязкой жидкости из условий (3) и (6) можно получить зависимость между компонентами скорости и напряжениями на свободной поверхности. Выражая из (6)  $\partial\xi/\partial x$  через напряжения и подставляя в (3), получаем

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{v - \partial\xi/\partial t}{u} = -\frac{T_s}{\Pi + T_n} = -\frac{\Pi - T_n}{T_s}.$$

Если величину  $v - \partial\xi/\partial t$  принять за новую вертикальную компоненту скорости, то кинематическое условие (3) даст уравнение линии тока для новой скорости. В последнюю систему входят отношения величин разной размерности, но ее можно свести к одному уравнению для величин одной размерности:

$$\frac{(v - \partial\xi/\partial t)^2}{u^2} = \frac{\Pi - T_n}{\Pi + T_n},$$

из которого можно качественно проанализировать движение жидкости на свободной поверхности.

Нелинейную краевую задачу для определения движения жидкости и формы свободной поверхности составляют уравнения (1) (или (2)) и граничные условия (3), (6). Рассмотрим ее в случае волнового движения.

**3. Краевая задача о волновом движении.** Пусть в положительном направлении оси  $x$  распространяется волна длины  $\lambda$  ( $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число) с фазовой скоростью  $c$  (частотой  $\omega = ck$ ). Длина волны много больше ее высоты ( $\lambda \gg \xi_{\max}$ ), т. е. это волна малой амплитуды. Чтобы провести линеаризацию исходной задачи (1), (3), (6), необходимо обезразмерить данные уравнения.

Введем следующие безразмерные переменные и величины:

$$\begin{aligned} 1) \quad & t' = kct = \omega t, \quad x' = kx, \quad z' = kz, \\ 2) \quad & \mathbf{u} = \varepsilon c \mathbf{u}', \quad p = \varepsilon \rho c^2 p', \quad p = P - P_a + \rho g z, \quad \xi = \varepsilon \xi' / k, \\ 3) \quad & \nu' = \nu k / c, \quad \gamma^2 = c_g^2 / c^2, \quad c_g^2 = g / k, \quad \kappa^2 = c_\sigma^2 / c^2, \quad c_\sigma^2 = \sigma k / \rho. \end{aligned} \quad (11)$$

Там, где это необходимо, штрихом обозначены безразмерные величины. Во вторую группу (11) входят динамические характеристики волнового движения жидкости:  $\mathbf{u}$  – скорость волнового движения,  $p$  – волновое возмущение давления (динамическое давление). Они взяты одного порядка с величиной  $\xi$ , так как формируются скоростью распространения и размерами поверхностной волны. В третью группу входят параметры, обусловленные физическими свойствами жидкости и внешней силой, которые сами формируют фазовую скорость волны. Поэтому для их оценки необходима независимая характерная величина. Ею является фазовая скорость  $c_0$  (частота  $\omega_0 = c_0 k$ ) волны для идеальной жидкости. Введем параметр  $\alpha = c/c_0 = \omega/\omega_0$ . Для линейных волн  $c_0^2 = c_g^2 + c_\sigma^2$  [9]. С увеличением вязкости жидкости скорость распространения волны уменьшается, и наоборот. Потому параметр  $\alpha$  должен удовлетворять естественному ограничению

$$0 \leq \alpha^2 \leq 1. \quad (12)$$

Тогда параметры третьей группы (11) можно представить в виде

$$\nu_0' = \alpha\nu' = \nu k/c_0 = \nu k^2/\omega_0, \quad \gamma_0^2 = \alpha^2\gamma^2 = c_g^2/c_0^2 = \omega_g^2/\omega_0^2, \quad (13)$$

$$\kappa_0^2 = \alpha\kappa^2 = c_\sigma^2/c_0^2 = \omega_\sigma^2/\omega_0^2, \quad \alpha^2(\gamma^2 + \kappa^2) = \gamma_0^2 + \kappa_0^2 = 1.$$

В дальнейшем для характеристики воздействия вязкости на движение понадобится еще один параметр – декремент (коэффициент) затухания  $\beta = \omega\beta' = \alpha\omega_0\beta' = \omega_0\beta_0'$ . Ниже штрихи у безразмерных величин будем опускать.

Теперь задачу о плоском движении со свободной поверхностью (1)–(3), (6) можно рассматривать как нелинейную краевую задачу о волновом движении жидкости. Уравнения (1) в безразмерном виде запишутся

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \varepsilon \left( \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} - \nabla \frac{u^2}{2} \right), \quad (14)$$

безразмерные уравнения (2) – соответственно

$$\Delta p = \varepsilon \left( \Omega^2 + \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} - \Delta \frac{u^2}{2} \right), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} = -\varepsilon \mathbf{u} \times \Delta \mathbf{u}, \quad (15)$$

граничные условия на свободной поверхности (3), (6) как

$$v - \frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon u \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi, \quad (16)$$

$$p - \gamma^2 \xi + \kappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\nu \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\varepsilon \left( p - \gamma^2 \xi + \kappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi.$$

В силу малости волнового параметра  $\varepsilon$ , условия (16), (17) можно свести к условиям на фиксированной поверхности  $z = 0$ . Для этого вместо скорости волнового движения, динамического давления и их производных в условия (16), (17) нужно подставить их разложения в окрестности  $z = 0$ . Кроме кинематического и динамического условий, волновые возмущения должны удовлетворять условию затухания при заглублении, т. е.

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (18)$$

Положив  $\varepsilon = 0$  в уравнениях (14), (15) и разложенных условиях (16), (17), получаем линейную задачу

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (19)$$

$$\Delta p = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} = 0, \quad (20)$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad p - \gamma^2 \xi + \kappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\nu \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad z = 0. \quad (21)$$

Второе и третье условия (21) будем называть первым и вторым динамическим условием соответственно. Условие затухания (18) остается прежним. Из первого уравнения (20) следует, что в линейном приближении динамическое давление – гармоническая

функция. Поэтому, с одной стороны, хотя бы часть поля скоростей должна быть потенциальной. С другой стороны, второе уравнение (20) не может иметь только тривиальное решение, так как гармонические функции не удовлетворяют второму динамическому условию (21). Следовательно, поле скоростей, кроме потенциальной составляющей, должно содержать и вихревую. Линейность уравнений (19), (20) позволяет представить решение следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_0 = \nabla\varphi, \quad \mathbf{u}_1 = \text{rot}\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi\mathbf{e}_y,$$

где  $\varphi(t, x, z)$  – потенциал;  $\psi(t, x, z)$  – функция тока. Тогда уравнения движения (19) примут вид

$$\Delta\varphi = 0, \quad \text{rot}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \nu\Delta\psi\right) = -\nabla\left(p + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \quad (22)$$

Беря поочередно от второго уравнения системы (22) rot и div, выводим уравнения (20) ( $\Omega = -\Delta\psi$ ). Для плоского движения вихревое поле не может быть потенциальным, поэтому получаем известную [1] систему

$$\Delta\varphi = 0, \quad p = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} - \nu\Delta\psi = 0. \quad (23)$$

Решение уравнений (23) будем искать в виде затухающих со временем бегущих волн

$$\varphi = e^{z-\beta t} (A_1 \cos \bar{x} + A_2 \sin \bar{x}), \quad (24)$$

$$\psi = e^{-\beta t} (V_1(z) \sin \bar{x} - V_2(z) \cos \bar{x}), \quad \bar{x} = x - t.$$

Здесь  $A_i$  – постоянные, определяемые из начальных условий,  $V_i(z)$  – неизвестные функции, подлежащие нахождению. В выражении для  $\varphi$  учтено условие (18). Из (24) и (23) получаем выражение для давления

$$p = e^{z-\beta t} [(A_2 + \beta A_1) \cos \bar{x} + (\beta A_2 - A_1) \sin \bar{x}].$$

Решение третьего уравнения (23) в книге [1] было предложено находить в виде комплексной функции

$$\psi = B e^{mz - \beta t} e^{i\bar{x}}, \quad (25)$$

которое в дальнейшем было использовано во множестве работ. Однако функция (25) дает только тривиальное решение указанного уравнения. Действительно, необходимыми и достаточными условиями дифференцируемости этой функции являются условия Коши–Римана. Если  $m \in \mathbb{R}$ , то эти условия выполняются только при  $m = 1$ . Если  $m \in \mathbb{C}$ , т. е.  $m = m_R + im_I$ , то условия Коши–Римана выполняются только при  $m_R = 1$ ,  $m_I = 0$ . При  $m = 1$  функция  $\psi$  – гармоническая. Тогда третье уравнение (23) примет вид  $\partial\psi/\partial t = -(\beta + i)\psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$ . Потому определение функции тока, как аналитической, приводит только к потенциальному решению задачи. Если предложенная функция не аналитическая, а только дифференцируема по переменным  $x$  и  $z$ , то это необоснованное расширение класса искомых вещественных функций до комплексных. Потому, чтобы учесть завихренность движения,  $\psi$  следует искать в виде действительных функций.

Подставляя функцию  $\psi$  (24) в третье уравнение (23) и приравнивая коэффициенты при  $\cos \bar{x}$  и  $\sin \bar{x}$ , получаем систему дифференциальных уравнений для определения  $V_i(z)$

$$\nu(V_2'' - V_2) + \beta V_2 - V_1 = 0, \quad \nu(V_1'' - V_1) + \beta V_1 + V_2 = 0. \quad (26)$$

Ее решение, удовлетворяющее условию несжимаемости и глубинного затухания (18), имеет вид

$$V_1(z) = e^{bz} (B_1 \cos az - B_2 \sin az), \quad (27)$$

$$V_2(z) = e^{bz} (B_2 \cos az + B_1 \sin az),$$

где  $B_i$  – постоянные, подлежащие определению. Параметры  $a$  и  $b$  удовлетворяют уравнениям

$$a^2 - b^2 = \delta/\nu = \delta_0/\nu_0, \quad 2ab = 1/\nu = \alpha/\nu_0, \quad (28)$$

$$\delta = \beta - \nu, \quad \delta_0 = \beta_0 - \nu_0.$$

Функции (27) учитывают все частные решения системы (26), следовательно, дают наиболее полное решение третьего уравнения (23). Представленное в работе [6] вещественное решение построено только по половине набора частных решений, функции  $V_i(z)$  записаны как

$$V_1(z) = Be^{bz} \cos az, \quad V_2(z) = Be^{bz} \sin az.$$

При этом выписано дисперсионное уравнение для комплексной частоты.

Второе динамическое условие (21) при подстановке в него функций (24) примет вид

$$V_i'' + V_i = -2A_i, \quad z = 0. \quad (29)$$

Подставляя в (29) выражения (27), для определения коэффициентов  $B_i$  получаем систему

$$sB_1 - B_2 = -2\nu A_1, \quad B_1 + sB_2 = -2\nu A_2. \quad (30)$$

Здесь  $s = 2\nu - \beta$ . Решение системы (30) представим следующим образом:

$$B_1 = -\frac{2\nu}{1+s^2} (A_2 + sA_1), \quad B_2 = \frac{2\nu}{1+s^2} (A_1 - sA_2).$$

В силу (13),  $s_0 = \alpha s = 2\nu_0 - \beta_0$ . Из кинематического условия (21) находим выражение для формы свободной поверхности

$$\xi(t, x) = \frac{e^{-\beta t}}{1+s^2} [(A_2 + sA_1) \cos \bar{x} - (A_1 - sA_2) \sin \bar{x}].$$

Теперь из уравнений (28) и первого динамического условия (21) определим значения параметров  $a$  и  $b$ , а также фазовую скорость (частоту) и декремент затухания.

**4. Дисперсионные соотношения.** Подстановка найденных величин в первое динамическое условие (21) приводит к условию нетривиальности коэффициентов  $A_1, A_2$ . Оно сводится к выполнению системы равенств

$$s_0 b + \alpha a = \frac{s_0}{4\nu_0^2} (1 + \alpha^2 + s_0^2), \quad \alpha b - s_0 a = \frac{\alpha}{4\nu_0^2} (1 - \alpha^2 - s_0^2),$$

из которой для  $a$  и  $b$  получаем

$$a = \alpha s_0 / (2\nu_0^2), \quad b = (1 + s_0^2 - \alpha^2) / (4\nu_0^2). \quad (31)$$

Подставляя равенства (31) во второе уравнение (28), находим относительную фазовую скорость (частоту)

$$\alpha^2 = 1 - \frac{4\nu_0^3 - s_0^3}{s_0}. \quad (32)$$



В размерном виде первое равенство (32) дает дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{4\nu_0^3 - s_0^3}{s_0} \right), \quad c^2 = c_0^2 \left( 1 - \frac{4\nu_0^3 - s_0^3}{s_0} \right).$$

Чтобы полностью разрешить задачу, необходимо определить декремент затухания волны  $\beta_0(\nu_0)$  из первого уравнения (28). Прежде найдем область значений этой функции. Из ограничения (12) и второго равенства (32) следует, что при  $\nu_0 \neq 0$   $s_0 > 0$  ( $s > 0$ ) или  $\beta < 2\nu$ , т. е. декремент затухания всегда меньше величины  $2\nu$ . Подставляя предельные значения  $\alpha$  в (32), получаем ограничения на значения  $s_0(\nu_0)$ :

$$0 \leq (4\nu_0^3 - s_0^3)/s_0 \leq 1. \quad (33)$$

Следовательно,  $s_0$  имеет два предельных значения  $s_1$  и  $s_2$ :  $s_2 \leq s_0 \leq s_1$ . Величина  $s_1$  определяется из неравенства (33) и соответствует значению  $\alpha = 1$  (идеальная жидкость):  $s_1 = \sqrt[3]{4}\nu_0$ . Величина  $s_2$  соответствует  $\alpha = 0$  (отсутствие волнового движения) и определяется из правого неравенства (33), т. е. удовлетворяет неполному кубическому уравнению

$$s_2^3 + s_2 - 4\nu_0^3 = 0.$$

Оно имеет только один действительный корень, который определяется по формуле Кардано

$$s_2 = \left( \sqrt{Q} + 2\nu_0^3 \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \sqrt{Q} - 2\nu_0^3 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad Q = 4\nu_0^6 - \frac{1}{27}.$$

Величину  $s_2$  также можно записать в виде

$$s_2 = \sqrt[3]{2}\nu_0 \left[ (\sqrt{q} + 1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{q} - 1)^{\frac{1}{3}} \right], \quad q = 1 + \frac{1}{3(6\nu_0^3)^2}. \quad (34)$$

Из (34) следует  $s_2 \leq s_1$ . Причем равенство выполняется только в предельных случаях  $\nu = 0$  и  $\nu = \infty$ . Из ограничений для  $s_0$  получаем ограничения на значения декремента затухания

$$\beta_1 \leq \beta_0 \leq \beta_2, \quad \beta_1 = \left( 2 - \sqrt[3]{4} \right) \nu_0 \approx 0.41\nu_0, \quad \beta_2 = 2\nu_0 - s_2.$$

Таким образом, линия  $\beta_0(\nu_0)$  должна находиться выше линии  $\beta_1(\nu_0)$  и ниже линии  $\beta_2(\nu_0)$  для любых значений  $\nu_0$ . Используя равенство (32), можно упростить выражение для  $b$  (31):  $b = \nu_0/s_0$ . Подставив его для  $b$  и  $a$  из (31) в первое равенство (28), имеем уравнение для определения точной зависимости  $s_0(\nu_0)$ , а следовательно, и  $\beta_0(\nu_0)$

$$s_0^6 + s_0^4 - 4\nu_0^4 s_0^2 - 4\nu_0^6 = 0. \quad (35)$$

Заменяя переменную, приводим уравнение (35) к неполному кубическому

$$\begin{aligned} \tau^3 + m_1\tau + m_2 &= 0, \quad \tau = s_0^2 + \frac{1}{3}, \quad \tau > 0, \\ m_1 &= -4\nu_0^6 - \frac{1}{3}, \quad m_2 = 2 \left( \frac{1}{27} + \frac{2}{3}\nu_0^4 - 2\nu_0^6 \right), \end{aligned}$$

решение которого определяется формулой Кардано

$$\tau = \left( \sqrt{Q_1} - \frac{m_2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \sqrt{Q_1} + \frac{m_2}{2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$Q_1 = \left( \frac{m_1}{3} \right)^3 + \left( \frac{m_2}{2} \right)^2 = \frac{4\nu_0^6}{27} (11\nu_0^6 - 18\nu_0^4 - \nu_0^2 - 1).$$

Нас интересуют только положительные действительные корни этого уравнения, число которых зависит от знака  $Q_1$ . При  $Q_1 < 0$  такой корень только один. При  $Q_1 \geq 0$  также один. Причем уравнение  $Q_1 = 0$  имеет корень  $\nu_0 = N = 1.3114687\dots$  ( $N \approx 1.31$ ),  $Q_1 < 0$  при  $\nu_0 < N$ ,  $Q_1 > 0$  при  $\nu_0 > N$ . Если  $\nu_0 = N$ , то выполняется равенство  $s_0^2(\nu_0) = s_2^2(\nu_0)$ , а если  $\nu_0 > N$  – неравенство  $s_0^2(\nu_0) < s_2^2(\nu_0)$ . Но последнее неравенство противоречит найденной области значений функции  $s_0(\nu_0)$  ( $s_0^2(\nu_0) \geq s_2^2(\nu_0)$ ). Поэтому достаточно определить  $\tau$  (следовательно,  $s_0$  и  $\beta_0$ ) для  $Q_1 \leq 0$ , т. е. при  $0 \leq \nu_0 \leq N$ . Для данной области определения функции  $\beta_0(\nu_0)$  и  $s_0(\nu_0)$  имеют вид

$$\beta_0 = 2\nu_0 - s_0, \quad r^2 = \sqrt{12\nu_0^4 + 1}, \quad (36)$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{1}{3} \left( 2r^2 \cos \frac{\theta - \pi}{3} - 1 \right)}, \quad 0 \leq \nu_0 < 0.66,$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{1}{3} \left( 2r^2 \cos \frac{\theta}{3} - 1 \right)}, \quad 0.66 \leq \nu_0 \leq 1.31,$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{6\sqrt{3}\nu_0^3 \sqrt{1 + \nu_0^2 (1 + 18\nu_0^2 - 11\nu_0^4)}}{1 + 18\nu_0^4 - 54\nu_0^6} \right).$$

Зависимости  $\alpha(\nu_0)$ ,  $\beta_0(\nu_0)$ ,  $s_0(\nu_0)$  приведены на рис. 1. Зависимость параметров  $a$  и  $b$  от  $\nu_0$  представлена на рис. 2. В силу безразмерности функций и переменной, эти графики универсальны для любой жидкости.

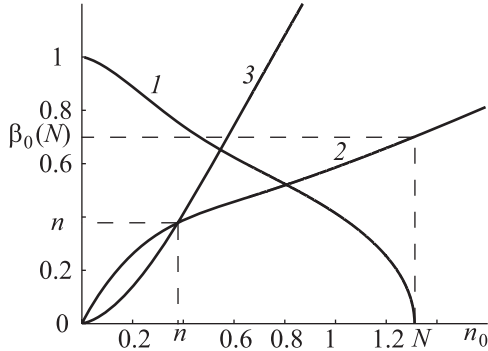


Рис. 1. Зависимость  $\alpha$ ,  $\beta_0$ ,  $s_0$  от  $\nu_0$   
1 –  $\alpha(\nu_0)$ ; 2 –  $\beta_0(\nu_0)$ ; 3 –  $s_0(\nu_0)$ .

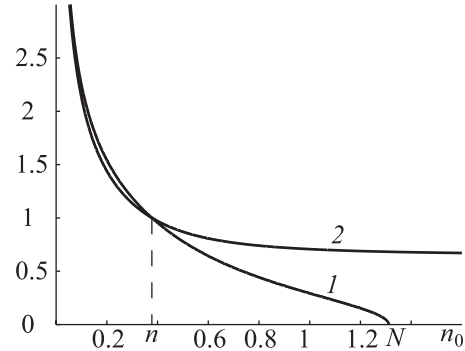


Рис. 2. Зависимость  $a$  и  $b_0$  от  $\nu_0$   
1 –  $a(\nu_0)$ ; 2 –  $b_0(\nu_0)$ .

Запишем выражение (36) в размерном виде

$$\beta = 2\omega_\nu - s, \quad \omega_\nu = \nu k^2,$$

$$s = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{3} \left( 2r^2 \cos \frac{\theta - \pi}{3} - 1 \right)}, \quad 0 \leq \omega_\nu < 0.66\omega_0,$$

$$s = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{3} \left( 2r^2 \cos \frac{\theta}{3} - 1 \right)}, \quad 0.66\omega_0 \leq \omega_\nu < 1.31\omega_0,$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{6\sqrt{3}\omega_\nu^3 \sqrt{\omega_0^6 + \omega_0^2 (\omega_0^4 + 18\omega_\nu^2 \omega_0^2 - 11\omega_\nu^4)}}{\omega_0^6 + 18\omega_\nu^4 \omega_0^2 - 11\omega_\nu^6} \right).$$

Таким образом, выведены точные выражения для фазовой скорости (частоты) и декремента затухания волны на свободной поверхности вязкой жидкости (дисперсионные соотношения).

При определении декремента затухания было найдено условие (критерий) существования затухающих прогрессивных волн: волновое движение возможно, если  $0 \leq \nu_0 \leq N$ . Действительно, для данной области изменения  $\nu_0$  относительная частота  $\alpha$  проходит весь диапазон значений:  $0 \leq \alpha(\nu_0) \leq 1$ ,  $\alpha(0) = 1$ ,  $\alpha(N) = 0$ . Безразмерный декремент затухания лежит в пределах  $0 \leq \beta_0 \leq \beta_*$ ,  $\beta_* = \beta_0(N) = \beta_2(N) \approx 0.7$  (размерный:  $0 \leq \beta \leq \beta_* \omega_0$ ), величина  $s_0$ :  $0 \leq s_0 \leq s_*$ ,  $s_* = s_0(N) = s_2(N) = 2N - \beta_* \approx 1.92$ . В физических величинах этот критерий имеет вид

$$0 \leq \frac{\nu k}{c_0} \leq N, \quad \frac{\nu k}{c_0} = \frac{\nu k^2}{\omega_0} = \frac{\omega_\nu}{\omega_0}, \quad N \approx 1.31. \quad (37)$$

Если ввести волновое число Рейнольдса  $W = c/k\nu$  [12, 13], то условие (37) примет вид  $W \geq 1/N \approx 0.76$ . Также указанное условие можно записать как ограничение на длину волны, при котором возможно волновое движение. Волновое число и длина гравитационно-капиллярной волны соответственно должны удовлетворять ограничениям

$$k^3 - \frac{N^2}{\nu^2} \left( \frac{\sigma k^2}{\rho} + g \right) \leq 0, \quad \lambda^3 - \frac{(2\pi)^3}{g} \left( \frac{\nu^2}{N^2} - \frac{\sigma \lambda}{2\pi \rho} \right) \geq 0.$$

Отметим, что критерий и критические значения  $N, \beta_*$  совпадают с полученными численно в работе [5].

Величины  $\beta_0$  и  $s_0$  связаны между собой соотношениями  $\beta_0 + s_0 = 2\nu_0$ ,  $\beta_0 - \nu_0 = \nu_0 - s_0$ . Из первого равенства следует:  $s_0$  является частотной добавкой  $\beta_0$  до  $2\nu_0$ ; из второго –  $\beta_0$  и  $s_0$  равностоящие от  $\nu_0$  (графики  $\beta_0(\nu_0)$ ,  $s_0(\nu_0)$  симметричны относительно прямой  $\beta_0 = \nu_0$ ). Причем, кроме указанного выше критического значения  $N$ , при котором волновое движение полностью затухает, есть еще одно значение –  $\nu_0 = n \approx 0.38$  ( $W = 2.63$ ), при котором выполняются равенства

$$\beta_0(n) = s_0(n) = n \approx 0.38, \quad W \approx 2.63,$$

$$\alpha \approx 0.75, \quad b = 1, \quad a = 1.$$

При  $0 < \nu_0 < n$  выполняются неравенства

$$s_0 < \nu_0 < \beta_0, \quad W > 2.63, \quad 1 > \alpha > 0.75, \quad b > 1, \quad a > 1. \quad (38)$$

На этом интервале значения  $\beta_0$ ,  $s_0$  мало отличаются от  $\nu_0$  ( $\max(\beta_0 - \nu_0) = \max(\nu_0 - s_0) \approx 0.06$ ), а волновое число Рейнольдса велико. Потому в таком промежутке значений

$\nu_0$  существенней является потенциальная часть скорости движения  $\mathbf{u}_0$ , чем вязковихревая  $\mathbf{u}_1$ . Это обусловлено большими величинами параметра  $b$  ( $z < 0$ ,  $\exp(bz) \ll 1$ ) и малыми  $\beta_0$ ,  $s_0$ . Чем ближе к нулю значение  $\nu_0$ , тем больше превалирование  $\mathbf{u}_0$  над  $\mathbf{u}_1$ , так как  $b \rightarrow \infty$  при  $\nu_0 \rightarrow 0$ .

При  $n < \nu_0 < N$

$$\beta_0 < \nu_0 < s_0, \quad 0.76 < W < 2.63, \quad 0.75 > \alpha > 0, \quad (39)$$

$$1 > b > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0.63, \quad 1 > a > 0.$$

Для данного интервала величины  $\beta_0$ ,  $s_0$  сильно отличаются от значений  $\nu_0$  ( $\max(s_0 - \nu_0) = \max(\nu_0 - \beta_0) \approx 0.61$ ). На нем есть как незначительная область превалирования  $\mathbf{u}_0$  над  $\mathbf{u}_1$ , так и большая – преобладания вязковихревой скорости. Первая подобласть определяется из условия  $\max|\beta_0 - \nu_0| \leq 0.06$ , которое выполняется для превалирующего потенциального движения (38). Для области (39) это условие выполняется при  $n \leq \nu_0 < 0.46$ :

$$n \leq \beta_0 < 0.4, \quad n \leq s_0 < 0.52, \quad 2.17 < W \leq 2.63, \quad (40)$$

$$0.75 \geq \alpha > 0.72, \quad 1 \geq b > 0.89, \quad 1 \geq a > 0.88.$$

Таким образом, ограничения (38), (40) задают область изменения волновых параметров, при которых потенциальная составляющая скорости доминирует над вихревой. Область (39), за исключением малой части (40), определяет область существенных вязковихревых скоростей.

Приведем выражения искомых функций, которые получены при решении линейной задачи:

$$\begin{aligned} v_0 &= Ae^{z-\beta t} \sin \chi, \quad u_0 = Ae^{z-\beta t} \cos \chi, \\ p &= Ae^{z-\beta t} (\cos \chi + \beta \sin \chi), \quad \xi = \frac{A}{1+s^2} e^{-\beta t} (\cos \chi + s \sin \chi), \\ v_1 &= -\frac{2\nu A}{1+s^2} e^{bz-\beta t} [(\cos az - s \sin az) \cos \chi + (\sin az + s \cos az) \sin \chi], \\ u_1 &= -\frac{A}{1+s^2} e^{bz-\beta t} [(f_1(z) - s f_2(z)) \cos \chi + (f_2(z) + s f_1(z)) \sin \chi], \\ f_1(z) &= \frac{1}{b} \cos az + \frac{1}{a} \sin az, \quad f_2(z) = \frac{1}{b} \sin az - \frac{1}{a} \cos az, \\ \Omega &= -\frac{2A}{1+s^2} e^{bz-\beta t} \{[(1-\beta s) \cos az - 2\nu \sin az] \cos \chi + \\ &\quad + [(1-\beta s) \sin az + 2\nu \cos az] \sin \chi\}, \\ \chi &= \bar{x} + d, \quad d = \operatorname{arctg} \frac{A_1}{A_2} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

где  $d$  – начальная фаза волны.

Полученные выражения при предельном переходе  $\nu \rightarrow 0$  дают известные [9, 10] решения для идеальной жидкости. Действительно, при  $\nu \rightarrow 0$  имеем  $\beta \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 1$ ;

$$\mathbf{u}_0 = Ae^z (\cos \chi, \sin \chi), \quad p = Ae^z \cos \chi, \quad \xi = A \cos \chi, \quad \mathbf{u}_1 = 0, \quad \Omega = 0.$$

Отметим, что найденное выражение для  $\psi$  является решением уравнения диффузии (теплопроводности) в виде затухающих во времени бегущих волн, причем полученное по полному набору частных решений системы (26).

**5. Слабовязкое приближение.** Большинство часто встречающихся жидкостей обладают малой кинематической вязкостью. При распространении волн по свободной поверхности таких жидкостей волновые параметры должны удовлетворять установленным выше ограничениям (38), (40). При этом скорость волнового движения можно считать совпадающей с потенциальной  $\mathbf{u}_0$ , а вихревой скоростью можно пренебречь ( $\mathbf{u}_1 = 0$ ). Кроме того, в модели слабовязкого приближения необходимо пренебречь вторым динамическим условием (21), так как оно может быть удовлетворено только вихревым решением. В данном случае это оправдано. Из (8) следует на свободной поверхности  $|T_s| \sim \varepsilon |T_n|$ , а для данной модели  $\nu \sim \varepsilon$ . Следовательно, для слабовязкой жидкости  $|T_s| \sim \varepsilon^2$ . Потому в линейном приближении вторым динамическим условием можно пренебречь. Тогда линейная волновая задача для слабовязкой жидкости будет состоять из первых двух уравнений (23) и первых двух условий (21), т. е.

$$\Delta\varphi = 0, \quad p = -\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$v_0 = \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad p - \gamma^2\xi + \kappa^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - 2\nu \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \quad z = 0.$$

Решение уравнений в области, занимаемой жидкостью, известно (41):

$$\mathbf{u}_0 = Ae^{z-\beta t} (\cos \chi, \sin \chi), \quad p = Ae^{z-\beta t} (\cos \chi + \beta \sin \chi).$$

Из кинематического условия получаем выражение для формы свободной поверхности

$$\xi = \frac{Ae^{-\beta t}}{1 + \beta^2} (\cos \chi - \beta \sin \chi).$$

Подставляя  $v_0$  и  $\xi$  в первое динамическое условие и приравнявая коэффициенты при  $\cos \chi$  и  $\sin \chi$ , находим

$$\alpha^2 + \beta_0^2 = 1, \quad \beta_0 = \nu_0. \quad (42)$$

В размерном виде (42) запишется так:  $\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_\nu^2$ ,  $\beta = \omega_\nu = \nu k^2$ .

Таким образом, в рамках потенциальной модели дисперсионные соотношения имеют более простой вид, чем для вихревой модели (32), (36). Критерий существования волн для слабовязкого приближения будет иметь вид  $0 \leq \nu_0 \leq 1$ ,  $W \geq 1$  или в размерном виде  $0 \leq \omega_\nu \leq \omega_0$ . Аналогичный критерий был установлен в работах [12, 13] для затухающих потенциальных волн на поверхности двухфазной смеси, роль вязкости там играло межфазное трение. Из полученного критерия следует, что для слабовязкой модели  $0 \leq \alpha(\nu_0) \leq 1$ ,  $1 \geq \beta_0(\nu_0) \geq 0$ . Однако сама модель выводится из более общей (21), (23) при выполнении ограничений (38), (40), а именно, при  $0 < \nu_0 < 0.46$ ,  $W > 2.17$ . Соответствующие этим ограничениям  $\alpha$  и  $\beta$  определяем из дисперсионных соотношений (42):  $0.89 < \alpha \leq 1$ ,  $0.46 > \beta_0 \geq 0$ . Следовательно, для слабовязкой жидкости фазовая скорость (частота) мало отличается от соответствующей для идеальной жидкости, а декремент совпадает с вязкой частотой. В работе [1] для волн на слабовязкой жидкости были получены равенства  $\omega = \omega_0$ ,  $\beta = 2\omega_\nu$  т. е. взаимоисключающие равенства. На такое противоречие было указано в [5]. Эти результаты явились следствием комплексного дисперсионного уравнения и его приближенного решения.

Моделью сильновязкого приближения является полная задача (21), (23), если выполнены ограничения (39). Решение данной задачи представлено в п. 4.

### Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика / пер. с 6-го англ. изд. А. Г. Гермогенова, В. А. Кудрявцева; под ред. Н. А. Слезкина. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 735 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
4. Абрашкин А. А. Пространственные волны на поверхности вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 6. С. 89–96.
5. Саночкин Ю. В. Влияние вязкости на свободные поверхностные волны в жидкостях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 4. С. 156–164.
6. Белоножко Д. Ф., Григорьев А. И. Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 2. С. 184–192.
7. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Поверхностные волны на слое вязкой жидкости ограниченной глубины // Вестн. Тюменск. гос. ун-та. 2007. № 5. С. 118–122.
8. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
9. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
10. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.
11. Перегудин С. И. Волновые движения в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004. 288 с.
12. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Волны на свободной поверхности двухфазной среды // Прикл. механика и техн. физика. 2002. Т. 43, № 4. С. 27–35.
13. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Распространение волн по свободной поверхности двухфазной смеси // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 6. С. 94–102.

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья принята к печати 24 декабря 2009 г.