

МЕХАНИКА

УДК 517.957; 532.591:532.133

© В. А. Баринов, К. Ю. Басинский

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ СТОКСА НА ПОВЕРХНОСТИ СЛАБОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Приводится постановка нелинейной краевой задачи о распространении волн по свободной поверхности слабовязкой жидкости. Решение задачи находится методом переменной во времени частоты, являющимся обобщением метода Стокса для диссипативных волновых процессов. Найдено асимптотическое решение с точностью третьего приближения по волновому параметру. Показано, что частота и декремент затухания нелинейной волны с течением времени стремятся к значениям, соответствующим линейной задаче. Определены нелинейные траектории жидких частиц, а также выражение переносной скорости Стокса в слабовязкой жидкости.

Ключевые слова: нелинейные поверхностные волны, вязкая диссипация, дисперсионные соотношения.

Введение

Для решения нелинейной задачи о волнах на свободной поверхности идеальной жидкости Стоксом был разработан метод последовательных приближений [1], который получил развитие во многих последующих работах, например, в [2, 3]. В случае вязкой жидкости применение этого метода испытывает существенные трудности, обусловленные: диссипацией волнового движения, которая оценивается дополнительным волновым параметром – коэффициентом (декрементом) затухания; наличием вязковихревого движения жидкости и второго динамического условия (для касательных напряжений) на свободной поверхности. В работах [4, 5] найдено условие, при котором можно пренебречь вихревой составляющей скорости и вторым динамическим условием (слабовязкая жидкость). Отношение вязкой частоты к частоте в идеальной жидкости (относительная вязкая частота) не должно превышать 0,4. Для большинства жидкостей при длинах волн более 10^{-2} см это условие выполняется. Поэтому решение задачи можно находить в виде затухающих потенциальных волн, то есть учитывать только диссипацию, пренебрегая вязковихревой составляющей скорости. Однако даже для такой модели решение нелинейной задачи удастся найти только с точностью второго приближения. Например, для вязкой диссипации [6], для диссипации за счет межфазного трения в двухфазной смеси [7]. Относительная простота определения второго приближения обусловлена отсутствием нелинейных добавок к частоте и декременту затухания волны в этом приближении. Но уже в третьем приближении даже для идеальной жидкости появляются постоянные добавки. При нахождении же дисперсионных соотношений в третьем приближении для слабовязкой жидкости, если частоту и декремент полагать постоянными, появляются неопределенные функции времени. Чтобы задача для третьего приближения стала разрешимой, необходимо изначально положить частоту (фазовую скорость) волны изменяющейся во времени. Действительно, в вязкой жидкости все возмущения со временем изменяются (затухают), следовательно, должна изменяться и частота (фазовая скорость). В настоящей работе за счет этого предположения проводится обобщение метода Стокса на случай слабовязких жидкостей. В результате определено решение нелинейной задачи с точностью третьего приближения, найдено выражение для переносной скорости Стокса частицы слабовязкой жидкости.

§ 1. Модель слабовязкого волнового движения

Рассмотрим бесконечно глубокий слой несжимаемой вязкой жидкости, ограниченный свободной поверхностью $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$. Декартова система координат задана так, что плоскость

$z^* = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью, а ось z^* противоположно направлена вектору силы тяжести \mathbf{g} . Пусть по свободной поверхности в направлении оси x^* распространяется гравитационная волна. Волновое движение жидкости происходит в плоскости x^*z^* со скоростью $\mathbf{u}^* = (u^*(t^*, x^*, z^*), 0, v^*(t^*, x^*, z^*))$. Звездочкой, там где это необходимо, обозначены физические (размерные) величины.

Нелинейная модель (краевая задача) волнового движения вязкой жидкости имеет вид [4]

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t^*} - \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

$$v - \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \xi}{\partial t^*} = \varepsilon u \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi, \quad (1.2)$$

$$p - \xi - T_n = -\varepsilon T_s \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad T_s = -\varepsilon (p - \xi + T_n) \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad z = \varepsilon \xi, \quad (1.3)$$

$$T_n = 2\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -2\nu_0 \frac{\partial u}{\partial x}; \quad T_s = \nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\mathbf{u} \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty. \quad (1.4)$$

В системе (1.1)–(1.4) безразмерные величины связаны с физическими равенствами

$$\mathbf{u}^* = \varepsilon c_0 \mathbf{u}, \quad P - P_a + \rho g z^* = \varepsilon \rho c_0^2 p, \quad x = kx^*, \quad z = kz^*, \quad \xi^* = \varepsilon \xi / k,$$

$$\nu_0 = \nu k / c_0, \quad c_0^2 = g / k, \quad \omega_0^2 = gk, \quad k = 2\pi / \lambda.$$

Здесь ρ — плотность, P — давление, $P_a = const$ — атмосферное давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, λ — длина волны, $\varepsilon = k \max |\xi^*|$ — волновой параметр.

В общую модель волнового движения вязкой жидкости (1.1)–(1.4) входят два характерных параметра: волновой ε и относительная вязкая частота ν_0 . Для определенных диапазонов значений этих параметров исходную модель можно упростить и функции \mathbf{u} , ξ находить в виде затухающих бегущих волн, что составляет суть модели слабовязкого волнового движения. В работе [4] показано, что затухающая потенциальная составляющая скорости превалирует над вязковихревой для $\nu_0 < 0,4$. Поэтому при выполнении этого условия в модели можно учитывать только вязкую диссипацию и пренебречь вихревым движением, то есть \mathbf{u} и ξ искать в виде затухающих потенциальных волн. Вторым ограничением, упрощающим модель (1.1)–(1.4), является малость параметра ε . Из динамических условий (1.3) следует, что касательные составляющие тензора вязких напряжений на порядок по ε выше нормальных: $|T_n| \sim |p - \xi|$, $|T_s| \sim \varepsilon |p - \xi|$. Тогда при малых ε (пологие волны) второе динамическое условие (1.3) является равенством более высокого порядка малости по ε , чем первое. Поэтому в случае пологих волн (модуль угла наклона касательной свободной поверхности к оси x меньше $\pi/8$ [4]) вторым равенством (1.3) — x -ой компонентой нормальной проекции тензора скачка напряжений на свободной поверхности можно пренебречь по сравнению с z -ой компонентой — первым равенством (1.3). Таким образом, нелинейную модель волнового движения слабовязкой жидкости составят уравнения (1.1), условия (1.2), (1.4) и первое динамическое условие (1.3).

§ 2. Краевая задача и ее асимптотическое представление

В системе (1.1)–(1.4) все динамические величины обезразмерены с помощью фазовой скорости (частоты) волны в идеальной жидкости, что обеспечивает малость безразмерных величин. В уравнениях (1.1), (1.2) размерной остается переменная t^* . Чтобы при обезразмеривании сохранить реальное время волнового процесса необходимо временную переменную обезразмерить истинной частотой волны, то есть $t = \omega t^* = kct^*$. Полагая истинную частоту (соответственно и фазовую скорость) волны неизвестной функцией времени, то есть $\omega = \omega(t)$ ($c = c(t)$), получаем нелинейную краевую задачу для определения волнового движения слабовязкой жидкости

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha - t\alpha'} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$v - \frac{\alpha^2}{\alpha - t\alpha'} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon u \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi, \quad (2.2)$$

$$p - \xi - 2\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon \nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (2.4)$$

где $\alpha(t) = c(t)/c_0 = \omega(t)/\omega_0$. В силу малости волнового параметра условия (2.2), (2.3) разложением в ряд Маклорена входящих в них функций можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$.

Исходя из ограничения на относительную вязкую частоту ($\nu_0 < 0,4$), скорость волнового движения можно находить в виде затухающих прогрессивных волн

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n\frac{\beta}{\alpha}t} \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{u}_n = (u_n, 0, v_n), \quad v_n = e^{nz} \{A_n \cos n\bar{x} + B_n \sin n\bar{x}\},$$

$$u_n = e^{nz} \{B_n \cos n\bar{x} - A_n \sin n\bar{x}\}, \quad \bar{x} = x - t.$$

Здесь $\beta(t)$ — безразмерный декремент затухания ($\beta\omega_0$ — размерный). Остальные неизвестные функции будем также искать в виде рядов по малому параметру ε :

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n\frac{\beta}{\alpha}t} p_n, \quad \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n\frac{\beta}{\alpha}t} \xi_n,$$

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_n(t) \right), \quad \beta = \beta_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n b_n(t) \right),$$

$$e^{-\frac{\beta t}{\alpha}} = e^{-\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}} \left[1 + \varepsilon \frac{\beta_0 t}{\alpha_0} (a_1 - b_1) + \varepsilon^2 \frac{\beta_0 t}{\alpha_0} \left(a_2 - b_2 + a_1 b_1 - a_1^2 + \frac{\beta_0 t}{2\alpha_0} (b_1 - a_1)^2 \right) + \dots \right],$$

где α_0, β_0 — безразмерные частота и декремент затухания, соответствующие линейной задаче.

Подставив в уравнения (2.1) и разложенные в окрестности $z = 0$ граничные условия (2.2), (2.3) вместо $\mathbf{u}, p, \xi, \alpha, \beta$ ряды и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получаем задачи соответствующих приближений. В первом (линейном) приближении задача имеет вид: при ε^0

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \beta_0 \mathbf{u}_1 - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_1 + \nabla p_1 = 0, \quad (2.5)$$

$$v_1 - \alpha_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \beta_0 \xi_1 = 0, \quad p_1 - \xi_1 - 2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0.$$

Во втором приближении получаем: при ε^1

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} - 2\beta_0 \mathbf{u}_2 - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_2 + \nabla p_2 = -(\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1 + \quad (2.6)$$

$$+ e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0} t} \left[\beta_0 \mathbf{u}_1 (tb_1)' - \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} (ta_1)' \right],$$

$$v_2 - \alpha_0 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + 2\beta_0 \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x} (u_1 \xi_1) + e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0} t} \left[\alpha_0 (ta_1)' \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \beta_0 \xi_1 (tb_1)' \right], \quad z = 0,$$

$$p_2 - \xi_2 - 2\nu_0 \frac{\partial v_2}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} - p_1 \right) - \nu_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial x}, \quad z = 0.$$

Здесь и ниже штрихом обозначена производная по t .

В третьем приближении задача примет вид: при ε^2

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_3 = 0, \quad \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial t} - 3\beta_0 \mathbf{u}_3 - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_3 + \nabla p_3 = - [(\mathbf{u}_2 \nabla) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_2] + \\ + e^{\frac{2\beta_0}{\alpha_0} t} \left\{ -\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \left[\alpha_0 (ta_2)' + \beta_0 (ta_1)' (tb_1 - ta_1) + \alpha_0 t^2 (a_1')^2 \right] + \beta_0 \mathbf{u}_1 [(tb_2)' + \right. \\ \left. + \frac{\beta_0}{\alpha_0} (tb_1)' (tb_1 - ta_1) + t^2 a_1' b_1' \right\} + e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0} t} \left[2\beta_0 \mathbf{u}_2 (tb_1)' - \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} (ta_1)' \right], \\ v_3 - \alpha_0 \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + 3\beta_0 \xi_3 = \frac{\partial}{\partial x} \left[u_1 \xi_2 + u_2 \xi_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial z} \xi_1^2 \right] + e^{\frac{2\beta_0}{\alpha_0} t} \left\{ \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \left[\alpha_0 (ta_2)' + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_0 (ta_1)' (tb_1 - ta_1) + \alpha_0 t^2 (a_1')^2 \right] - \beta_0 \xi_1 \left[(tb_2)' + \frac{\beta_0}{\alpha_0} (tb_1)' (tb_1 - ta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + t^2 a_1' b_1' \right] \right\} + e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0} t} \left\{ \alpha_0 (ta_1)' \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - 2\beta_0 \xi_2 (tb_1)' \right\}, \quad z = 0, \\ p_3 - \xi_3 - 2\nu_0 \frac{\partial v_3}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(2\nu_0 \frac{\partial v_2}{\partial z} - p_2 \right) - \nu_0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\xi_2 + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} - p_1 \right) - \nu_0 \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad z = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

§ 3. Решение задачи в первых трех приближениях

Первое приближение (2.5) совпадает с линейной задачей, рассмотренной в [4, 8]. Ее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 = Ae^z \cos \chi, \quad v_1 = Ae^z \sin \chi, \\ p_1 = Ae^z (\alpha_0 \cos \chi + \nu_0 \sin \chi), \quad \xi_1 = A (\alpha_0 \cos \chi - \nu_0 \sin \chi), \\ \alpha_0^2 + \nu_0^2 = 1, \quad \beta_0 = \nu_0, \quad \chi = \bar{x} + \theta, \\ A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} (A_1/B_1). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь θ — начальная фаза волны. Через новую переменную χ компоненты \mathbf{u}_n , начиная со второго приближения, выразятся следующим образом:

$$v_n = e^{nz} [C_n \cos(n\chi) + D_n \sin(n\chi)], \quad u_n = e^{nz} [D_n \cos(n\chi) - C_n \sin(n\chi)], \tag{3.2}$$

$$C_n = A_n \cos(n\theta) - B_n \sin(n\theta), \quad D_n = B_n \cos(n\theta) + A_n \sin(n\theta), \quad n = 2, 3, \dots$$

Отметим, что функции (3.2) удовлетворяют условию несжимаемости жидкости, поэтому ниже его можно не выписывать.

Тогда задача во втором приближении (2.6) примет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} - 2\nu_0 u_2 - \nu_0 \Delta u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial x} = Ae^{z+\frac{\nu_0}{\alpha_0} t} [\nu_0 (tb_1)' \cos \chi - \alpha_0 (ta_1)' \sin \chi], \\ \alpha_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} - 2\nu_0 v_2 - \nu_0 \Delta v_2 + \frac{\partial p_2}{\partial z} = Ae^{z+\frac{\nu_0}{\alpha_0} t} [\nu_0 (tb_1)' \sin \chi + \alpha_0 (ta_1)' \cos \chi] - A^2 e^{2z}, \\ \alpha_0 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - 2\nu_0 \xi_2 - v_2 = A^2 (\nu_0 \cos 2\chi + \alpha_0 \sin 2\chi) + Ae^{\frac{\nu_0}{\alpha_0} t} [\alpha_0 \nu_0 (tb_1 - ta_1)' \cos \chi - \\ - (\nu_0^2 tb_1 + \alpha_0^2 ta_1)' \sin \chi], \quad z = 0, \\ p_2 - \xi_2 - 2\nu_0 \frac{\partial v_2}{\partial z} = A^2 [(2\nu_0^2 - 1/2) \cos 2\chi + 2\alpha_0 \nu_0 \sin 2\chi + \nu_0^2 - 1/2], \quad z = 0. \end{aligned}$$

Из уравнений движения, используя выражения для компонент скорости (3.2) при $n = 2$, находим p_2 , затем из динамического условия определяем ξ_2 . Подставив выражения для v_2 и ξ_2 в кинематическое условие и приравняв коэффициенты при $\cos \chi$, $\sin \chi$, $\cos 2\chi$, $\sin 2\chi$, получаем систему двух алгебраических и двух дифференциальных уравнений для определения C_2 , D_2 и $a_1(t)$, $b_1(t)$ соответственно:

$$(1 + 4\nu_0^2) C_2 + 4\alpha_0\nu_0 D_2 = -2\nu_0 A^2, \quad 4\alpha_0\nu_0 C_2 - (1 + 4\nu_0^2) D_2 = 0,$$

$$\alpha_0 (ta_1)'' - 2\nu_0 (tb_1)' = 0, \quad \nu_0 (tb_1)'' + 2\alpha_0 (ta_1)' = 0.$$

Решение системы алгебраических уравнений имеет вид:

$$C_2 = -\frac{2\nu_0 A^2 (1 + 4\nu_0^2)}{1 + 24\nu_0^2}, \quad D_2 = -\frac{8\alpha_0 \nu_0^2 A^2}{1 + 24\nu_0^2}.$$

При решении дифференциальных уравнений необходимо удовлетворить условию: при $t = 0$ функции $a_1(t)$ и $b_1(t)$ должны принимать конечные значения. С учетом этого условия получаем: $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. Подставив найденные C_2 , D_2 и a_1 , b_1 в выражения для v_2 , u_2 , p_2 и ξ_2 , находим решение задачи во втором приближении:

$$u_2 = \frac{2\nu_0 A^2 e^{2z}}{1 + 24\nu_0^2} [(1 + 4\nu_0^2) \sin 2\chi - 4\alpha_0\nu_0 \cos 2\chi],$$

$$v_2 = -\frac{2\nu_0 A^2 e^{2z}}{1 + 24\nu_0^2} [4\alpha_0\nu_0 \sin 2\chi + (1 + 4\nu_0^2) \cos 2\chi],$$

$$p_2 = A^2 \left[\frac{2\nu_0 e^{2z}}{1 + 24\nu_0^2} (\alpha_0 \sin 2\chi - 5\nu_0 \cos 2\chi) + (\nu_0^2 - e^{2z}/2) \right],$$

$$\xi_2 = \frac{A^2}{2(1 + 24\nu_0^2)} [(1 + 16\nu_0^2 - 32\nu_0^4) \cos 2\chi - 32\alpha_0\nu_0^3 \sin 2\chi].$$

Это решение совпадает с полученным в работе [6], в которой частота и декремент волны полагались постоянными.

Подставив найденные решения первого и второго приближения в уравнения и граничные условия (2.7), получаем задачу для третьего приближения в явном виде:

$$\alpha_0 \frac{\partial u_3}{\partial t} - 3\nu_0 u_3 - \nu_0 \Delta u_3 + \frac{\partial p_3}{\partial x} = Ae^z \left\{ \left[C_2 e^{2z} + \nu_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (tb_2)' \right] \cos \chi + \right.$$

$$\left. + \left[D_2 e^{2z} - \alpha_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (ta_2)' \right] \sin \chi \right\},$$

$$\alpha_0 \frac{\partial v_3}{\partial t} - 3\nu_0 v_3 - \nu_0 \Delta v_3 + \frac{\partial p_3}{\partial z} = Ae^z \left\{ \left[\alpha_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (ta_2)' - 3D_2 e^{2z} \right] \cos \chi + \right.$$

$$\left. + \left[3C_2 e^{2z} + \nu_0 e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (tb_2)' \right] \sin \chi \right\},$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \xi_3}{\partial t} - 3\nu_0 \xi_3 - v_3 = \frac{9A^3}{8(1 + 24\nu_0^2)} [2\alpha_0\nu_0 (8\nu_0^2 - 1) \cos 3\chi + (1 + 10\nu_0^2 - 16\nu_0^4) \sin 3\chi] +$$

$$+ A\alpha_0\nu_0 \left[e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (tb_2 - ta_2)' + \frac{A^2 (56\nu_0^2 - 3)}{4(1 + 24\nu_0^2)} \right] \cos \chi + A \left[\frac{A^2 (5 - 8\nu_0^2) (1 + 14\nu_0^2)}{8(1 + 24\nu_0^2)} - \right.$$

$$\left. - e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (\nu_0^2 tb_2 + \alpha_0^2 ta_2)' \right] \sin \chi, \quad z = 0,$$

$$p_3 - \xi_3 - 2\nu_0 \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{A^3}{8} \left\{ \nu_0 (1 + 4\nu_0^2) \sin 3\chi - \alpha_0 (3 + 4\nu_0^2) \cos 3\chi + \right. \\ \left. + [\alpha_0 (3 + 160\nu_0^2 + 448\nu_0^4) \cos \chi - \nu_0 (11 - 64\nu_0^2 + 448\nu_0^4) \sin \chi] / (1 + 24\nu_0^2) \right\}, \quad z = 0.$$

Из уравнений движения и динамического условия, подставив в них выражения (3.2) при $n = 3$, находим p_3 и ξ_3 . Затем, подставив выражения для v_3 и ξ_3 в кинематическое условие и приравняв коэффициенты при $\cos \chi$, $\sin \chi$, $\cos 3\chi$, $\sin 3\chi$, получаем для определения C_3 , D_3 и $a_2(t)$, $b_2(t)$ соответственно систему алгебраических и дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (1 + 6\nu_0^2) C_3 + 6\alpha_0\nu_0 D_3 = \frac{3\alpha_0\nu_0 A^3 (24\nu_0^2 - 1)}{4(1 + 24\nu_0^2)}, \\ 6\alpha_0\nu_0 C_3 - (1 + 6\nu_0^2) D_3 = \frac{3\nu_0^2 A^3 (11 + 24\nu_0^2)}{4(1 + 24\nu_0^2)}, \\ \alpha_0 (ta_2)'' - 2\nu_0 (tb_2)' = -\frac{\nu_0 A^2 e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{2(1 + 24\nu_0^2)} (5 + 76\nu_0^2 + 224\nu_0^4), \\ \nu_0 (tb_2)'' + 2\alpha_0 (ta_2)' = \frac{A^2 e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{2\alpha_0(1 + 24\nu_0^2)} (2 + 35\nu_0^2 - 36\nu_0^4 + 224\nu_0^6). \end{cases}$$

Из первой системы находим

$$C_3 = -\frac{3\alpha_0\nu_0 A^3}{4(1 + 24\nu_0^2)(1 + 48\nu_0^2)} (1 - 84\nu_0^2 - 288\nu_0^4), \\ D_3 = -\frac{3\nu_0^2 A^3}{4(1 + 24\nu_0^2)(1 + 48\nu_0^2)} (17 - 60\nu_0^2 + 288\nu_0^4).$$

Решение системы дифференциальных уравнений, с учетом условий $a_2(0) < \infty$, $b_2(0) < \infty$, имеет вид:

$$a_2 = \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{4\nu_0 t (1 + 24\nu_0^2)} (1 + 20\nu_0^2 + 20\nu_0^4 + 224\nu_0^6), \\ b_2 = \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{8\nu_0 t (1 + 24\nu_0^2)} (3 + 36\nu_0^2 + 184\nu_0^4 - 448\nu_0^6).$$

Подставляя C_3 , D_3 и a_2 , b_2 в выражения для v_3 , u_3 , p_3 и ξ_3 , получаем решение задачи в третьем приближении:

$$u_3 = \frac{3A^3\nu_0 e^{3z}}{4(1 + 24\nu_0^2)(1 + 48\nu_0^2)} [\alpha_0 (1 - 84\nu_0^2 - 288\nu_0^4) \sin 3\chi - \\ - \nu_0 (17 - 60\nu_0^2 + 288\nu_0^4) \cos 3\chi], \\ v_3 = -\frac{3A^3\nu_0 e^{3z}}{4(1 + 24\nu_0^2)(1 + 48\nu_0^2)} [\alpha_0 (1 - 84\nu_0^2 - 288\nu_0^4) \cos 3\chi + \\ + \nu_0 (17 - 60\nu_0^2 + 288\nu_0^4) \sin 3\chi], \\ p_3 = \frac{A^3 e^z}{4(1 + 24\nu_0^2)} \left\{ \frac{\nu_0 e^{2z}}{1 + 48\nu_0^2} [54\alpha_0\nu_0 (8\nu_0^2 - 1) \cos 3\chi + 3(1 - 102\nu_0^2 - 144\nu_0^4) \cdot \right. \\ \cdot \sin 3\chi] + 2\alpha_0 [1 + 20\nu_0^2 + 20\nu_0^4 + 224\nu_0^6 + 16\nu_0^2 e^{2z}] \cos \chi + \nu_0 [3 + 36\nu_0^2 + \\ \left. + 184\nu_0^4 - 448\nu_0^6 - 8e^{2z} (1 + 4\nu_0^2)] \sin \chi \right\}, \\ \xi_3 = \frac{A^3}{8} \left\{ \frac{1}{1 + 48\nu_0^2} [\alpha_0 (3 + 76\nu_0^2 - 240\nu_0^4) \cos 3\chi + \nu_0 (5 - 196\nu_0^2 + 240\nu_0^4) \cdot \right. \\ \left. \cdot \sin 3\chi] + \frac{1 - 28\nu_0^2}{1 + 24\nu_0^2} [\alpha_0 (1 + 12\nu_0^2 - 32\nu_0^4) \cos \chi + \nu_0 (1 - 28\nu_0^2 + 32\nu_0^4) \sin \chi] \right\}.$$

Из найденных выражений нелинейных добавок для относительной частоты и декремента затухания следует: свое максимальное конечное значение они принимают в начальный момент и с течением времени исчезают.

Собирая вместе решения первых трех приближений, получаем выражения для относительной фазовой скорости, декремента затухания, скорости волнового движения, динамического давления и формы свободной поверхности с точностью до третьего приближения:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \alpha_0 \left[1 + \varepsilon^2 \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{4\nu_0 t (1 + 24\nu_0^2)} (1 + 20\nu_0^2 + 20\nu_0^4 + 224\nu_0^6) \right], \quad (3.3) \\
 \beta &= \nu_0 \left[1 + \varepsilon^2 \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{8\nu_0 t (1 + 24\nu_0^2)} (3 + 36\nu_0^2 + 184\nu_0^4 - 448\nu_0^6) \right], \\
 u &= Ae^{z - \frac{\nu_0}{\alpha_0} t} \left(\cos \chi + \varepsilon \frac{2\nu_0 Ae^{z - \frac{\nu_0}{\alpha_0} t}}{1 + 24\nu_0^2} [(1 + 4\nu_0^2) \sin 2\chi - 4\alpha_0 \nu_0 \cos 2\chi] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon^2 A^2}{8(1 + 24\nu_0^2)} \left\{ \frac{6\nu_0 e^{2z - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{(1 + 48\nu_0^2)} [\alpha_0 (1 - 84\nu_0^2 - 288\nu_0^4) \sin 3\chi - \nu_0 (17 - 60\nu_0^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 288\nu_0^4) \cos 3\chi] + \left(e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} - 1 \right) (1 - 4\nu_0^2 + 144\nu_0^4 - 896\nu_0^6) \cos \chi \right\} \right), \\
 v &= Ae^{z - \frac{\nu_0}{\alpha_0} t} \left(\sin \chi - \varepsilon \frac{2\nu_0 Ae^{z - \frac{\nu_0}{\alpha_0} t}}{1 + 24\nu_0^2} [4\alpha_0 \nu_0 \sin 2\chi + (1 + 4\nu_0^2) \cos 2\chi] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon^2 A^2}{8(1 + 24\nu_0^2)} \left\{ -\frac{6\nu_0 e^{2z - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{(1 + 48\nu_0^2)} [\alpha_0 (1 - 84\nu_0^2 - 288\nu_0^4) \cos 3\chi + \nu_0 (17 - 60\nu_0^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 288\nu_0^4) \sin 3\chi] + \left(e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} - 1 \right) (1 - 4\nu_0^2 + 144\nu_0^4 - 896\nu_0^6) \sin \chi \right\} \right), \\
 p &= Ae^{-\frac{\nu_0}{\alpha_0} t} \left(e^z (\alpha_0 \cos \chi + \nu_0 \sin \chi) + \varepsilon Ae^{-\frac{\nu_0}{\alpha_0} t} \left[\frac{2\nu_0 e^{2z}}{1 + 24\nu_0^2} (\alpha_0 \sin 2\chi - 5\nu_0 \cos 2\chi) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\nu_0^2 - e^{2z}/2) \right] + \frac{\varepsilon^2 A^2 e^z}{8(1 + 24\nu_0^2)} \left\{ \frac{2\nu_0 e^{2z - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{1 + 48\nu_0^2} [3(1 - 102\nu_0^2 - 144\nu_0^4) \sin 3\chi - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 54\alpha_0 \nu_0 (1 - 8\nu_0^2) \cos 3\chi] + \alpha_0 \left[e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (5 + 76\nu_0^2 + 224\nu_0^4 + 64\nu_0^2 e^{2z}) - 1 + 4\nu_0^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 144\nu_0^4 + 896\nu_0^6] \cos \chi + \nu_0 \left[e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (7 + 68\nu_0^2 + 512\nu_0^4 - 1792\nu_0^6) - 16e^{2z - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot (1 + 4\nu_0^2) - 1 + 4\nu_0^2 - 144\nu_0^4 + 896\nu_0^6] \sin \chi \right\} \right), \\
 \xi &= Ae^{-\frac{\nu_0}{\alpha_0} t} \left[\alpha_0 \cos \chi - \nu_0 \sin \chi + \varepsilon \frac{Ae^{-\frac{\nu_0}{\alpha_0} t}}{2(1 + 24\nu_0^2)} [(1 + 16\nu_0^2 - 32\nu_0^4) \cos 2\chi - \right. \\
 &\quad \left. - 32\alpha_0 \nu_0^3 \sin 2\chi] + \varepsilon^2 \frac{A^2}{8} \left(\frac{e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t}}{1 + 48\nu_0^2} [\alpha_0 (3 + 76\nu_0^2 - 240\nu_0^4) \cos 3\chi + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \nu_0 (5 - 196\nu_0^2 + 240\nu_0^4) \sin 3\chi] + \frac{1}{1 + 24\nu_0^2} \left\{ \alpha_0 \left[2e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} (1 - 10\nu_0^2 - 112\nu_0^4) - \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$-1 + 4\nu_0^2 - 144\nu_0^4 + 896\nu_0^6] \cos \chi + \nu_0 \left[1 - 4\nu_0^2 + 144\nu_0^4 - 896\nu_0^6 - 4\nu_0^2 e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} \cdot (13 - 168\nu_0^2) \right] \sin \chi \Big] \Big] .$$

Таким образом, получено асимптотическое решение нелинейной задачи с точностью до членов третьего порядка по малому амплитудному параметру. В предельном случае $\nu_0 \rightarrow 0$ из найденных выражений следуют известные результаты для идеальной жидкости [2, 3]. При исследовании нелинейных движений идеальной жидкости Стоксом был установлен нелинейный эффект — зависимость частоты (фазовой скорости) волны от ее высоты, то есть от параметра ε . Первая формула (3.3) является ее обобщением на случай слабовязкой жидкости. Из нее следует, что с течением времени частота (фазовая скорость) стремится к значению, соответствующему линейной задаче. Однако это стремление более медленное, чем общее затухание волны. Поэтому нелинейная частота не успевает выровняться с линейной до полного затухания волны. Графики зависимости фазовой скорости и декремента затухания волны длины 1 м и относительной высоты 0,1 ($\varepsilon = 0,1$), распространяющейся по поверхности воды ($\nu_0 = 5 \cdot 10^{-6}$), представлены на рисунках 1 и 2 соответственно. Максимальные значения фазовая скорость и декремент принимают в начальный момент времени: $c(0) = 1,255$ м/с, $\beta^*(0) = 44 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}$. Из графиков видно, что для воды нелинейная фазовая скорость и декремент стремятся к своим линейным значениям. Это стремление достаточно медленное, они становятся равными примерно через 55 часов.

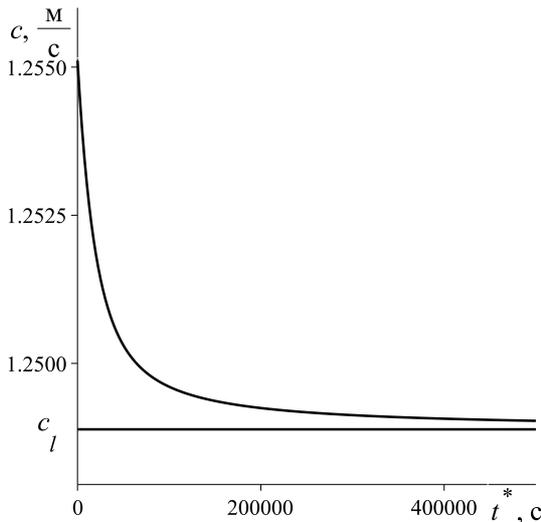


Рис. 1. Зависимость $c(t^*)$ для воды при $\lambda = 1$ м, $\varepsilon = 0,1$, $A=1$

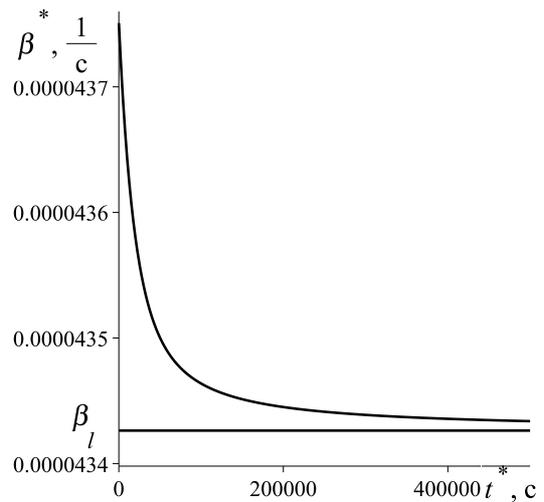


Рис. 2. Зависимость $\beta^*(t^*)$ для воды при $\lambda = 1$ м, $\varepsilon = 0,1$, $A=1$

Другим нелинейным эффектом для идеальной жидкости является наличие приповерхностного переносного течения (течение Стокса), обуславливающего разомкнутость траекторий движения жидких частиц. Чтобы получить выражение для течения Стокса в случае слабовязкой жидкости, необходимо определить нелинейные выражения для траекторий.

§ 4. Волновые траектории частиц слабовязкой жидкости

Физические координаты жидкой частицы $x^*(t^*)$, $z^*(t^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^*}{dt^*} = u^*, \quad \frac{dz^*}{dt^*} = v^* .$$

В приведенных выше решениях зависимость от x^* выражена через волновую переменную $\chi/k = (\bar{x} + \theta)/k$. Следовательно, и в уравнениях движения нужно перейти к этой переменной.

Кроме того, физическое время необходимо обезразмерить частотой колебания жидкой частицы σ , так как для нелинейных волн даже в идеальной жидкости σ не совпадает с частотой волны [2, 3]. Тогда безразмерные переменные примут вид

$$t^* = t/\sigma, \quad kz^* = z, \quad kx^* = \bar{x} + \gamma t = \chi - \theta + \gamma t,$$

где $\gamma = \omega/\sigma$. Следуя выше примененному методу переменной частоты, положим $\gamma = \gamma(t)$. Тогда уравнения движения в безразмерном виде запишутся как

$$\frac{d\chi}{dt} = -(t\gamma)' + \varepsilon \left(t \frac{\gamma}{\alpha} \right)' u, \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon \left(t \frac{\gamma}{\alpha} \right)' v. \quad (4.1)$$

Решение (4.1) находим в виде рядов по степеням ε :

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \chi_n, \quad z = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n z_n, \quad (4.2)$$

$$\bar{x} = \chi_0 + \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \chi_n, \quad \gamma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n.$$

Подставляя выражения (3.3), ряды (4.2) в уравнения (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , можно выписать асимптотические приближения системы (4.1). Соответственно в нулевом и первом приближении (при ε^0 и ε^1) уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_0}{dt} &= -1, & \frac{dz_0}{dt} &= 0, \\ \frac{d\chi_1}{dt} &= \frac{A}{\alpha_0} e^{z_0 - \frac{\nu_0}{\alpha_0} t} \cos \chi_0 - (t\gamma_1)', & \frac{dz_1}{dt} &= \frac{A}{\alpha_0} e^{z_0 - \frac{\nu_0}{\alpha_0} t} \sin \chi_0. \end{aligned}$$

В нулевом приближении находим

$$\chi_0 = \chi_L - t = x_L + \theta - t, \quad z_0 = z_L,$$

где x_L, z_L — лагранжевы координаты частицы в состоянии покоя.

Периодическое по χ_L решение в первом приближении имеет вид

$$\gamma_1 = 0, \quad \chi_1 = -Ae^{z_L - \frac{\nu_0}{\alpha_0} t} (\nu_0 \cos \chi_L + \alpha_0 \sin \chi_L), \quad z_1 = Ae^{z_L - \frac{\nu_0}{\alpha_0} t} (\alpha_0 \cos \chi_L - \nu_0 \sin \chi_L).$$

Уравнения для определения траектории частицы жидкости во втором приближении примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_2}{dt} &= \frac{2\nu_0 A^2}{\alpha_0 (1 + 24\nu_0^2)} e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} [(1 + 4\nu_0^2) \sin 2\chi_L - 4\alpha_0 \nu_0 \cos 2\chi_L] + A^2 e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} - (t\gamma_2)', \\ \frac{dz_2}{dt} &= -\frac{2\nu_0 A^2}{\alpha_0 (1 + 24\nu_0^2)} e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} [(1 + 4\nu_0^2) \cos 2\chi_L + 4\alpha_0 \nu_0 \sin 2\chi_L]. \end{aligned}$$

Полагая χ_2, z_2 периодическими по χ_L , находим

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\alpha_0 A^2}{2\nu_0 t} e^{2z_L} \left(1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} \right), \\ \chi_2 &= \frac{\nu_0 A^2}{1 + 24\nu_0^2} e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} [\alpha_0 (1 + 8\nu_0^2) \cos 2\chi_L + \nu_0 (3 - 8\nu_0^2) \sin 2\chi_L], \\ z_2 &= \frac{\nu_0 A^2}{1 + 24\nu_0^2} e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} [\alpha_0 (1 + 8\nu_0^2) \sin 2\chi_L - \nu_0 (3 - 8\nu_0^2) \cos 2\chi_L]. \end{aligned}$$

Подставляя найденные решения предыдущих приближений в третье, можно получить систему неоднородных уравнений для определения γ_3 , χ_3 , z_3 , которая решается аналогично предыдущим приближениям. Ввиду громоздкости получающиеся выражения не приведены. Для определения нелинейного эффекта — приповерхностного течения Стокса — достаточно двух приближений, так как оно появляется именно во втором приближении. Величина $c - \frac{\sigma}{k}$ представляет собой переносную скорость. Ее приближенное выражение имеет вид

$$\varepsilon^2 c_0 \frac{\alpha_0^2 A^2}{2\nu_0 t} e^{2zL} \left(1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0} t} \right). \quad (4.3)$$

В предельном случае $\nu \rightarrow 0$ формула (4.3) переходит в известное выражение переносной скорости Стокса для идеальной жидкости [3]. Для вязкой же жидкости приповерхностное течение зависит не только от вертикального положения жидкой частицы, но и от времени. Как следует из (4.3), с течением времени переносная скорость Стокса при учете вязкой диссипации затухает.

Из полученных выражений для траекторий следует, что движение жидкой частицы состоит из двух затухающих движений: прямолинейного и вращательного. Прямолинейное в направлении оси x^* происходит тем быстрее, чем ближе частица к свободной поверхности. Оно обеспечивает разомкнутость траекторий частиц. Вращательное движение осуществляется по круговым спиралеобразным траекториям, которые со временем сходятся к центру начальной окружности. Стремление к центру тем быстрее, чем больше значение кинематической вязкой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves // Math. and Physic. Papers. — 1880. — Vol. 1. — P. 197–229.
2. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. — М.: Наука, 1977. — 816 с.
3. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. — 196 с.
4. Баринов В. А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестн. С.-Петербург. ун-та. — 2010. — Сер. 10. Вып. 2. — С. 18–31.
5. Баринов В. А., Басинский К. Ю. Влияние вязкости жидкости на распространение поверхностных волн // Тр. 10-ой Всеросс. конф. «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Наука, 2010. — С. 205–208.
6. Басинский К. Ю. Нелинейные волны на поверхности слабовязкой жидкости // Сб. тр. 3-ей Регион. конф. «Современ. проблемы математ. и информ. моделирования». Тюмень: Изд-во «Вектор Бук», 2010. — С. 32–36.
7. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Нелинейная задача о поверхностных волнах на двухфазной смеси // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. — 2003. — Т. 43, № 12. — С. 1870–1883.
8. Joseph D. D., Wang J. The dissipation approximation and viscous potential flow // J. Fluid Mech. — 2004. — Vol. 505. — P. 365–377.

V. A. Barinov, K. Yu. Basinsky

Nonlinear Stokes waves on the surface of low-viscosity fluid

The statements of nonlinear boundary-value problem for wave propagation over the free surface of low-viscosity fluid have been presented. Solution is found by the method of time-varying frequency, which is the Stokes' method generalized for the dissipative wave processes. The asymptotic solution up to the third-order approximation upon the wave parameter has been found. It is shown that the frequency and damping rate of the nonlinear wave tend in time to the values corresponding to a linear problem. Nonlinear trajectories of fluid particles and the expression for transfer velocity in a low-viscosity Stokes fluid have been defined.

Keywords: nonlinear surface waves, viscous dissipation, dispersion relations.

Mathematical Subject Classifications: 76D33, 35Q30

Баринов Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет. 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10. E-mail: vbarinov@utmn.ru
Басинский Константин Юрьевич, аспирант, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет. 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10. E-mail: kbasinsky@mail.ru