УДК 532.59.032

В. А. Баринов, К. Ю. Басинский

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛАБОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1. Введение. Для решения нелинейной задачи о волнах на свободной поверхности идеальной жидкости Стоксом был разработан метод последовательных приближений [1], который успешно применяется до настоящего времени. В случае вязкой жидкости использование этого метода испытывает существенные трудности, обусловленные: диссипацией волнового движения, которая оценивается дополнительным волновым параметром – коэффициентом (декрементом) затухания, а также наличием вихревого движения жидкости и второго динамического условия (для касательных напряжений) на свободной поверхности. В работах [2, 3] найдено условие, при котором можно пренебречь вихревой составляющей скорости и вторым динамическим условием (слабовязкая жидкость). Отношение вязкой частоты к частоте в идеальной жидкости (относительная вязкая частота) не должно превышать 0.4. Для большинства жидкостей при длинах волн более 10^{-2} см это условие выполняется. Потому решение задачи можно получить в виде затухающих потенциальных волн, т. е. учитывать только диссипацию, пренебрегая вязковихревой составляющей скорости. Однако даже для такой модели решение нелинейной задачи удается найти только с точностью второго приближения, например, для вязкой диссипации [4], для диссипации за счет межфазного трения в двухфазной смеси [5]. Относительная простота определения второго приближения обусловлена отсутствием нелинейных добавок к частоте и декременту затухания волны в этом приближении. Но уже в третьем приближении даже для идеальной жидкости появляются постоянные добавки. При нахождении же дисперсионных соотношений в третьем приближении для слабовязкой жидкости, если частоту и декремент полагать постоянными, возникают неопределенные функции времени. Чтобы задача для третьего приближения стала разрешаемой, необходимо изначально положить частоту (фазовую скорость) волны изменяющейся во времени. Это имеет ясное физическое объяснение. В идеальной жидкости волновые возмущения – незатухающие, как следствие частота и фазовая скорость – постоянные. В вязкой жидкости все возмущения со временем изменяются (затухают), следовательно, должна меняться и частота (фазовая скорость).

Баринов Василий Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета. Количество опубликованных работ: 63. Научные направления: теория поверхностных волн, математическая физика. E-mail: vbarinov@utmn.ru.

Басинский Константин Юрьевич – аспирант кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета. Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доц. В. А. Баринов. Количество опубликованных работ: 5. Научные направления: теория поверхностных волн, математическая физика. E-mail: kbasinsky@mail.ru.

В настоящей работе за счет данного предположения проводится обобщение метода Стокса на случай слабовязких жидкостей, что позволило получить решение нелинейной задачи с точностью третьего приближения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечно глубокий слой несжимаемой вязкой жидкости, ограниченный свободной поверхностью $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$. Зададим декартову систему координат так, что плоскость $z^* = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью, а ось z^* противоположно направлена вектору силы тяжести $\mathbf{g}$. Пусть по свободной поверхности в направлении оси x^* распространяется гравитационная волна. Волновое движение жидкости происходит в плоскости x^*z^* со скоростью $\mathbf{u}^* = (u^*(t^*, x^*, z^*), 0, v^*(t^*, x^*, z^*))$. Звездочкой обозначены физические (размерные) величины.

В предположении, что истинная частота (фазовая скорость) волны – неизвестная функция времени, безразмерные уравнения и граничные условия на свободной поверхности для волновых возмущений примут вид [2]

$$div\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha - t\alpha'}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_0\Delta\mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}, \tag{1}$$

$$v - \frac{\alpha^2}{\alpha - t\alpha'}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon u\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon\xi, \tag{2}$$

$$p - \xi - 2\nu_0\frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon\nu_0\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon\xi, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} \to 0, \quad z \to -\infty.$$

Здесь $\alpha = c/c_0 = \omega/\omega_0$, $c = c\,(t)$, $\omega = \omega\,(t)$ – истинная фазовая скорость и частота волны соответственно, c_0 – фазовая скорость волны линейной задачи для идеальной жидкости.

Безразмерные и физические величины связаны равенствами

$$\mathbf{u}^* = \varepsilon c_0\mathbf{u}, \quad p^* = \varepsilon\rho c_0^2 p, \quad p^* = P - P_a + \rho g z, \quad \xi^* = \varepsilon\xi/k,$$

$$\nu_0 = \nu^* k/c_0, \quad t = kct^*, \quad x = kx^*, \quad z = kz^*, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad c_0^2 = g/k,$$

где ρ – плотность; P – давление; P_a – атмосферное давление; ξ^* – форма свободной поверхности; ν^* – коэффициент кинематической вязкости; λ – длина волны.

В силу малости волнового параметра ε, условия (2), (3) можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$. Для этого вместо скорости волнового движения, динамического давления и производных в (2), (3) нужно подставить их разложения в окрестности $z = 0$.

Вертикальную составляющую скорости v будем искать в виде $v = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i-1}e^{-i\frac{\beta}{\alpha}t}v_i$, где $v_i = e^{iz}\left\{A_{1,i}\cos\left[i\,(x-t)\right] + A_{2,i}\sin\left[i\,(x-t)\right]\right\}$, β – безразмерный декремент затухания (βkc_0 – размерный).

Вместо функций $\mathbf{u}$, p, ξ, α, β в уравнения (1) и разложенные в окрестности $z = 0$ граничные условия (2), (3) подставим ряды по малому амплитудному параметру ε:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i-1}e^{-i\frac{\beta}{\alpha}t}\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i = (u_i, 0, v_i), \quad p = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i-1}e^{-i\frac{\beta}{\alpha}t}p_i, \quad \xi = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i-1}e^{-i\frac{\beta}{\alpha}t}\xi_i,$$

$$\beta = \beta_0\left(1 + b_1\,(t)\,\varepsilon + b_2\,(t)\,\varepsilon^2 + ...\right), \quad \alpha = \alpha_0\left(1 + a_1\,(t)\,\varepsilon + a_2\,(t)\,\varepsilon^2 + ...\right),$$

$$e^{-\frac{\beta t}{\alpha}}=e^{-\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}}\left[1+\varepsilon\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}\left(a_1-b_1\right)+\varepsilon^2\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}\left(a_2-b_2+a_1b_1-a_1^2+\frac{\beta_0 t}{2\alpha_0}\left(b_1-a_1\right)^2\right)+...\right].$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим задачи соответствующих приближений. В первом приближении задача имеет вид: при ε^0

$$div\mathbf{u}_1=0,\quad \alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}-\beta_0\mathbf{u}_1-\nu_0\Delta\mathbf{u}_1=-\nabla p_1, \tag{4}$$

$$v_1{=}\alpha_0\frac{\partial\xi_1}{\partial t}-\beta_0\xi_1,\quad p_1-\xi_1-2\nu_0\frac{\partial v_1}{\partial z}=0,\quad z=0;$$

для второго приближения: при ε^1

$$div\mathbf{u}_2=0,\quad \alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t}-2\beta_0\mathbf{u}_2-\nu_0\Delta\mathbf{u}_2=-\nabla p_2-(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_1+ \tag{5}$$

$$+\,e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left[\beta_0\mathbf{u}_1\frac{d}{dt}\left(tb_1\right)-\alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t}\frac{d}{dt}\left(ta_1\right)\right],$$

$$v_2=\alpha_0\frac{\partial\xi_2}{\partial t}-2\beta_0\xi_2+\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1\xi_1\right)+e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left[v_1\frac{d}{dt}\left(ta_1\right)+\beta_0\xi_1\frac{d}{dt}\left(ta_1-tb_1\right)\right],\quad z=0,$$

$$p_2-\xi_2-2\nu_0\frac{\partial v_2}{\partial z}=\xi_1\frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_0\frac{\partial v_1}{\partial z}-p_1\right)-\nu_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi_1}{\partial x},\quad z=0;$$

для третьего приближения: при ε^2

$$div\mathbf{u}_3=0,\quad \alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_3}{\partial t}-3\beta_0\mathbf{u}_3-\nu_0\Delta\mathbf{u}_3=-\nabla p_3-\left[(\mathbf{u}_2\nabla)\mathbf{u}_1+(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_2\right]+ \tag{6}$$

$$+\,e^{\frac{2\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{-\frac{\partial\mathbf{u_1}}{\partial t}\left[\alpha_0(ta_2)'+\beta_0(ta_1)'\left(tb_1-ta_1\right)+\alpha_0t^2({a_1}')^2\right]+\beta_0\mathbf{u_1}\left[(tb_2)'+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\frac{\beta_0}{\alpha_0}(tb_1)'\left(tb_1-ta_1\right)+t^2{a_1}'{b_1}'\right]\right\}+e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left[2\beta_0\mathbf{u}_2(tb_1)'-\alpha_0\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t}(ta_1)'\right],$$

$$v_3=\alpha_0\frac{\partial\xi_3}{\partial t}-3\beta_0\xi_3+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{u}_1\xi_2+\mathrm{u}_2\xi_1+\frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{u}_1}{\partial z}\xi_1^2\right]+e^{\frac{2\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\left[\alpha_0(ta_2)'+\right.\right.$$

$$\left.+\,\alpha_0({a_1}')^2t^2+\beta_0(ta_1)'\left(tb_1-ta_1\right)\right]-\beta_0\xi_1\left[(tb_2)'+\frac{\beta_0}{\alpha_0}(tb_1)'\left(tb_1-ta_1\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\,t^2{a_1}'{b_1}'\right]\right\}+e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{\alpha_0(ta_1)'\frac{\partial\xi_2}{\partial t}-2\beta_0\xi_2(tb_1)'\right\},\quad z=0,$$

$$p_3-\xi_3-2\nu_0\frac{\partial v_3}{\partial z}=\xi_1\frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_0\frac{\partial v_2}{\partial z}-p_2\right)-\nu_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+$$

$$+\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi_2+\frac{1}{2}\xi_1^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2\nu_0\frac{\partial v_1}{\partial z}-p_1\right)-\nu_0\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+\xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right),\quad z=0.$$

3. Первое и второе приближение. Первое приближение (4) совпадает с линейной задачей, рассмотренной в [2, 6], решение которой имеет вид

$$u_1=Ae^z\cos\chi,\quad v_1=Ae^z\sin\chi,$$

$$p_1 = Ae^z\left(\alpha_0\cos\chi + \nu_0\sin\chi\right), \quad \xi_1 = Ae^z\left(\alpha_0\cos\chi - \nu_0\sin\chi\right),$$
$$\alpha_0^2 + \nu_0^2 = 1, \quad \beta_0 = \nu_0, \quad \chi = x - t + d,$$
$$d = \mathrm{arctg}\left(A_{1,1}/A_{2,1}\right), \quad A = \sqrt{A_{1,1}^2 + A_{2,1}^2}.$$

Для новой переменной χ выражения для v_i примут вид

$$v_1 = Ae^z\sin\chi, \quad v_i = e^{iz}\left[B_{1,i}\cos(i\chi) + B_{2,i}\sin(i\chi)\right],$$

$$B_{1,i} = A_{1,i}\cos(id) - A_{2,i}\sin(id), \quad B_{2,i} = A_{2,i}\cos(id) + A_{1,i}\sin(id), \quad i = 2,\ 3, \dots .$$

Тогда задачу во втором приближении (5) запишем следующим образом:

$$div\mathbf{u}_2 = 0,$$

$$\alpha_0\frac{\partial u_2}{\partial t} - 2\nu_0 u_2 - \nu_0\Delta u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial x} = Ae^{z+\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\nu_0(tb_1)'\cos\chi - \alpha_0(ta_1)'\sin\chi\right],$$
$$\alpha_0\frac{\partial v_2}{\partial t} - 2\nu_0 v_2 - \nu_0\Delta v_2 + \frac{\partial p_2}{\partial z} = Ae^{z+\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\nu_0(tb_1)'\sin\chi + \alpha_0(ta_1)'\cos\chi\right] - A^2e^{2z},$$
$$\alpha_0\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - 2\nu_0\xi_2 - v_2 = \mathrm{A}^2\left(\nu_0\cos 2\chi + \alpha_0\sin 2\chi\right) + Ae^{\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\Big[\alpha_0\nu_0(tb_1 - ta_1)'\cos\chi -$$
$$- \left(\nu_0^2 tb_1 + \alpha_0^2 ta_1\right)'\sin\chi\Big], \quad z = 0,$$

$$p_2 - \xi_2 - 2\nu_0\frac{\partial v_2}{\partial z} = A^2\left[\left(2\nu_0^2 - 1/2\right)\cos 2\chi + 2\alpha_0\nu_0\sin 2\chi + \nu_0^2 - 1/2\right], \quad z = 0.$$

Из первых трех уравнений находим u_2, p_2, затем из пятого – ξ_2:

$$u_2 = e^{2z}\left(B_{2,2}\cos 2\chi - B_{1,2}\sin 2\chi\right),$$
$$p_2 = e^{2z}\left\{\left[\alpha_0 B_{2,2} + \nu_0 B_{1,2}\right]\cos 2\chi + \left[\nu_0 B_{2,2} - \alpha_0 B_{1,2}\right]\sin 2\chi\right\} +$$
$$+ Ae^{z+\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0(ta_1)'\cos\chi + \nu_0(tb_1)'\sin\chi\right] - A^2e^{2z}/2 + C,$$
$$\xi_2 = \left[\alpha_0 B_{2,2} - 3\nu_0 B_{1,2} + A^2\left(1/2 - 2\nu_0^2\right)\right]\cos 2\chi - \left[\alpha_0 B_{1,2} + 3\nu_0 B_{2,2} +\right.$$
$$\left. + 2\alpha_0\nu_0 A^2\right]\sin 2\chi + Ae^{\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0(ta_1)'\cos\chi + \nu_0(tb_1)'\sin\chi\right].$$

Подставив выражения для v_2 и ξ_2 в кинематическое условие и приравняв коэффициенты при $\cos\chi$, $\sin\chi$, $\cos 2\chi$, $\sin 2\chi$, получаем уравнения для определения $B_{1,2}$, $B_{2,2}$, a_1, b_1

$$\left(1 + 4\nu_0^2\right)B_{1,2} + 4\alpha_0\nu_0 B_{2,2} + 2\nu_0 A^2 = 0, \quad 4\alpha_0\nu_0 B_{1,2} - \left(1 + 4\nu_0^2\right)B_{2,2} = 0,$$

$$\alpha_0(ta_1)'' - 2\nu_0(tb_1)' = 0, \quad 2\alpha_0(ta_1)' + \nu_0(tb_1)'' = 0.$$

Решив их с учетом, что при $t = 0$ функции a_1 и b_1 должны принимать конечные значения, имеем

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0,$$
$$B_{1,2} = -\frac{2\nu_0 A^2\left(1 + 4\nu_0^2\right)}{1 + 24\nu_0^2}, \quad B_{2,2} = -\frac{8\alpha_0\nu_0^2 A^2}{1 + 24\nu_0^2}.$$

Подставив $B_{1,2}$, $B_{2,2}$, a_1 и b_1 в выражения для v_2, u_2, p_2 и ξ_2, находим решение задачи во втором приближении:

$$u_2 = \frac{2\nu_0 A^2 e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left[\left(1+4\nu_0^2\right)\sin 2\chi - 4\alpha_0\nu_0\cos 2\chi\right],$$

$$v_2 = -\frac{2\nu_0 A^2 e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left[4\alpha_0\nu_0\sin 2\chi + \left(1+4\nu_0^2\right)\cos 2\chi\right],$$

$$p_2 = A^2\left[\frac{2\nu_0 e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left(\alpha_0\sin 2\chi - 5\nu_0\cos 2\chi\right) + \left(\nu_0^2 - e^{2z}/2\right)\right],$$

$$\xi_2 = \frac{A^2}{2\left(1+24\nu_0^2\right)}\left[\left(1+16\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos 2\chi - 32\alpha_0\nu_0^3\sin 2\chi\right].$$

4. Третье приближение. Подставив выражения первого и второго приближений (см. п. 3) в уравнения и граничные условия задачи (6), получим задачу для третьего приближения в явном виде

$$div\mathbf{u}_3 = 0,$$

$$\alpha_0\frac{\partial u_3}{\partial t} - 3\nu_0 u_3 - \nu_0\Delta u_3 + \frac{\partial p_3}{\partial \bar{x}} = Ae^z\left\{\left[B_{1,2}e^{2z} + \nu_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(tb_2)'\right]\cos\chi + \right.$$
$$\left. + \left[B_{2,2}e^{2z} - \alpha_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(ta_2)'\right]\sin\chi\right\},$$

$$\alpha_0\frac{\partial v_3}{\partial t} - 3\nu_0 v_3 - \nu_0\Delta v_3 + \frac{\partial p_3}{\partial z} = Ae^z\left\{\left[\alpha_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(ta_2)' - 3B_{2,2}e^{2z}\right]\cos\chi + \right.$$
$$\left. + \left[3B_{1,2}e^{2z} + \nu_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(tb_2)'\right]\sin\chi\right\},$$

$$\alpha_0\frac{\partial \xi_3}{\partial t} - 3\nu_0\xi_3 - v_3 = \frac{9A^3}{8\left(1+24\nu_0^2\right)}\left[2\alpha_0\nu_0\left(8\nu_0^2-1\right)\cos 3\chi + \left(1+10\nu_0^2-16\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right] +$$
$$+ A\alpha_0\nu_0\left[e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(tb_2 - ta_2)' + \frac{A^2\left(56\nu_0^2-3\right)}{4\left(1+24\nu_0^2\right)}\right]\cos\chi + A\left[\frac{A^2\left(5-8\nu_0^2\right)\left(1+14\nu_0^2\right)}{8\left(1+24\nu_0^2\right)} - \right.$$
$$\left. - e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(\nu_0^2 tb_2 + \alpha_0^2 ta_2\right)'\right]\sin\chi, \quad z=0,$$

$$p_3 - \xi_3 - 2\nu_0\frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{A^3}{8}\left\{\nu_0\left(1+4\nu_0^2\right)\sin 3\chi - \alpha_0\left(3+4\nu_0^2\right)\cos 3\chi + \left[\alpha_0\left(3 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + 160\nu_0^2 + 448\nu_0^4\right)\cos\chi + \nu_0\left(64\nu_0^2 - 11 - 448\nu_0^4\right)\sin\chi\right]/\left(1+24\nu_0^2\right)\right\},\ z=0.$$

Из уравнений неразрывности, движения и динамического условия находим

$$u_3 = e^{3z}\left(B_{2,3}\cos 3\chi - B_{1,3}\sin 3\chi\right),$$

$$p_3 = e^{3z}\left\{\left[\alpha_0 B_{2,3} + \nu_0 B_{1,3}\right]\cos 3\chi + \left[\nu_0 B_{2,3} - \alpha_0 B_{1,3}\right]\sin 3\chi\right\} +$$
$$+ Ae^z\left\{\left[\alpha_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(ta_2)' - B_{2,2}e^{2z}\right]\cos\chi + \left[\nu_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(tb_2)' + B_{1,2}e^{2z}\right]\sin\chi\right\},$$

$$\xi_3 = \left[\alpha_0 B_{2,3} - 5\nu_0 B_{1,3} + \alpha_0 A^3 e^{-2\beta_0 t}\left(3+4\nu_0^2\right)/8\right]\cos 3\chi - \left[\alpha_0 B_{1,3} + 5\nu_0 B_{2,3} + \right.$$

$$+\nu_0 A^3 e^{-2\beta_0 t}\left(1+4\nu_0^2\right)/8\big]\sin 3\chi+\alpha_0 A\left[e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(ta_2)'-\frac{A^2}{8\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(3+96\nu_0^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+448\nu_0^4\right)\right]\cos\chi+\nu_0 A\left[e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}(tb_2)'+\frac{A^2}{8\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(448\nu_0^4-5-128\nu_0^2\right)\right]\sin\chi.$$

Подставив выражения для v_3 и ξ_3 в кинематическое условие и приравняв коэффициенты при $\cos\chi$, $\sin\chi$, $\cos 3\chi$, $\sin 3\chi$, получаем уравнения для определения $B_{1,3}$, $B_{2,3}$, a_2, b_2

$$\left(1+6\nu_0^2\right)B_{1,3}+6\alpha_0\nu_0 B_{2,3}=\frac{3\alpha_0\nu_0 A^3\left(24\nu_0^2-1\right)}{2\left(1+24\nu_0^2\right)},$$

$$\left(1+6\nu_0^2\right)B_{2,3}-6\alpha_0\nu_0 B_{1,3}=-\frac{3\nu_0^2 A^3\left(11+24\nu_0^2\right)}{2\left(1+24\nu_0^2\right)},$$

$$\alpha_0(ta_2)''-2\nu_0(tb_2)'=-\frac{\nu_0 A^2 e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{2\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(5+76\nu_0^2+224\nu_0^4\right),$$

$$2\alpha_0(ta_2)'+\nu_0(tb_2)''=\frac{A^2 e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{2\alpha_0\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(2+35\nu_0^2-36\nu_0^4+224\nu_0^6\right).$$

С учетом, что при $t=0$ функции $a_2<\infty$ и $b_2<\infty$, решения этой системы имеют вид

$$B_{1,3}=\frac{3\alpha_0\nu_0 A^3}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left(84\nu_0^2-1+288\nu_0^4\right),$$

$$B_{2,3}=\frac{3\nu_0^2 A^3}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right),$$

$$a_2=\alpha_0 A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{4\nu_0 t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6\right),$$

$$b_2=\alpha_0 A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{8\nu_0 t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(3+36\nu_0^2+184\nu_0^4-448\nu_0^6\right).$$

Подставив $B_{1,3}$, $B_{2,3}$, a_2 и b_2 в выражения для v_3, u_3, p_3 и ξ_3, находим

$$u_3=\frac{3A^3\nu_0 e^{3z}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\nu_0\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right)\cos 3\chi+\right.$$

$$\left.+\ \alpha_0\left(1-84\nu_0^2-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right],$$

$$v_3=\frac{3A^3\nu_0 e^{3z}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\alpha_0\left(288\nu_0^4-1+84\nu_0^2\right)\cos 3\chi+\right.$$

$$\left.+\ \nu_0\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right],$$

$$p_3=\frac{A^3 e^z}{4\left(1+24\nu_0^2\right)}\left\{\frac{\nu_0 e^{2z}}{1+48\nu_0^2}\left[54\alpha_0\nu_0\left(8\nu_0^2-1\right)\cos 3\chi+3\left(1-102\nu_0^2-144\nu_0^4\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sin 3\chi\right]+2\alpha_0\left[1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6+16\nu_0^2e^{2z}\right]\cos\chi+\nu_0\left[3+36\nu_0^2+\right.$$

$$\left.\left.+184\nu_0^4-448\nu_0^6-8e^{2z}\left(1+4\nu_0^2\right)\right]\sin\chi\right\},$$

$$\xi_3=\frac{A^3}{8}\left\{\frac{1}{1+48\nu_0^2}\left[\alpha_0\left(3+76\nu_0^2-240\nu_0^4\right)\cos 3\chi+\nu_0\left(5-196\nu_0^2+240\nu_0^4\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sin 3\chi\right]+\frac{1-28\nu_0^2}{1+24\nu_0^2}\left[\alpha_0\left(1+12\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos\chi+\nu_0\left(1-28\nu_0^2+32\nu_0^4\right)\sin\chi\right]\right\}.$$

Из найденных выражений нелинейных добавок для относительной частоты и декремента затухания следует: свое максимальное конечное значение они принимают в начальный момент и с течением времени исчезают, т. е. со временем частота и декремент затухания волны стремятся к значениям, соответствующим линейной задаче.

Собрав вместе решения первых трех приближений, для относительной фазовой скорости, декремента затухания, скорости волнового движения, динамического давления и формы свободной поверхности имеем с точностью до третьего приближения

$$\alpha=\alpha_0\left[1+\varepsilon^2\alpha_0A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{4\nu_0t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6\right)\right],$$

$$\beta=\nu_0\left[1+\varepsilon^2\alpha_0A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{8\nu_0t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(3+36\nu_0^2+184\nu_0^4-448\nu_0^6\right)\right],$$

$$u=Ae^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\left(e^z\cos\chi+\varepsilon\frac{2\nu_0Ae^{2z-\frac{\beta}{\alpha}t}}{1+24\nu_0^2}\left[\left(1+4\nu_0^2\right)\sin 2\chi-4\alpha_0\nu_0\cos 2\chi\right]+\right.$$
$$+\varepsilon^2\frac{3A^2\nu_0e^{3z-2\frac{\beta}{\alpha}t}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\nu_0\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right)\cos 3\chi+\right.$$
$$\left.\left.+\ \alpha_0\left(1-84\nu_0^2-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right]\right),$$

$$v=Ae^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\left(e^z\sin\chi-\varepsilon\frac{2\nu_0Ae^{2z-\frac{\beta}{\alpha}t}}{1+24\nu_0^2}\left[4\alpha_0\nu_0\sin 2\chi+\left(1+4\nu_0^2\right)\cos 2\chi\right]+\right.$$
$$+\ \varepsilon^2\frac{3A^2\nu_0e^{3z-2\frac{\beta}{\alpha}t}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\alpha_0\left(288\nu_0^4-1+84\nu_0^2\right)\cos 3\chi+\right.$$
$$\left.\left.+\ \nu_0\left(60\nu_0^2-17-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right]\right),$$

$$p=Ae^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\left(e^z\left(\alpha_0\cos\chi+\nu_0\sin\chi\right)+\varepsilon Ae^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\left[\frac{2\nu_0e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left(\alpha_0\sin 2\chi-5\nu_0\cos 2\chi\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\nu_0^2-e^{2z}/2\right)\right]+\varepsilon^2\frac{A^2e^{z-2\frac{\beta}{\alpha}t}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)}\left\{\frac{\nu_0e^{2z}}{1+48\nu_0^2}\left[54\alpha_0\nu_0\left(8\nu_0^2-1\right)\cos 3\chi+3\left(1-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\ 102\nu_0^2-144\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right]+2\alpha_0\left[1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6+16\nu_0^2e^{2z}\right]\cos\chi+$$
$$\left.\left.+\ \nu_0\left[3+36\nu_0^2+184\nu_0^4-448\nu_0^6-8e^{2z}\left(1+4\nu_0^2\right)\right]\sin\chi\right\}\right),$$

$$\xi=Ae^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\left(\alpha_0\cos\chi-\nu_0\sin\chi+\varepsilon\frac{Ae^{-\frac{\beta}{\alpha}t}}{2\left(1+24\nu_0^2\right)}\left[\left(1+16\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos 2\chi-\right.\right.$$

$$- \ 32\alpha_0\nu_0^3 \sin 2\chi\big] + \varepsilon^2 \frac{A^2 e^{-2\frac{\beta}{\alpha}t}}{8} \left\{ \frac{1}{1+48\nu_0^2} \left[\alpha_0 \left(3 + 76\nu_0^2 - 240\nu_0^4\right) \cos 3\chi + \right.\right.$$

$$+ \ \nu_0 \left(5 - 196\nu_0^2 + 240\nu_0^4\right) \sin 3\chi\big] + \frac{1-28\nu_0^2}{1+24\nu_0^2} \left[\alpha_0 \left(1 + 12\nu_0^2 - 32\nu_0^4\right) \cos \chi + \right.$$

$$\left.\left. + \ \nu_0 \left(1 - 28\nu_0^2 + 32\nu_0^4\right) \sin \chi\right] \right\} \Big) .$$

Таким образом, получено асимптотическое решение нелинейной задачи с точностью до членов третьего порядка по малому амплитудному параметру. В предельном случае $\nu_0 \to 0$ из найденных выражений следуют известные результаты для идеальной жидкости [7, 8].

Литература

1. *Stokes G. G.* On the theory of oscillatory waves // Math. and Phys. Papers. 1880. Vol. 1. P. 197–229.
2. *Баринов В. А.* Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2010. Вып. 2. С. 18–31.
3. *Баринов В. А., Басинский К. Ю.* Влияние вязкости жидкости на распространение поверхностных волн // Труды 10-й Всерос. конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Наука, 2010. С. 205–208.
4. *Басинский К. Ю.* Нелинейные волны на поверхности слабовязкой жидкости // Сб. трудов 3-й регион. конференции «Современные проблемы математического и информационного моделирования». Тюмень: Изд-во «Вектор Бук», 2010. С. 32–36.
5. *Баринов В. А., Бутакова Н. Н.* Нелинейная задача о поверхностных волнах на двухфазной смеси // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2003. Т. 43, № 12. С. 1870–1883.
6. *Joseph D. D., Wang J.* The dissipation approximation and viscous potential flow // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 505. P. 365–377.
7. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
8. *Алешков Ю. З.* Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.

Статья рекомендована к печати проф. А. П. Жабко.

Статья принята к печати 16 декабря 2010 г.